数理解析研究所講究録
998 巻 1997 年 170-173

Drinfeld 加群の L- 函数について

田口 雄一郎 (都立大理)

$A=\mathbf{F}_q[t]$ とする。以下で扱ふ L- 函数は次の表の右側の列に見られるやうなものである：

	$\mathbf{Z}$	A
	Riemann zeta: $\zeta(s)=\sum_{n\in\mathbf{Z}_+}1/n^s$ $L(E,s)$ $L(H^i(X),s)$	Carlitz zeta: $\zeta(s)=\sum_{a\in A_+}1/a^s$ $L(\phi,s)$ $L(\mathcal{E}/X,s)$
解析接続	$\mathcal{O}$	○
函数等式	$\mathcal{O}$	?

ここに ϕ は $K=\mathbf{F}_q(t)$ の有限次拡大体上定義された Drinfeld 加群であり、代数体上定義された楕円曲線 E の類似物である。X は $\mathbf{Z}$ 上または A 上有限型の scheme, $\mathcal{E}$ は X/A 上の φ- 層 (§1 参照) である。左列の $\mathcal{O}$ は、少なからぬ場合に実際に証明されてをり、一般的な予想がきちんと定式化されてをりその成立を疑ふ人は (多分) ゐないが、一般には証明されてゐない ($\mathcal{OK}$ だが閉ぢたマルになつてゐない) ことを示す。右列の ○ は一般に証明されてをり (§3)、? の部分については予想すら未だ無い。以下では主に $L(\mathcal{E}/X,s)$ の解析接続について述べる (これは D. Wan 氏との共同研究である)。

1. 諸定義. X を $\mathbf{F}_q$-scheme とし、$\mathcal{A}$ を $\mathbf{F}_q$-algebra とする。以下 scheme や algebra は全て neotherian とする。

X 上の $\mathcal{A}$- 係数 φ- 層とは、組 $(\mathcal{E},\varphi)$ であつて、(i) $\mathcal{E}$ は有限型局所自由 $(\mathcal{O}_X\otimes\mathcal{A})$- 加群；(ii) $\varphi:\mathrm{Fr}_X^*\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ は $(\mathcal{O}_X\otimes\mathcal{A})$- 加群準同型、なるもののことである。ここに添字なしの $\otimes$ は全て $\mathbf{F}_q$ 上の tensor であり、また Fr_X は q- 乗 Frobenius 射：$\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X$ である。

π を $K=\mathbf{F}_q(t)$ の素点をする。X 上の π- 進 φ- 層 $(\mathcal{E},\varphi)$ とは、上の定義で $\mathcal{O}_X\otimes\mathcal{A}$ を $\mathcal{O}_X\hat{\otimes}K_\pi$ で置き替へたもののことである。ここに K_π は K の π- 進完備化、$\hat{\otimes}$ は $\otimes$ を取つた後 π- 進完備化したもの、を表す。

π- 進の場合と区別するために普通の φ- 層を特に代数的 φ- 層と呼ぶことがある。

X 上の $\mathcal{A}$- 係数 φ- 層 $(\mathcal{E},\varphi)$ に対し

$$L(\mathcal{E}/X,T)\ :=\ \prod_{x\in X_0}\det(1-T^{d(x)}\varphi_x^{d(x)}|\mathcal{E}_x)^{-1}\qquad\in\mathcal{A}[\![T]\!]$$

とおく。ここに X_0 は X の閉点の集合、$d(x)=\mathrm{degree}(x)=[\kappa(x):\mathbf{F}_q]$, $(\mathcal{E}_x,\varphi_x)$ は $(\mathcal{E},\varphi)$ の x での fiber である。この定義は $(\mathcal{E},\varphi)$ が π- 進 φ- 層のときもそのまま通用し、$L(\mathcal{E}/X,T)\in K_\pi[\![T]\!]$ となる。

π- 進 φ- 層 $(\mathcal{E},\varphi)$ が基本群 $\pi_1(X)$ の π- 進表現 V と対応するとき、

$$L(\mathcal{E}/X,T)\ =\ \prod_{x\in X_0}\det(1-T^{d(x)}\mathrm{Frob}_x|V)^{-1}$$

