数理解析研究所講究録
998巻 1997年 188-197



# Semi-local units modulo global units

東大数理 都地 崇恵 ( Takae TSUJI )

## §0 はじめに

奇素数 $p$ を固定し, $\mathbf{Q}_\infty/\mathbf{Q}$ を円分 $\mathbf{Z}_p$-拡大, すなわち $\bigcup_{n\geq 0}\mathbf{Q}(\mu_{p^n})$ に含まれる $\mathbf{Q}$ 上唯1つの $\mathbf{Z}_p$-拡大とする. ここに $\mu_{p^n}$ は1の $p^n$ 乗根全体からなる群である. $K/\mathbf{Q}$ を虚な有限次 Abel 拡大であり, $K\cap\mathbf{Q}_\infty=\mathbf{Q}$ を満たすものとする. $K_\infty/K$ を円分 $\mathbf{Z}_p$-拡大, すなわち $K_\infty=K\mathbf{Q}_\infty$ とし, さらに各 $n\geq 0$ に対して $K$ 上の次数が $p^n$ である $K_\infty/K$ の唯1つの中間体を $K_n$ とおく. $K_n$ の ideal 類群の $p$-Sylow 部分群を $A_{K_n}$ と書き, $X:=\varprojlim A_{K_n}$ とおく. ここに射影極限は Norm でとる. このとき $X$ は $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})$ が作用する $\mathbf{Z}_p$-加群であり, $\Gamma=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ , $\Delta=\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ とおけば, $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})\simeq\Gamma\times\Delta$ が得られる. さらに $\Gamma$ の位相的生成元 $\gamma_0$ を固定し, $T$ を不定元にもつ $\mathbf{Z}_p$ 係数のベキ級数環の元 $1+T$ に $\gamma_0$ を対応させることにより位相同型 $\Lambda:=\mathbf{Z}_p[[T]]\simeq\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ が得られる. 従って, $X$ は $\Lambda[\Delta]$-加群を成すことがわかる. また $X$ は $\Lambda$ 上有限生成であり, $\Lambda$-torsion であることが知られている. なお, 複素共役 $J\in\Delta$ を固定し, $\mathbf{Z}_p[\Delta]$-加群 $M$ に対し, $M^\pm:=(1\pm J)M$ と定義する.

このとき $X^-$ は $\Lambda[\Delta]$-加群としていかなる性質をもつかを考えるのだが, $X^-$ を直接考察する代わりに適当な $\Lambda[\Delta]$-加群の性質を先ず調べ, その加群と $X^-$ との関係を見出す方針を採る. $\mathfrak{X}$ を $K_\infty$ 上の $p$ 以外では不分岐な最大 Abel $p$-拡大の Galois 群とし, $\mathcal{U}_\infty$ を semi-local units の射影極限, $\mathcal{E}_\infty$ を global units で定義するその部分加群とする ( 定義は §1 を参照のこと ). このとき類体論から導かれる canonical な完全系列

$$0\longrightarrow(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+\longrightarrow\mathfrak{X}^+\longrightarrow X^+\longrightarrow 0 \qquad (1)$$

