数理解析研究所講究録
998巻 1997年 1-19

モデュラー多様体と岩沢理論

藤原　一宏

名古屋大学数学教室

お話の始まり

A. Wiles による革命的な仕事 [W] によって (Taylor-Wiles によるヘッケ環の完全交差性[TW] と併せて) $\mathbf{Q}$ 上の準安定楕円曲線に対する谷山-志村 予想が肯定的に解かれた. まさに数論の研究者にとって夢のような時代になったといってもいい. その議論の本質的な部分はヘッケ環がガロア表現の普遍変形環であることを示すことにあり, 数論のより一般的な枠組みのなかで L 関数の特殊値とセルマー群との間の関係を与える事に帰着される. 岩沢理論との関係が深い.

その後 Faltings が可換環論を用いた証明の単純化を発見したが[TW, appendix], その議論の中ではモデュラー曲線の一次元コホモロジーがヘッケ環上自由であることが本質的に使われていた. この論説では [TW] の議論を可換環論を使って完全に公理化した [F] の Taylor-Wiles 系の理論を紹介する. この際, 上述の自由性は不要である (F. Diamond も $\mathbf{Q}$ のときに同様の注意をしている). この概念は Euler 系と比較されるべきものであるが, 期待としてはモデュラー多様体を作る簡約可能代数群が与えられたときに常に Taylor-Wiles 系が生じると考えられ, この点において Euler 系よりもより作りやすいものであると思われる. 将来はこの二つの概念が統合されるのだろうが (強い局所条件を満たすコホモロジー類を構成することが本質的であるという点で双方とも同一の原理に基づいている), そのときには現代の数論の最も強力な手段の一つになるであろう.

現在楕円モデュラー曲線の時以外に志村曲線に対し系が構成されており, 総実代数体の数論に様々な応用が存在する. 一例として楕円曲線への応用をあげる.

§1. モヂュラー多様体の数論

この論説中ではモヂュラー多様体とは以下のものを意味することにする．G を $\mathbf{Q}$ 上の簡約可能代数群とし，$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\infty\times\mathbf{A}_\infty$, $\mathbf{A}^\infty=\hat{\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}_\infty=\mathbf{R}$ を $\mathbf{Q}$ のアデール環とする．$X=G(\mathbf{R})/K_\infty$ を対応する対称空間とする．普通志村多様体を考えるときには X にエルミート対称空間の構造が入ることや G が $\mathbf{Q}$ 上定義されたコンパクト因子を持たないことを仮定するが，ここではその仮定は置かないこととする．

$K\subset G(\mathbf{A}^\infty)$ をコンパクト開部分群とするとき，

$$M_K=G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K\times K_\infty$$

をモヂュラー多様体ということにする．例 F: 総実代数体, D を F 上の有限素点で不分岐な四元数環とし $G=D^\times$ をその単数群とする．$g=[F:\mathbf{Q}]$, $I_F=\{\iota;F\hookrightarrow\mathbf{R}\}$, $I_D=\{\iota\in I_F,\ D\otimes_\iota\mathbf{R}\simeq M_2(\mathbf{R})$ とし，$\sharp I_D\leq 1$ とする．このとき相互律により $\sharp D_F\equiv g \bmod 2$ となる．$X=\mathcal{H}_\pm^{\sharp I_D}$ $(\mathcal{H}=\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}\setminus\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}})$ に $G(\mathbf{R})=\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^{\sharp I_D}\times(\mathbf{H}^\times)^{\sharp I_F\setminus I_D}$ が自然に推移的に作用する．

この場合のモヂュラー多様体

$$S_K=G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}^\infty)\times X/K$$

は gが偶数なら 0 次元の有限個の点からなり (この場合は Deligne の意味での志村多様体にはならない), gが奇数なら複素曲線（志村曲線と呼ばれる）を定義する．志村曲線に対しては canonical model の理論によってそれが F上標準的に定義されることが知られている．