である。また $(\mathcal{E},\varphi)$ が自明な対象 $\mathbf{1}$ であるとき $L(\mathbf{1}/X,T)$ は X の Hasse-Weil zeta (mod p) と一致する。

この $L(\mathcal{E}/X,T)$ は local L と呼ばれる。その理由は次の global L の定義を見てもらへば納得されよう：∞ により K の "無限素点" $(1/t)$ を表す。X が A-scheme であるとき、X 上の ∞- 進 φ- 層 $(\mathcal{E},\varphi)$ に対し

$$L(\mathcal{E}/X,s) \ := \prod_{\mathbf{p}\in(\mathrm{Spec}A)_0} L(\mathcal{E}_{\mathbf{p}}/X_{\mathbf{p}},\mathbf{p}^{-s})^{-1}$$

と定義する (右辺は local L たちの積)。ここに $\mathcal{E}_{\mathbf{p}}/X_{\mathbf{p}}$ は $\mathcal{E}/X$ の $\mathbf{p}$ 上の fiber であるが、s や $\mathbf{p}^{-s}$ は説明を要する：$s=(x,y)$ は

$$\mathbf{S}_\infty \ := \ \mathbf{C}_\infty^\times \times \mathbf{Z}_p \qquad (\mathbf{C}_\infty := \mathbf{F}_q((1/t))\text{の代数的閉包の完備化})$$

の元であり、A の非零 ideal $\mathbf{a}=(a)$ (a は monic な多項式 $\in A$) に対し

$$\mathbf{a}^s \ := \ x^{-\deg(a)}\langle a\rangle^y,$$

ここに

$$\langle a\rangle \ := \ t^{-\deg(a)}a,$$

と定義する。$\langle a\rangle$ は $U_\infty^1 = 1+(1/t)\mathbf{F}_q[\![1/t]\!]$ の元であり、従つて y 乗 ($y\in\mathbf{Z}_p$) することが出来る。$\mathbf{S}_\infty$ は k のある "U_∞^1- 拡大" (と定数拡大の合成) の Galois 群の指標群の、ある部分と見做せる。

各 $y\in\mathbf{Z}_p$ を固定するごとに $L(\mathcal{E}/X,s)$ は

$$\sum_{n\geq 0} a_n(y)x^n$$

の形に展開できる。そこで $L(\mathcal{E}/X,s)$ を $y\in\mathbf{Z}_p$ により parametrize された冪級数の族と見做すことができる。

なほ、Drinfeld 加群の L- 函数についての諸々の事柄については [1] を参照されたい。

2. Drinfeld 加群との関係 について一言述べておかう。A-scheme X 上の Drinfeld 加群 $(\mathcal{L},\phi)$ とは、X 上の直線束 $\mathcal{L}$ と環準同型 $\phi: A\to \mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\mathcal{L})$ の組であつて適当な条件を満たすものの組のことである。これに対し

$$\mathcal{E} \ := \ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{F}_q}(\mathcal{L},\mathbf{G}_a)$$

とおく。ここに $\mathbf{G}_a$ は X 上の加法群、$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{F}_q}$ は X 上の Zariski 層 $U\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_q}(\mathcal{L}|_U,\mathbf{G}_a|_U)$ ($\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_q}$ は $\mathbf{F}_q$- 加群準同型のなす加群) である。$\mathcal{E}$ には ϕ を介して A が作用し (よつて $\mathcal{E}$ は $(\mathcal{O}_X\otimes A)$- 加群となり)、$\varphi := (\mathbf{G}_a$ 上の Frobenius $x\mapsto x^q$ から誘導される写像) とおくと、これは Frobenius linear である。$(\mathcal{L},\phi)$ の Drinfeld 加群としての rank が r ならば $\mathcal{E}$ は rank r の局所自由 $(\mathcal{O}_X\otimes A)$- 加群であることもわかる。よつて $(\mathcal{E},\varphi)$ は X 上の A- 係数 φ- 層となる。