が存在する. さらに $K$ が 1 の原始 $p$ 乗根 $\zeta_p$ を含めば $\mathcal{X}^+$ から $\dot{X}^-$ への pseudo-isomorphism があることが知られてる. ここに pseudo-isomorphism とは kernel, cokernel が共に有限である準同型を意味し, $\mathcal{X}^+ \sim \dot{X}^-$ と記すことにする. また "・" の意味は次の通りである; $\kappa : \Gamma \to 1 + p\mathbf{Z}_p$ を円分指標, すなわち, すべての $\zeta \in \mu_{p^\infty} := \bigcup_{n\geq 0} \mu_{p^n}$ と $\gamma \in \Gamma$ に対し $\gamma(\zeta) = \zeta^{\kappa(\gamma)}$ を満たす指標とし, $\dot{T} := \kappa(\gamma_0)(1+T)^{-1} - 1 \in \Lambda$ とおく. 加群 $\dot{X}^-$ は $T$ の作用を $\dot{T}$ に, $\delta \in \Delta$ の作用を$\omega(\delta)\delta^{-1}$ に置き換えて$\Lambda[\Delta]$-加群と見做したものである. ここに $\omega$ は Teichmüller character とする. 一方で $X^+$ は有限であると予想されている. この予想は一般に総実代数体上の円分 $\mathbf{Z}_p$-拡大における ideal 類群の $p$-Sylow 部分加群の射影極限は有限であるというもので, Greenberg 予想とよばれている. 因みに, $X^+$ は有限であるということをすべての $n \geq 0$ に対して $|A_{K_n}{}^+|$ が有界である, と言い換えることもできる. そこで, もし $X^+$ が有限であると仮定すれば, $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ と $X^-$ は有限の違いしかないことになる. 従って $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ の $\Lambda[\Delta]$-加群としての性質を考察することにより, $X^-$ のそれについても殆ど同様のことが得られる. このような背景の下で, 今回, $\Lambda[\Delta]$-加群としての $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ の考察が対象となった.

## §1 結果について

まず始めに $\mathcal{U}_\infty$ 及び $\mathcal{E}_\infty$ の定義を述べる.

$v$ を $K_\infty$ の $p$ の上の有限素点とし, 各 $n \geq 0$ に対して $K_{n,v}$ を $v$ の$K_n$ へ制限した素点に関する $K_n$ の完備化とし, $K_{n,v}$ の pincipal units, すなわち極大 ideal を法として 1 に合同な単数全体, を $U_{n,v}$ と表わし

$$\mathcal{U}_n = \prod_{v|p} U_{n,v}$$

とおく. ここに $v$ は $K_\infty$ の $p$ の上の有限素点全体をわたる. $K_n$ の単数群 $E_n$ を写像

$K_n \to \prod_{v|p} K_{n,v}$ による像と同一視して, $E_n \cap \mathcal{U}_n$ の $\mathcal{U}_n$ の中での閉包を $\mathcal{E}_n$ とする. そこで

$$\mathcal{U}_\infty := \varprojlim \mathcal{U}_n,\ \mathcal{E}_\infty := \varprojlim \mathcal{E}_n$$

とおく. ここに, 射影極限は局所体の Norm によって誘導される写像でとる. このとき $\mathcal{U}_\infty$ 及び $\mathcal{E}_\infty$ は $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})$ が作用する $\mathbf{Z}_p$-加群であるから, これらは $\Lambda[\Delta]$-加群になることが分かる.

主結果は次の通りである:

**定理** $p$ を奇素数とする. $K$ を虚な $\mathbf{Q}$ 上有限次 Abel 拡大とし, $K$ は $p$ で tamely ramified であると仮定する. このとき $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ は有限な指数をもつ cyclic $\Lambda[\Delta]$-部分加群を含む.

§0 でも述べたが, $\zeta_p \in K$ であるとき, 一般に $\Lambda$-加群として $\mathcal{X}^+ \sim \dot{X}^-$ となることが知られている. そこで, このとき $K/\mathbf{Q}$ が Abel 拡大であるならば $\Lambda[\Delta]$-加群として $\mathcal{X}^+ \sim \dot{X}^-$ が成り立つことは証明できる. よって完全系列 (1) と合わせれば, $X^+$ が有限であるという仮定の下では, $\Lambda[\Delta]$-加群として $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ と $X^-$ の違いは高々有限であることが得られたことになる. 従って定理よりつぎの系が導かれる:

**系** (Greenberg) $\zeta_p \in K$ とし, $X^+$ が有限であると仮定する. このとき $X^-$ は有限な指数をもつ cyclic $\Lambda[\Delta]$-部分加群を含む.

この系は別の方法により, すでに Greenberg [Gr2, Theorem 5] において証明されている結果である. 従って $X^+$ の有限性を仮定すれば Greenberg の結果から, 上の定理が導かれるのは当然だが, 定理は $X^+$ の有限性を仮定しないという点で独立である.