一般の G に対してはコホモロジー $H^i(M_K,\mathbf{Q})$ の分解をわかりやすい形で述べることは難しいが（Arthur conjecture との関わりが深い）上記の例では実表現論の標準的方法によって以下のように分解する．g を奇数とする．$H^0(S_K,\mathbf{C})$、$H^2(S_K,\mathbf{C})$ は容易であり, $D^\times$の $\det: D^\times\to F^\times$ を経由する表現で記述される (連結成分 $\pi_0(S_K)$ がイデール群で記述される).

$$H^1(S_K,\mathbf{C})=\oplus_\pi V_\pi^\vee\otimes(\pi^\infty)K$$

（ここで$\pi=\pi^\infty\otimes\pi_\infty$ は $\mathrm{GL}_{2,F}$ の尖点表現であり, F の無限素点 vに対し $\pi_v=D_2$ を満たすものを走る）となる．V_π は $\mathbf{C}$ 上 2 次元である．

ここで素数 p を固定し, p 進表現の構成を復習しておく．$\mathbf{C}\simeq\bar{\mathbf{Q}}_p$という体同型をとるとコホモロジーの比較定理から

$$H^1_{et}(S_K,\bar{\mathbf{Q}}_p)=\oplus_\pi V_\pi\otimes(\pi^\infty)^K$$

というエタールコホモロジー群の分解を得る．ここで $S=\varprojlim_K S_K$ が F 上定義されており[S1], 従ってアデール群 $D^\times(\mathbf{A}^\infty)\simeq\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_F^\infty)$ の作用（ヘッケ対応のことである）も F上定義されていることを使うと V_π には ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が作用し, 二次元のガロア表現 ρ_π が生じることになる．ここで合同関係式を使うとρ_πへのフロベニウス元Fr_vの固有値とπ_vの佐竹パラメーター (α_v,β_v) とが本質的に一致することが分かる．

注意.

a) 現在は合同関係式の方法には致命的な弱点があるため p 進表現の構成にはレフシェッツ及びセルバーグ跡公式を使うのが一般的であるが, 志村曲線の場合ではそれがモデュライ

空間とみなせないため有限体上の点の数が単純には計算できない. 跡公式の手法を直接使うのは興味深い問題であると思う.(具体的な応用も存在する.)

b) gが偶数の時に p 進表現の構成を行おうとすると一カ所の有限素点 vで分岐する四元数環を使うことになる. この場合, 分解に現れる尖点表現はπ_v が Steinberg 表現であるものに限る. つまり, 全ての有限素点で不分岐であるような表現は現れない. この除外された場合にも対応する p 進表現が存在することは Wiles, Taylor(interpolation method), Blasius, Rogawski (endoscopy method) によって示されている.

c) 今のケースでは保型表現に対応する p 進表現のみならずモチーフが 構成されている事になる. g が偶数の場合には現在でもモチーフの構成は完全には知られていない.

gが偶数であるときには M_Kは点であり,

$$H^0(M_K, \mathbf{C}) = (\oplus_\pi V_\pi \otimes (\pi^\infty)^K) \oplus (\oplus_{\pi'} V_{\pi'} \otimes ({\pi'}^\infty)^K)$$

と分解する. ここで π は以前と同様で, π' は $\det : \mathrm{GL}_{2,F} \to F^\times$ に対応する 一次元表現(これは $D^\times$ の本質的に二乗可積分な表現である) をはしる.

§2. ヘッケ環

以下, 係数体を p 進体 K_λ とし, $\mathcal{O}_\lambda$ をその整数環とする. 以下次のようなコンパクト開部分群を使う.

$$K_0(\mathfrak{f}) = \{\ g \in \mathrm{GL}_2(\prod_{v:\text{有限素点}} \mathfrak{o}_v);\ g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mathrm{mod}\, \mathfrak{f}\}.$$

$$K_1(\mathfrak{f}) = \{\ g \in \mathrm{GL}_2(\prod_{v:\text{有限素点}} \mathfrak{o}_v);\ g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mathrm{mod}\, \mathfrak{f}\}.$$

$$K_{11}(\mathfrak{f}) = \{\ g \in \mathrm{GL}_2(\prod_{v:\ \text{有限素点}} \mathfrak{o}_v);\ g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{mod}\, \mathfrak{f}\}.$$

さらに $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^\times$の部分群 Hに対し

$$K_H(\mathfrak{f}) = \epsilon^{-1}(H)$$

と置く. ここで$\epsilon : K_0(\mathfrak{f}) \to (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^\times$, $(\alpha \quad \beta//\gamma \quad \delta) \mapsto \alpha \,\mathrm{mod}\, \mathfrak{f}$ と定義しておく.