$T_\pi(\phi)$ を $(\mathcal{L},\phi)$ の π- 進 Tate 加群とすると (π が $\mathrm{Im}(X\to\mathrm{Spec}A)$ 上 generic に可逆ならば) $L(\mathcal{E}/X,s)$ と $L(T_\pi(\phi)/X,s)$ とは (有限個の factors を除き) 一致する。

3. 結果：Meromorphy. まづ local L について：

定理 1. ([2]) X 上の $\mathcal{A}$- 係数 φ- 層 $(\mathcal{E},\varphi)$ に対し、その local L- 函数 $L(\mathcal{E}/X,T)$ は T の $\mathcal{A}$- 係数有理函数である。

π- 進の場合を定式化するために K_π の代数閉包の π- 進完備化を $\mathbf{C}_\pi$ と書く。冪級数 $f(T) \in \mathbf{C}_\pi[\![T]\!]$ が entire とはそれが全ての点 $\in \mathbf{C}_\pi$ に於いて収束すること、また、meromorphic とは f = (entire)/(entire) の形であること、と定義する。

定理 2. ([2]) $(\mathcal{E},\varphi)$ が X 上の overconvergent π- 進 φ- 層ならばその local L- 函数 $L(\mathcal{E}/X,T)$ は meromorphic である。

ここで overconvergent とは、φ を (X 上 local に)

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbf{N}^d} a_n x^n, \qquad a_n \in \mathrm{M}_r(K_\pi),$$

(ここに $x = (x_1,\cdots,x_d)$ は $\mathbf{F}_q$- 代数 $\mathcal{O}_X$ の局所生成系、また r = rank $\mathcal{E}$) と行列表示したとき、a_n の成分が十分速く小さくなる (as $|n| \to \infty$) といふことである。

これらの証明は基本的に Dwork trace formula (cf. [4])：

$$L(\mathcal{E}/X,T) \;\approx\; \prod \det(1 - T\cdot \mathrm{Frobenius}|\ \mathcal{E} \text{ の } W(\mathbf{F}_q)\text{上への持ち上げ})^{\pm}.$$

による。この det は (∞- 次元空間上の) Fredholm 行列式である。

さらに X が純 d- 次元の affine 完全交叉ならば $L(\mathcal{E}/X,T)^{(-1)^{d-1}}$ は多項式 ($(\mathcal{E},\varphi)$ が代数的の場合) または entire ($(\mathcal{E},\varphi)$ が overconvergent π-adic の場合) である ([3])。これは Koszul 複体を使つて証明される。この現象は次の prototype により納得される：$\mathbf{F}_q$ 上の代数曲線の Hasse-Weil zeta は $P(T)/(1-T)(1-qT)$ の形であるが、一点を抜くことにより $(1-T)$ が消え、mod p することにより $(1-qT)$ が消える。

Global L についての結果を述べるために次の定義をおく：函数 $f : \mathbf{S}_\infty \to \mathbf{C}_\infty \cup \{\infty\}$ が entire とは

1. 各 $y \in \mathbf{Z}_p$ に対し $f(s) = f(x,y)$ は
$$f(x,y) \;=\; \sum_{n\geq 0} f_n(y)x^n \qquad \in\; \mathbf{C}_\infty[\![x]\!]$$
と表示され、この冪級数は全ての $x \in \mathbf{C}_\infty$ で収束する；

2. 上の展開は冪級数の族 (parametrized by $y \in \mathbf{Z}_p$) として強い意味で連続 (i.e. $f = \sum f_n x^n$ と実数 r に対し $||f||_r := \sup_n |f_n| q^{rn}$ とおくとき、写像 $y \mapsto \sum f_n(y)x^n$ は、全ての $r \in \mathbf{R}$ に対し、この norm $||\cdot||_r$ に関して連続)。

また、f が meromorphic とは f = (entire)/(entire) の形であることである。

定理 3.([2], [3]) X が A-scheme, $(\mathcal{E},\varphi)$ が X 上の overconvergent ∞- 進 φ- 層であるとき、その global L- 函数 $L(\mathcal{E}/X,s)$ は meromorphic である。また X が純 d- 次元の affine 完全交叉ならば $L(\mathcal{E}/X,s)^{(-1)^{d-1}}$ は entire である。