また系における "$X^-$ は有限な指数をもつ cyclic $\Lambda[\Delta]$-部分加群を含む" ことの数論的な意

味を簡単に述べる. 以下指数が有限となる cyclic $\Lambda[\Delta]$-部分加群を含む加群を pseudo-cyclic $\Lambda[\Delta]$-加群とよぶことにする.

Abel 拡大 $K/\mathbf{Q}$ に対する岩澤主予想が成立するための 1 つの十分条件として $X^-$ が pseudo-cyclic $\Lambda[\Delta]$-加群であることが Stickelberger の定理と解析的類数公式から導かれる. 実際には, $X^-$ が pseudo-cyclic $\Lambda[\Delta]$-加群であるいうとは一般に証明されていないが, しかし Abel 体に関する岩澤主予想の成立は Mazur-Wiles によって証明されている. つぎに $p$-進 $L$ 関数との関係について述べる. $\chi$ を $\overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ に値をもつ $\Delta$ の指標とし, Dirichlet 指標と同一視する. $\chi \neq \omega$ なる odd な指標 ( $\chi(-1) = -1$ ) に対し $L_p(s, \chi^{-1}\omega)$ を Kubota-Leopoldt $p$-進 $L$ 関数とし, $g_\chi(T) \in \mathcal{O}_\chi[[T]]$ をすべての $s \in \mathbf{Z}_p$ に対して $g_\chi(\kappa(\gamma_0)^s - 1) = L_p(s, \chi^{-1}\omega)$ を満たすベキ級数とする. ただし $\mathcal{O}_\chi$ は $\mathbf{Z}_p$ 上 $\chi$ の像で生成される環である. このとき岩澤主予想を用いることにより, $g_\chi(T) = 0$ が重根をもたなければ $X^-$ が pseudo-cyclic $\Lambda[\Delta]$-加群であることが示される. 逆は必ずしも成り立たず, また $g_\chi(T) = 0$ が重根をもつ例は現在のところ見つかっていない.

## §2 $\Lambda[\Delta]$-加群 $\mathcal{U}_\infty$ について

以下 $K$ は $p$ で tamely ramified であると仮定する. この節では $p = 2$ でもよい. $D$を $K/\mathbf{Q}$ の中の $p$ の分解群とし, $K_\infty$ の $p$ 上の有限素点 $v$ を固定しておく. $\mathbf{Q}_\infty/\mathbf{Q}$ では $p$ の上の素点は完全分岐していることから, $K$ に対する仮定より $K_\infty/K$ でも $p$ の上の素点は完全分岐している. 従って同型

$$\mathcal{U}_n := \prod_{v|p} U_{n,v} \simeq U_{n,v} \otimes_{\mathbf{Z}_p[D]} \mathbf{Z}_p[\Delta]$$

が得られる. さらに $\mathbf{Z}_p[\Delta]$ は $\mathbf{Z}_p[D]$-自由加群であるから, 射影極限をとることにより $\Lambda[\Delta]$-加群としての同型

$$\mathcal{U}_\infty \cong U_{\infty,v} \otimes_{\mathbf{Z}_p[D]} \mathbf{Z}_p[\Delta] \tag{2}$$

が得られる. ただしここに $U_{\infty,v} = \varprojlim U_{n,v}$ である. $\Lambda[\Delta]$-加群 $\mathcal{U}_\infty$ を知るためには $U_{\infty,v}$ の $\Lambda[D]$-加群としての構造を考察すればよいことが分かった. そこでつぎのことを示した:

**命題 1** $U_{\infty,v}$ の $\Lambda[D]$-部分加群 $U'$ が存在し, $U' \simeq \Lambda[D] \bigoplus (\Lambda/(\dot{T}))^r$ であり, かつある $a \geq 0$ に対して $p^a U_{\infty,v} \subseteq U'$ を満たす. ただしここに $r$ は $\zeta_p \in K_v$ のとき 1 で, そうでないときは 0 とする.