次に保型関数の空間を定義する.(本来は表現論の言葉を使うべきである.)

$$\tilde{S}_H^D(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}} = \{D^\times(\mathbf{A}) \text{ 上重さ } (2, \ldots, 2),\ \text{右 } K_H(\mathfrak{f})\text{- 不変の } \mathbf{C}\text{-値 尖点形式 }\}$$

とし, さらに Dが division algebra のときには

$$S_H^D(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}} = \tilde{S}_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}}/I_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}}, \quad I_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}} = \{f \in \tilde{S}_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}};\ f : D^\times(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}^\times \to \mathbf{C}\}$$

とする. $I_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}}$を取り除く理由は後で述べる Jacquet-Langlands, 清水対応で Eisenstein 級数から作られる非尖点的な二乗可積表現に対応してしまうからである.

$K = K_1(\mathfrak{f})$ とする. $G(\mathbf{A}^\infty)$ 上の smooth (= 局所定数) でコンパクト台を持つ K-両側不変な関数のなす畳み込み代数 $H_{\mathfrak{f}} = H(G(\mathbf{A}^\infty), K_1(\mathfrak{f}))$ は自然に $S_H^D(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}}$に作用する. $G(\mathbf{A}^\infty) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_F^\infty)$ であるので同型を除けばこの畳み込み代数は Dの取り方によらないことを注意しておく. このとき

定理 (Jacquet-Langlands[JL], 清水[Sh]).

$H_{\mathfrak{f}}$-加群としての同型

$$S_H^D(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}} \simeq S_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}}$$

が存在する．ただし $S_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}} = S_H^{M_2(F)}(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}}$はヒルベルトモデュラー形式の空間である．

注意．上記同型は本来セルバーグ跡公式を用いた抽象的なものであるため，両辺が自然に持つ $\mathbf{Q}$-構造や $\mathbf{Z}$-構造を破壊している．ただし、テータ対応を構成する事は可能であり，その際 $\mathbf{Q}$-構造から周期の関係が導かれる．これについては [S2] 参照．

$T_H(\mathfrak{f})$ を$\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_{2,H}(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}})$ 内で以下の元により生成される $\mathbf{Z}$-部分環とする：

$$\begin{cases} T_v = \text{ given by } \chi_{K_1(\mathfrak{f})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \pi_v\end{pmatrix}K_1(\mathfrak{f})} & \text{for } v \nmid \mathfrak{f}, \\ \langle \mathfrak{a} \rangle = \text{ given by } \chi_{K_1(\mathfrak{f})\prod_{v|\mathfrak{a}}\begin{pmatrix}\pi_v^{v_v(\mathfrak{a})} & 0\\ 0 & \pi_v^{\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\end{pmatrix}K_1(\mathfrak{f})} & \text{for } (\mathfrak{a},\mathfrak{f}) = 1 \\ U_v = \text{ given by } \chi_{K_1(\mathfrak{f})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \pi_v\end{pmatrix}K_1(\mathfrak{f})} & \text{for } v | \mathfrak{f}. \end{cases}$$

ここで $D^\times(\mathbf{A}^\infty)$ のコンパクト部分集合 K に対し χ_K をその特性関数とする．$T_H(\mathfrak{f})$ は $\mathbf{Z}$ 上有限平坦な可換環になることが知られている．$T_H(\mathfrak{f})'$ を $T_H(\mathfrak{f})$ の部分環で T_v, $v \not| \mathfrak{f}$, と $\langle \mathfrak{a} \rangle$ ($(\mathfrak{a},\mathfrak{f}) = 1$) で生成されるものとする．つまり，$U_v$ 達を取り除いたものとする．

