

## 非可換環の Hasse zeta 関数

東京工業大学 理学部 修士課程

深谷 太香子 (Takako Fukaya)

整数環上有限生成な、可換とは限らない環の Hasse zeta 関数を、可換環の場合の一般化として定義する事ができた。そのゼータ関数の性質、ゼータ関数の収束性と環の Gelfand-Kirillov 次元との関係について、わかった事や予想、などをここに書かせて頂く。

いろいろな点で、加藤 和也先生の御指導をいただいた。また、「非可換環のゼータ関数を考えてみたら」とおすすめて下さったのは黒川 信重先生である。先生方に感謝を申し上げたい。

### §1. ゼータ関数の定義

可換環の場合は、

$A$  が  $\mathbb{Z}$  上有限生成な可換環

である時、 $A$  の Hasse zeta 関数  $\zeta_A(s)$  は次の様に定義された。

$$\zeta_A(s) = \prod_{m: A \text{ の 極大イデアル}} (1 - N(m)^{-s})^{-1}$$

ここで、 $N(m) = \#(A/m)$  ( $A/m$  の位数) である。

ここには次の 1 対 1 対応があった。

$$\begin{array}{ccc} \{ A \text{ の 極大イデアル} \} & \xleftrightarrow{1 \text{ 対 } 1} & \{ A \text{ の 単純加群の同型類} \} \\ m & \longleftrightarrow & A/m \text{ の 類} \end{array}$$

そこで

$A$  を  $\mathbb{Z}$  上有限生成な可換とは限らない環

とする時、 $A$  の Hasse zeta 関数  $\zeta_A(s)$  を次の様に定義する。

$$\zeta_A(s) = \prod_M (1 - N(M)^{-s})^{-1},$$

ここで、 $M$  は  $A$  の有限な単純加群の同型類全体を走り、

$N(M) = \# \text{End}_A(M)$  ( $M$  の  $A$  加群としての自己準同型全体  
なす環、または有限体の位数) である。

定義の形より、 $\zeta_A(s)$  の収束の問題が気に掛かるが、 $\zeta_A(s)$  の  
収束を次の様に定義する。

$$\zeta_A(s) \text{ が 収束} \stackrel{\text{def.}}{\iff} \zeta_A(s) \text{ が } \text{Re}(s) \text{ が 十分大で 絶対収束}$$

$$\zeta_A(s) \text{ が 発散} \stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{それ以外}$$

## §2.ゼータ関数の収束性と環の Gelfand-Kirillov 次元

先の定義に於いて  $\zeta_A(s)$  は多くのよく知られた環  $A$  に対し収束するが発散する事もある。どの様な環  $A$  について  $\zeta_A(s)$  が収束するか、は難しい問題である。これについて考える。

### 1° 可換の場合

$A$  が可換である時、 $\zeta_A(s)$  の絶対収束域は、

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(s) > \dim(A) = \max \{ n; \rho_0 \subseteq \rho_1 \subseteq \dots \subseteq \rho_n \\ \text{(Krull 次元)} \end{aligned} \right\} \quad \rho_i : A \text{ の素イデアル } (1 \leq i \leq n)$$

と  $A$  の Krull 次元と関っていた。

一般に  $A$  が可換とは限らない場合にもこの様な環の次元が存在するかと考えてみたくなるが、 $\zeta_A(s)$  の収束性と  $A$  の Gelfand-Kirillov 次元との間に、ある関係が予想される。

### 2° Gelfand-Kirillov 次元の定義

Gelfand-Kirillov 次元は通常体上の algebra に対し定義される。

$k$  を体、 $A$  を  $k$  上有限生成な algebra

$S$  を  $A$  の  $k$  上の生成元からなる有限集合 (1つ固定)

とする時、 $A$  の Gelfand-Kirillov 次元  $\operatorname{GKdim}(A) \in \{ t \in \mathbb{R}; t \geq 0 \} \cup \{ \pm \infty \}$  が次の様に定義される。

$$\text{GKdim}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \dim_{\mathbb{Z}}(V_n(S))}{\log n} \quad (\text{これは生成系 } S \text{ の取り方に依らない。})$$

ここに  $V_n(S) = \sum_{j=0}^n R S^j$ ,  $S^j = \{x_1 \cdots x_j; x_1, \dots, x_j \in S\}$  である。