$\dot{T}$ の定義より Galois 群の作用も含めて

$$\Lambda/(\dot{T}) \simeq \varprojlim \mu_{p^n} = \mathbf{Z}_p(1)$$

となることは明らかである.

証明の方針はまず初めに $K_{n,v}$ の $p$-進完備化 $\widehat{K_{n,v}} := \varprojlim K_{n,v}{}^\times/(K_{n,v}{}^\times)^{p^n}$ の Norm による射影極限$Y := \varprojlim \widehat{K_{n,v}}$ について考察する. その際, 局所類体論により $Y$ は $K_{\infty,v}$ の最大 Abel $p$-拡大の $K_{\infty,v}$ 上の Galois 群と同型であるから, $Y$ をその Galois 群と同一視し, Galois 群としての性質を用いる. 因みに $Y$ の $\Lambda$-加群としての構造は Iwasawa [Iw2, Theorem 25] において決定されている. さらに, $U_{\infty,v}$ と $Y$ の違いは $\mathbf{Z}_p$ ( Galois 群の作用は trivial ) のみであるから, $Y$ について考察した結果から上の命題が導かれる.

従ってまた, 同型 ( 2 ) と命題 1 よりつぎの命題が得られる:

**命題 2** $\mathcal{U}_\infty$ の $\Lambda[\Delta]$-部分加群 $\mathcal{U}'$ が存在し, $\mathcal{U}' \simeq \Lambda[\Delta] \bigoplus ((\Lambda/(\dot{T})) \otimes_{\mathbf{Z}_p[D]} \mathbf{Z}_p[\Delta])^r$ であり, かつある$a \geq 0$ に対して $p^a \mathcal{U}_\infty \subseteq \mathcal{U}'$ を満たす. ただしここに $r$ は $\zeta_p \in K_v$ のとき 1 で, そうでないときは 0 とする.

( 注 1 ) $K/\mathbf{Q}$ の拡大次数が $p$ と素なとき, $\Lambda[\Delta]$-加群 $\mathcal{U}_\infty$ の構造はIwasawa [Iw1] 及

び Gillard [Gi] によって命題 2 における$\mathcal{U}'$ と $\mathcal{U}_\infty$ とが同型であるという形で決定されている. そこでは, $\Delta$-decomposition した加群, すなわち $\Phi$ を $\mathbf{Q}_p$上の $\Delta$ の既約指標とすれば, そのベキ等元 $e_\Phi = \frac{1}{|\Delta|}\sum_{\delta\in\Delta}\Phi(\delta)\delta^{-1}$ は $\mathbf{Z}_p[\Delta]$ の元となるので, $\mathcal{O}_\chi[[T]]$-加群 $e_\Phi\mathcal{U}_\infty$ について考察している. ただし $\mathcal{O}_\chi$ は $\Phi$ の絶対既約成分 $\chi$ を 1 つ選び, $\mathbf{Z}_p$ 上 $\chi$ の像で生成される環である. 我々の場合, $K/\mathbf{Q}$ の拡大次数が $p$ と素であるとは仮定しないので上の方法は使えない.

（注 2） $F/\mathbf{Q}$ を $p$ で不分岐な, 有限次 Abel 拡大とし, $K := F(\mu_p)$ , $K_\infty := K(\mu_{p^\infty}) = \bigcup_{n\geq 0} K(\mu_{p^n})$ とおく. このとき Coleman [C1] により $\mathbf{Z}_p(1)$ の生成元のとり方のみに依存する canonical な完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_p(1)^g \longrightarrow \mathcal{U}_\infty \longrightarrow \mathcal{O}_F[[\mathrm{Gal}(k_\infty/F)]] \longrightarrow \mathbf{Z}_p(1)^g \longrightarrow 0$$

の存在が知られている ( cf. [C2] , [G]) . ここに $g := [\Delta : D]$ である.