ここで可換環 R に対し R 係数のモデュラー形式の空間 $S_H(\mathfrak{f})_R$を $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T_H(\mathfrak{f}), R)$ として定義すると、$R = \mathbf{C}$ に対しては今まで使ってきた保型形式の空間と同一視できる．($T_H(\mathfrak{f}) \times S_H(\mathfrak{f})_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ を $(t, f) \to a_1(t \cdot f)$ で定義すればよい．ここで a_1 は Hilbert モデュラー形式の第一フーリエ係数を対応させる写像である．) さらに，この対応において環準同型 $f : T_H(\mathfrak{f}) \to R$ は $R = \mathbf{C}$ の時には正規化された eigenform と同一視できる．$T_v \cdot f = a_v \cdot f$, 等とするとき T_v の行き先を a_v として準同型をつくればいい．

$$T_H(\mathfrak{f}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O} = \prod_{m} T$$

と局所環の積に分解するとこれに対応して

$$H^1(S_{K_H(\mathfrak{f})}, \mathcal{O}) = \oplus_T M_T \quad g: \text{ 奇数}$$

$$H^0(S_{K_H(\mathfrak{f})}, \mathcal{O})/\{D^\times(\mathbf{A}^\infty) \to \mathbf{A}^{\infty\times} \to \mathcal{O}\} = \oplus_T M_T \quad g: \text{ 偶数}$$

という分解が得られる．ここで M_T は T が非自明に作用する部分であり、g が奇数ならば $M_T \otimes_{\mathcal{O}} K$ はランク 2 の自由 $T \otimes_{\mathcal{O}} K$-加群となる (Eichler-志村同型による)．g が偶数ならば $M_T \otimes_{\mathcal{O}} K$ はランク 1 の自由 $T \otimes_{\mathcal{O}} K$-加群となる．以下ではこの分解に現れる (T, M_T) を調べることになる．とくに，以下の問いを中心に考察する：

Tは可換環として完全交差環となるか? M_Tは自由 T-加群となるか?

注意．

1「 M_Tは自由T-加群となる」という命題のことを "multiplicity one theorem"という. これは Mazur により楕円モデュラー曲線の場合に (適当な条件の下に) 発見されたものであり, この場合には系として T が Gorenstein 環であることが従う ([W] においても Mazur の結果の拡張が本質的に用いられている). その証明には標数 p での q-展開原理 が用いられているが, 一般の総実代数体の場合には S_K に尖点が存在しないため単純に拡張することはできない.

2. $F = \mathbf{Q}$ で, $\mathfrak{f}$ が p^3 で割れる場合には T が Gorenstein にならない例が知られている.

3. ヘッケ環 $T'(\mathfrak{f})$ を使うメリットはレベルの増大に伴い自然に $T'(\mathfrak{f}) \to T'(\mathfrak{f}')$ が引き起こされることと $T'(\mathfrak{f}) \otimes_{BZ} \mathbf{Q}$ の半単純性にある. その一方 $T(\mathfrak{f})$ を使うメリットは $T(\mathfrak{f})_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}$ の双対がモデュラー形式の空間になることにある. また, 後に述べるレベル上昇の時には全てのヘッケ作用素を見る必要がある.

§3. Taylor-Wiles 系

ヘッケ環 T 及び T-加群 M_T を T が極小の時に調べる現在最も強力な手法が Taylor-Wiles 系である. この概念は Euler 系と比較するべきものであり, 楕円モデュラー曲線の時に[TW] に原型が現れ, 極小ヘッケ環の完全交差性が示された. この手法が普遍変形環との関係を調べる際に有効であることは Faltings の注意によるものであり, [W] の三節がほぼ不要となった. 我々の定式化は "multiplicity one theorem"をも含むものであり [W] の二節の前半部分を不要にする. さらに, この手法は大きな発想の転換を含んでいる. つまり, ヘッケ環 (やヘッケ加群) を調べるためにガロア表現を使うのである.