証明の要点は

1. $L(\mathcal{E}/X,s) = L(\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}(y),x)$ と解釈できること (ここに $\mathcal{L}(y)$ は Spec$A$ 上の "函数" $\lambda \mapsto (1-\lambda/t)^{-y}$ により定義される rank 1 の overconvergent ∞- 進 φ- 層);

2. $(\mathcal{E},\varphi)$ がある径数に従つて "一様に" 変化するとき (e.g. $\mathcal{L}(y)$ でひねつた時など)、その Fredholm 行列式も "一様に" 変化すること。

4. 函数等式について. 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数曲線の (普通の) Hasse-Weil zeta 函数は $Z_C(T) = P(T)/(1-T)(1-qT)$ の形であり、$T \leftrightarrow 1/qT$ に関して函数等式を持つ。ところで $\zeta(s) = \zeta(x,y)$ を $\mathbf{F}_q[t]$ の Carlitz zeta とすると

$$\frac{1}{1-x}\cdot\zeta(x,0) \;=\; Z_{\mathbf{P}^1}(x) \;(\mathrm{mod}\; p) \;=\; \frac{1}{1-x}$$

であるから、$\zeta(s)$ は、このままでは、よい函数等式を持つとは考へにくい。そこで $\zeta(s)$ を標数 0 に持ち上げることを考へる。具体的には $s=(x,y)$ の x を単に変数と思ひ、$\mathbf{a}^{-s} = x^{\deg(a)}\langle a\rangle^{-y}$ の $\langle a\rangle$ を Teichmüller 持ち上げを使つて Witt 環 $W(\mathbf{C}_\infty)$ に持ち上げる。かうして定義した $\zeta(s)$ に岩澤-Tate の方法を適用する。$\mathbf{F}_q(t)$ の idele 類群 I は pro-p 的なものだから、$\zeta(s)$ が値を取る体として ξ-adic (ここに $\xi = (1/t, 0, 0, \cdots) \in W(\mathbf{C}_\infty)$) な位相を持つ標数 0 の完備体を考へると、"Haar 測度" による積分や Fourier 解析ができる。$\zeta(s)$ に適当な Γ- 因子をかけたものは

$$\int_I \Phi(z)\omega_s(z)d\mu(z)$$

(ここに Φ は適当な "特性函数"、ω_s は

$$\omega_s(z) \;=\; x^{\sum_v \deg(v)\mathrm{ord}_v(z_v)}\left(\frac{\prod_{v\neq\infty}\langle v\rangle^{\mathrm{ord}_v(z_v)}}{\langle z_\infty\rangle}\right)^{-y}$$

で定義される指標である)、と表示でき、

$$(x,y) \;\leftrightarrow\; (1/qx, -y)$$

に関し函数等式を持つ。ところが $\Gamma(s)$ を (i.e. $\Phi_\infty(z_\infty)$ を) あまり naive に定義すると (e.g. $\Gamma(s) = \frac{q-1}{1-x}\int_{U^1_\infty}[z]^y d\mu(z)$), $\Gamma(s) = 0$ unless $y=0$ となり、何も新しい結果は出ない。よい Φ_∞ を取つて Thakur や Goss の Γ が現れるやうにできないか?

文献

[1] D. Goss, L-series of t-motives and Drinfeld modules, in: The Arithmetic of Function Fields, D. Goss, D.R. Hayes and M.I. Rosen (eds.), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992, 313-402

[2] Y. Taguchi and D. Wan, L-functions of φ-sheaves and Drinfeld modules, J. AMS **9**(1996), 755–781

[3] Y. Taguchi and D. Wan, Entireness of L-functions of φ-sheaves on affine complete intersections, to appear in: J. Number Theory

[4] D. Wan, Meromorphic continuation of L-functions of p-adic representations, Ann. of Math. **143**(1996), 469–498