更に、 $A$  が可換である時

$$\text{GKdim}(A) = \dim(A)$$

がいえ。この定義を環上の algebra に拡張する。本稿では

$R$  は  $\mathbb{Z}$  上有限生成可換環、とさせて置く。

$A$  が有限生成  $R$ -algebra

である時

$$\text{GKdim}(A; R) = \sup \{ \text{GKdim}(A \otimes_R K(\mathfrak{p})) + \dim(R/\mathfrak{p}); \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \}$$

と定義する。ここに  $K(\mathfrak{p})$  は  $\mathfrak{p}$  の剰余体である。この上で

$A$  が  $\mathbb{Z}$  上有限生成環

である時、 $A$  の Gelfand-Kirillov 次元  $\text{GKdim}(A) \in \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\} \cup \{\pm\infty\}$  を

$$\text{GKdim}(A) = \text{GKdim}(A; \mathbb{Z})$$

と定義する。 $A$  が可換である時再び

$$\text{GKdim}(A) = \dim(A)$$

が成立する。

3° Gromovの結果とそこから導かれる事

Gelfand-Kirillov 次元について Gromov が次の事を得ている。

([Gr])

定理 (Gromov)  $G$  を有限生成群,  $R$  を体とする時次が成立する。

$$GKdim(R[G]) < \infty \iff G: \text{almost nilpotent} \quad \square$$

( $G: \text{almost nilpotent} \stackrel{\text{def}}{\iff} G$  が指数有限中零部分群をもつ。)

これより、 $R \neq 0$  ならば次の事も成り立つ。

$$GKdim(R[G]) < \infty \iff G: \text{almost nilpotent}$$

これは Gelfand-Kirillov 次元の計算法について行われている様々な研究により得られる。

定理 1  $H$  を有限 rank  $n$  の自由アーベル群、 $G$  を次の完全系列をもつ群とする。

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1,$$

$R \neq 0$ ,  $A = R[G]$  とする時次が成立する。

$$\{A(s)\} \text{ が収束} \iff G: \text{almost nilpotent}. \quad \square$$

定理 1 の  $A$  について  $G$  が almost nilpotent でない時の様に、 $\{A(s)\}$  が発散する環が実際に存在する。また Gromov の結果と定理 1 より

系  $A$  を定理 1 の通りとする。この時次が成立する。

$$\{A(s)\} \text{ が収束} \iff GKdim(A) < \infty. \quad \square$$

が得られる。

注  $\{A(s)\}$  の収束性との関係では“Krull 次元”はうまくはたらかない。(ここでいう“Krull 次元”は非可換環の“素イデアル”を用いて定義される非可換環の Krull 次元である。)

例えば  $A$  を定理 1 の通りとすると、常に

$$\text{Krull dim}(A) = \text{dim}(R) + n + 1$$

が成立し、その値は  $\zeta_A(s)$  の収束、発散に依らない。

#### 4° modified zeta 関数

これまでみてきた様に  $\zeta_A(s)$  の収束性と  $\text{GKdim}(A)$  の有限性 ( $-\infty$  も含む) の間には強い関りが予想されるが、加藤先生が次の例をお教え下さった。

例 (加藤先生)  $k$  を有限体。

$$A = k\langle X, Y, U, V \rangle / \langle XY-1, UV-1, YX+VU-1 \rangle \text{ とする。}$$

ここで  $k\langle \quad \rangle$  は非可換多項式環、 $\langle \quad \rangle$  はその中の元の生成する両側イデアルをあらわす。この時次が成り立つ。

(1)  $\zeta_A(s) = 1$  ( $\zeta_A(s)$  は収束する)。

(2)  $\text{GKdim}(A) = +\infty$  .

そこで次の modified zeta 関数  $\zeta_A^*(s)$  を定義し、考察する。

定義 
$$\zeta_A^*(s) = \prod_M (1 - N(M)^{-s})^{-1}.$$

ここで、 $M$  は  $A$  の  $\# \text{End}_A(M) < \infty$  なる単純加群の同型類全体を走り、 $N(M) = \# \text{End}_A(M)$  である。

注  $M$  自身は有限とは限らない。

よく知られた環の中に  $\zeta_A(s) = \zeta_A^*(s)$  が成立するものも多々ある。

加藤先生の例の環  $A$  に対しては、

(3)  $\zeta_A^*(s)$  は発散する。

これより収束性と Gelfand-Kirillov 次元との関係については、  
modified zeta 関数の方を考察する。改めて次の事が予想される。

予想  $\zeta_A^*(s)$  が収束  $\iff \text{GKdim}(A) < \infty$

注 定理1の  $A$  に対し

$$\zeta_A(s) = \zeta_A^*(s)$$

が成立する。これは Rosenblade の次の定理による。(R0)