## § 3 定理の証明の概略

考察の目標は $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ が $\Lambda[\Delta]$-加群として pseudo-cyclic であるということであったが, $\Lambda[\Delta]$-加群として pseudo-cyclic であるとはどのような形であるかについて述べよう. まず $\Lambda[\Delta]$-加群でなく単に $\Lambda$-加群として pseudo-cyclic であることを $\Lambda$-加群の構造定理により見通しのよいつぎの形に言い換えることができる.

一般に $M$ を 有限生成 torsion $\Lambda$-加群とする. このとき構造定理とはつぎの形に一意的に表わされることを意味する:

$$M \sim \bigoplus_{i=1}^{t} \Lambda/\wp_i^{e_i}. \tag{3}$$

ここに $\wp_i$, $1 \leq i \leq t$, は $\Lambda$ の高さ 1 の素イデアル. ところで $\Lambda$ の高さ 1 の素イデアル

は $p$ で生成される ideal $(p)$ であるかまたはdistinguished 既約多項式 $f(T)$ で生成される ideal $(f(T))$ のいずれか一方である.

また $\Lambda$ の高さ 1 の素イデアル$\wp \neq \wp'$ に対して

$$\Lambda/\wp\cdot\wp' \sim \Lambda/\wp\oplus\Lambda/\wp', \qquad \Lambda/\wp\oplus\Lambda/\wp' \sim \Lambda/\wp\cdot\wp'$$

となることは簡単に示せる. 従って $M$ を ( 3 ) の形としたとき

$M$ は pseudo-cyclic $\Lambda$-加群 $\iff$ すべての $i\neq j,\ 1\leq i,\ j\leq t,$ に対して $\wp_i\neq\wp_j$

が成り立つ. さらに $\Lambda$ の高さ 1 の素イデアル$\wp$ に対して, $\Lambda$ の $\wp$ による局所化 を $\Lambda_\wp$ で表わし, $M_\wp = M\otimes_\Lambda \Lambda_\wp$ と書くことにすれば, $\wp_i\neq\wp_j$ のとき $(\Lambda/{\wp_i}^{e_i})\otimes_\Lambda \Lambda_{\wp_j}=0$ であるから, 上の同値関係と合わせて

$M$ は pseudo-cyclic $\Lambda$-加群 $\iff$ すべての $1\leq i\leq t,$ に対して $M_{\wp_i}$ は cyclic $\Lambda_{\wp_i}$-加群

が得られる. そこで, $\Lambda[\Delta]$-加群としてもこれと同様の同値性が成り立つことがつぎのように表現できた:

**補題** $M$ は 有限生成 $\Lambda[\Delta]$-加群であり, $\Lambda$-加群としては ( 3 ) の形のものとする. $\mu(M):=\sum_{\wp_i=(p)} e_i=0$ を仮定すれば, つぎの 2 つは互いに同値である.

a) $M$ は pseudo-cyclic $\Lambda[\Delta]$-加群である.

b) すべての $1\leq i\leq t,$ に対して , $M_{\wp_i}$ は cyclic $\Lambda_{\wp_i}[\Delta]$-加群である.

そこでこの補題を $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ に適用する. $\zeta_p\notin K$ の場合は $\zeta_p\in K$ である場合に帰着できるので $\zeta_p\in K$ と仮定する. まず, 補題の条件が満たされることは 定理のあとで述べたことと完全系列 ( 1 ) より

$$\mu((\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+)\leq\mu(X^-)$$

が得られるが, Abel 体に付随する $\mu(X^-)=0$ は Ferrero-Washington [F-W] によって証明されている. したがって, 任意の $\Lambda$ の高さ 1 の素イデアル $\wp$ に対して, $((\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+)_\wp$ が cyclic $\Lambda_\wp[\Delta]$-加群であることを証明すればよい.