定理 (Rosenblade)  $G$  を有限生成群で指数有限可解部分群  
をもつものとし、 $A = R[G]$  とする。この時、 $A$  の単純加群  
はすべて有限である。  $\square$

この事から定理1の環  $A$  についても予想が正しい事がわかる。

## 5° 結果

定理2  $G$  を有限生成 almost nilpotent 群、 $A = R[G]$  とする。

この時

$\zeta_A^*(s) (= \zeta_A(s))$  は収束する。  $\square$

定理3  $G$  を有限生成中零群で次の中心列をもつものとする。

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\}, \quad G_i/G_{i+1} \simeq \mathbb{Z} \quad (0 \leq i \leq r-1).$$

更に  $A = R[G]$  とする。この時次が成立する。

$$\{^*_A(s) (= \{^*_A(s)) = \{^*_{R'}(s).$$

ここに  $R' = R[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_r, x_r^{-1}]$  (通常の可換な Laurent 多項式環) である。  $\square$

注 定理2, 3の  $\{^*_A(s) = \{^*_A(s)$  は前述の Rosenblade の定理により同様に導かれる。

注 定理2は定理3と次の命題より得られる。

命題  $G$  を定理2の通りとすると、 $G$  は指数有限正規部分群  $H$  で定理3の群  $G$  の条件を満たすものをもつ。  $\square$

命題  $G$  を有限生成群、 $H$  を  $G$  の指数有限正規部分群とする時、次が成立する。

$$\{^*_{R[H]}(s) \text{ が収束} \quad \Leftrightarrow \quad \{^*_{R[G]}(s) \text{ が収束}.$$
  $\square$

定理2と Gromov の結果より次が得られる。

系  $G$  を有限生成群、 $A = R[G]$  とする。この時次が成立する。

$$GKdim(A) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \{^*_A(s) \text{ が収束}.$$
  $\square$

6°  $\{$  次元

定義  $A$  を  $\mathbb{Z}$  上有限生成環とする時、 $A$  の  $\{$  次元、



$\{ \dim(A) \in \{ t \in \mathbb{R}; t \geq 0 \} \cup \{ \pm \infty \} \}$  を次の様に定義する。

$$\{ \dim(A) = \inf \{ d \in \mathbb{R}; \{ A^*(s) \text{ は } \operatorname{Re}(s) > d \text{ で収束} \} \}$$

$A$  が可換である時、

$$\{ \dim(A) = \dim(A) \}$$

であった。  $A$  が可換とは限らない時には  $\{ \dim(A) \}$  はどう表されるのであろうか。これまで考察してきた  $\{ \operatorname{GKdim}(A) \}$  については実は  $\{ \dim(A) = \operatorname{GKdim}(A) \}$  は必ずしも成立しないのである。

例  $G$  を有限生成可換群とし、  $G^{(0)} = G$ ,  $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G]$  ( $i \geq 0$ ) とする時、 Bass [Ba] の定理により次が成立する。

$$\operatorname{GKdim}(R[G]) = \dim(R) + \sum_{i \geq 0} (i+1) \operatorname{rank}(G^{(i)}/G^{(i+1)}).$$

ここで  $G$  として定理 3 の  $G$  をとると定理 3 より

$$\{ \dim(R[G]) = \dim(R) + \sum_{i \geq 0} \operatorname{rank}(G^{(i)}/G^{(i+1)}) \}$$

である。よって  $\operatorname{GKdim}(R[G]) \geq \{ \dim(R[G]) \}$  であり、等号が  $G$  によっては成立しない事がある。

特にこれまでの例より次が予想される。

予想  $A$  を有限生成  $R$ -algebra とする時

$$\{ \dim(A) \leq \operatorname{GKdim}(A; R) \}.$$

### §3. リー環の包絡環のゼータ関数.

リー環の包絡環のゼータ関数について次の事を得た。

定理4  $\mathfrak{g}$  を  $R$  上の可解リー環で  $R$ -加群として自由で有限 rank  $n$  をもつものとし、 $A$  を  $\mathfrak{g}$  の包絡環とする。この時

$$\zeta_A(s) = \zeta_R(s-n).$$

$\mathfrak{g}$  が可解ではない時、 $\mathfrak{g}$  の包絡環  $U(\mathfrak{g})$  のゼータ関数は必ずしも定理4の様な簡明な形には表されない。

例  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ ,  $A = U(\mathfrak{g})$  とする時.

$$\zeta_A(s) = \zeta(s-3) \prod_{p \text{ 奇素数}} \left( (1-p^{-(s-1)})^{\frac{p-1}{2}} \cdot (1-p^{-s})^{-\frac{p-1}{2}} \right).$$

ゼータ関数の計算は、後でもう少し詳しく述べるが、それぞれの素数  $p$  に対し標数  $p$  の閉体上の環の既約表現の分類により行方。  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$  については、1967年の Rudakov-Shafarevich の結果を用い求めた。([R-S])

注 例の  $\zeta_A(s)$  は  $\operatorname{Re}(s) = 2$  に自然境界をもち、全複素平面に解析接続しない事を黒川先生が示して下さった。この例がこれまで計算をした中では唯一の、可換環のゼータ関数とは全く別の姿をしたゼータ関数である。

#### ④. 定理3の証明の方針

①ゼータ関数についての一般論として次が成立する。

$$\zeta_A(s) = \prod_{r \geq 1} \zeta_{A,r}(s)$$

$$\zeta_{A,r}(s) = \prod_{p: \text{素数}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#\Gamma_{A,r}(\mathbb{F}_p^n)}{n} (p^{-s})^n\right)$$

: スキーム  $\Gamma_{A,r}$  の Hasse-Weil zeta 関数.

こゝに、 $\Gamma_{A,r}$  は "Aのr次元既約表現の空間" と呼ばれる  $\mathbb{Z}$  上有限型スキームであり、定義は省略するが、 $K = \overline{\mathbb{F}_p}$  (代数閉包) に対し

$\Gamma_{A,r}(K)$ : AのK上のr次元既約表現の同型類全体の集合.

$\Gamma_{A,r}(\mathbb{F}_p)$ :  $\Gamma_{A,r}(K)$  の  $\text{Gal}(K/\mathbb{F}_p)$  固定点.

となる。

注 先の収束性についての問題についてであるが、各  $\zeta_{A,r}(s)$  は、 $\mathbb{Z}$  上有限型のスキームの Hasse-Weil zeta関数なので  $\text{Re}(s)$  が十分大で絶対収束する。すべてかけ合わせた  $\zeta_A(s)$  について収束性が不明という事をいっているのであった。

② A を定理3の通りとする。この時次の式が成立する。

$$\zeta_A(s) = \prod_{R: \text{極大イデアル}} \zeta_{A, R}(s).$$

従って  $R = \mathfrak{k}$ : 有限体と仮定していい。  $\Gamma_A = \prod_{r \geq 1} \Gamma_{A,r}$  とし、 $\mathfrak{k}$  の拡大体  $\mathfrak{k}'$  に対し  $\Gamma_A^{\mathfrak{k}'}(\mathfrak{k}')$  を  $\Gamma_A$  の  $\mathfrak{k}$ -スキームとしての  $\mathfrak{k}'$ -有理点とする。

$K$  を  $\mathfrak{k}$  の代数閉体とし、 $\mathfrak{k} \subset \mathbb{F}_q \subset K$  に対し、

$$\#\Gamma_A^{\mathfrak{k}'}(\mathbb{F}_q) = \#\{x \in \Gamma_A^{\mathfrak{k}'}(K); F_{\mathbb{F}_q}(x) = x\} = (q-1)^r \quad (F_{\mathbb{F}_q} \text{ は Frobenius})$$

を示せば十分。

③命題  $G$  を定理3の通りとし、 $\theta: G \rightarrow G$  を次の条件(i)(ii)を満たす  $G$  の自己同型とする。

$$(i) \theta(G_i) = G_i \quad (0 \leq i \leq r)$$

$$(ii) \theta: G_i/G_{i+1} \rightarrow G_i/G_{i+1} \text{ と induce させるものは恒等射 } (0 \leq i \leq r-1)$$

$$\text{この時 } \#\{x \in G_A^{\mathbb{R}}(K); \text{Frg}(x) = \theta(x)\} = (q-1)^r \quad (\theta=1 \text{ ではない}) \quad \square$$

恒等射は明らかに条件(i)(ii)を満たすので、命題より定理3は導かれる。よって命題を  $r$  についての帰納法で示す。

④  $B = \mathbb{R}[G_i]$  とする。  $1 \rightarrow G_i \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$  (完全) なる  $\alpha$  を  $1$  つ固定し、 $f: B \rightarrow B$  自己同型を、 $f(b) = \alpha b \alpha^{-1}$  ( $b \in B$ ) と定義する。