$\wp \neq (\dot{T}),\ (p)$ のときは 命題 2 により, $\Lambda_\wp[\Delta]$-加群として

$$(\mathcal{U}_\infty)_\wp \cong \Lambda_\wp[\Delta]$$

を得る. 最後に $\wp=(\dot{T})$ の場合を考える. まず $((\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+)_{(\dot{T})}$ の構造が $(X^-)_{(T)}$ に帰着できることを証明し, つぎに Greenberg [Gr1], Iwasawa [Iw2] 及び Sinnott [S] らの結果を用いて $(X^-)_{(T)}$ が cyclic $\Lambda_{(T)}[\Delta]$-加群であることを証明する.

## §追記

さて $K/\mathbf{Q}$ が一般の Galois 拡大の場合, そもそも土俵の異なる話題であるから稿を改めるべきであろう. よって, ここでは $(\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty)^+$ の pseudo-cyclic 性への道程の一里塚として得られたつぎの結果を挙げるに留めておこう.

$K/\mathbf{Q}$ を有限次 Galois 拡大とし, $\Delta := \mathrm{Gal}(k/\mathbf{Q})$ とおく. そこで $K/\mathbf{Q}$ の中の $p$ の分解群 $D$ の位数が $p$ と素であると仮定する. このとき円分 $\mathbf{Z}_p$-拡大 $K_\infty/K$ における semi-local units $\mathcal{U}_\infty$ も同様に $\Lambda[\Delta]$-加群であることが分かる.

つぎの命題を示した:

**命題 3**　上の条件の下で $\Lambda[\Delta]$-加群としての同型

$$\mathcal{U}_\infty \simeq \Lambda[\Delta] \bigoplus ((\Lambda/(\dot{T})) \otimes_{\mathbf{Z}_p[D]} \mathbf{Z}_p[\Delta])^r$$

が成り立つ. ただしここに $r$ は $\zeta_p \in K_v$ のとき 1 で, そうでないときは 0 とする.

# 参考文献

[C1] R.COLEMAN, Division values in local fields, *Invent.math.*53, 91-116 (1979)

[C2] R.COLEMAN, Local units modulo circular units, *Proc.Amer.Math.Soc.*89, 1-7 (1983)

[F-W] B.FERRERO AND WASHINGTON, The Iwasawa invariant $\mu_p$ vanishes for abelian number fields, *Ann.of Math.*109, 377-395 (1979)

[Gi] R.GILLARD, Unités cyclotomiques,unités semi-locales et $\mathbf{Z}_l$-extensions II, *Ann.Inst. Fourier, Grenoble*29, fasc.4 1-15 (1979)

[Gr1] R.GREENBERG, On a certain $l$-adic repesentation, *Invent.math.*21, 117-124 (1973)

[Gr2] R.GREENBERG, On Iwasawa invariants of totally real number fields, *Amer.J.Math.*98, 263-284 (1976)

[G] C.GREITHER, Class group of abelian fields, and the main conjecture, *Ann.Inst. Fourier, Grenoble*42, fasc.3 449-499 (1992)

[Iw1] K.IWASAWA, On some modules in the theory of the cyclotomic fields, *J.Math.Soc.Japan*16, 42-82 (1964)

[Iw2] K.IWASAWA, On $\mathbf{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, *Ann.of Math.*98, 246-326 (1973)

[S] W.SINNOTT, Appendix to L.J.Federer and B.H.Gross : Regulaters and Iwasawa modules, *Invent.math.*62, 443-457 (1981)

[T] T.TSUJI, On the pseudo-cyclicity of some Iwasawa modules associated to abelian fields, to appear in *J.Fac.Sci.Univ.Tokyo*

Department of Mathematical Sciences

University of Tokyo

3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153, Japan

E-mail ttsuji@ms.u-tokyo.ac.jp