この時

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{A}^{\mathbb{R}}(K) & \xrightarrow{\pi} & f \backslash \sqrt{B}^{\mathbb{R}}(K) \\ & & \uparrow \text{自然} \\ & & \sqrt{B}^{\mathbb{R}}(K) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{という全射 } \pi \text{ が存在する。} \\ (f \backslash \sqrt{B}^{\mathbb{R}}(K) \text{ は } \sqrt{B}^{\mathbb{R}}(K) \text{ を } f \text{ の作用が} \\ \text{わたったもの。)} \end{array}$$

注  $A$  が可換である時、上の図式は  $\sqrt{A}^{\mathbb{R}}(K) \xrightarrow{\pi} \sqrt{B}^{\mathbb{R}}(K)$  になるが、非可換の場合は  $f$  の作用がわたった所と関係する。

実は  $\sqrt{A}^{\mathbb{R}}(K)$  は  $f \backslash \sqrt{B}^{\mathbb{R}}(K)$  上の  $K^\times (= K-1$  の乗法群) - 主等価空間である。

$$\text{つまり、} \cdot K^\times \text{ が } \sqrt{A}^{\mathbb{R}}(K) \text{ に作用し、} \pi(ax) = a\pi(x) \quad (a \in K^\times, x \in \sqrt{A}^{\mathbb{R}}(K)).$$

$$\cdot x, x' \in \sqrt{A}^{\mathbb{R}}(K), \pi(x) = \pi(x') \text{ に対し、} a \in K^\times \text{ が一意に存在し } ax = x'.$$

よって、 $z \in f \setminus \sqrt{0}^*(K)$ ,  $\text{Fr}_q(z) = \theta(z)$  と、 $x_0 \in \sqrt{0}^*(K)$ ,  $\pi(x_0) = z$  に  
対し

$$\begin{aligned} \#\{x \in \sqrt{0}^*(K); \text{Fr}_q(x) = \theta(x), \pi(x) = z\} &= \#\{a \in K^X; \text{Fr}_q(ax_0) = \theta(ax_0)\} \\ &= \#\{a \in K^X; a^{q-1} \text{Fr}_q(x_0) = \theta(x_0)\} \stackrel{\uparrow}{=} \#\{a \in K^X; a = a^{q-1}\} = q-1 \dots (*) \end{aligned}$$

$\& \text{Fr}_q(x_0) = \theta(x_0)$  なる一意的な  $a \in K^X$  をとる。

$r$  についての帰納法の仮定より、 $\#\{y \in \sqrt{0}^*(K); \text{Fr}_q(y) = \theta^i(y)\} = (q-1)^{r-1}$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ).

( $f$  は命題の条件 (i)(iii) を満たす事より上式は従う.)

$$\Rightarrow \#\{z \in f \setminus \sqrt{0}^*(K); \text{Fr}_q(z) = \theta(z)\} = (q-1)^{r-1}$$

$$\Rightarrow \#\{x \in \sqrt{0}^*(K); \text{Fr}_q(x) = \theta(x)\} = (q-1)^r.$$

(\*) により.

よって命題が示され、従って定理3が示された。

## §5. 補足

非可換環の Hasse zeta 関数について、やはりわからない事が  
たくさんある。本稿で述べさせて頂いた事に関しては、例え  
ば、 $\{$ 次元は可換の場合と同様一般に整数値のみをとるのか  
(今までの計算例ではすべて整数値をとる)という事がある。因  
みに Gelfand-Kirillov 次元については2以上の任意の実数値を  
Gelfand-Kirillov 次元としてもつ環が存在する事が知られている。  
また  $\{$ 次元の純代数的定義は何か、あるのかという事もある。

§4で述べた  $\zeta_{A,r}(s)$  は  $r$  毎に不規則に異り、また各  $r$  が非常に複雑な姿をしているにもかかわらず、全部乗じた  $\zeta_A(s)$  はとても簡明な形をしている環がある。この様にゼータ関数には、不思議な事、わからない事が多くある様である。

### 参考文献

- [Ba] H. Bass, The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. 25 (1972).
- [Gr] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, Publ. I.H.E.S. 53 (1993).
- [Ro] J. E. Rosenblate, Group rings of polycyclic groups, J. Pure. Appl. Alg. 3 (1993).
- [R-S] A. N. Rudakov, I. R. Shafarevich, Irreducible representations of a simple three dimensional Lie algebra over a field of finite characteristic, Math. Notes 2 (1967).
- [Ku] N. Kurokawa, Special values of Selberg zeta functions, Contemp. Math. 83 (1989). この論文の圏のゼータ関数の定義が本稿の非可換環のゼータ関数の定義を示唆するものである。