定義.

Taylor-Wiles 系 $\{R, \{R_Q, M_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}\}$ とは以下の公理 *TW1-3* を満たすもののことである:

TW1: $Q \in \mathcal{Q} \Rightarrow q_v \equiv 1 \bmod p \quad (q_v = \sharp k(v))$, R_Q は完備ネーター局所 $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-代数である. ここで $\Delta_Q = \prod_{v\in Q} \Delta_v$, Δ_v は $k(v)^\times$ の *p-Sylow* 部分群で, $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ は群環である. 以下 Δ_v の生成元 δ_v を固定しておく.

TW2: R は $\mathcal{Q}$-代数であり, 各 $Q \in \mathcal{Q}$ に対し同型

$$R \simeq R_Q/(\delta_v - 1, v \in Q)$$

が存在する.

TW3: M_Qは R_Q-加群であり, $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-加群として階数$\alpha \geq 1$ の自由加群である. ここでαは $Q \in \mathcal{Q}$ に依らないものとする.

注意.

1. Taylor-Wiles 系は Euler 系と比較されるべきものだが Q を増大させるときの compatibility は非常に弱い.

2. Taylor と Wiles は $R_Q = M_Q$ がヘッケ環である時を取り扱っている.

定理 (同型判定法).

Taylor-Wiles 系 $\{R, \mathcal{Q}, \{R_Q, M_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}\}$ が与えられているとする. 以下の条件を考える.

a) *(増大度)* 任意の $m \geq 1$ に対して

$$q_v \equiv 1 \bmod p^m, \quad v \in Q$$

が成立する.

b) (関係式) $r = \mathrm{Card}\, Q$ は $Q \in \mathcal{Q}$ の取り方に依らない.
c) (生成元) R_Q は完備局所 $\mathcal{O}$-代数として r個の元で生成される.
d) (像の一致) R の$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}\, M_Q/(\delta_v - 1;\ v \in Q)M_Q$ 内での像は R-代数として $Q \in \mathcal{Q}$ の取り方に依らない. (像のことを Tと呼ぶことにする.)
e) (加群の一致) $M_Q/(\delta_v - 1;\ v \in Q)M_Q$は R-加群として $Q \in \mathcal{Q}$ の取り方に依らない. (M とおく.)

このとき条件 *a*), *b*) *c*) のもとで Rは一次元の完全交差環になりさらに *d*) を満たせば $R \simeq T$が成立する. 特に R は $\mathcal{O}$-加群として有限階数の自由加群となる. それに加えて *e*) を満たすときには M は自由 R-加群となる.

つまり, Taylor-Wiles 系が定理の条件を満たせば $R = T$, Rの完全交差性, および "multiplicity one theorem"が一斉に示せることになる.

定理の証明は自由性を出すために Auslander-Buchsbaum の公式を用いるなど技術的であるため, 意味を説明する. 以下の説明でわかるとおり, 発想は非常に幾何学的である.

$\bar{\rho} : G_\Sigma \to \mathrm{GL}_2(k)$ を既約表現とする. このとき Taylor-Wiles 系の候補として

$$R = \bar{\rho} \text{ の普遍変形環} \qquad (\rho^{\mathrm{univ}} \text{ を普遍変形 })$$

$$R_Q = G_{\Sigma \cup Q} \to G_\Sigma \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathrm{GL}_2(k) \text{ の普遍変形環} \qquad (\rho_Q^{\mathrm{univ}} \text{ を普遍変形 })$$

があげられる. つまり, 曲線 $\mathrm{Spec}\, \mathfrak{o}_F \setminus \Sigma$ の基本群の表現を考える代わりに Q の点をさらに除いていくわけである. その方が変形しやすくなる事が期待できる. ここで公理 TW1, つまり群環がなぜ生じるのかを考える. そのため $\mathcal{Q}$ として

$$\mathcal{Q} = \{Q;\ v \in Q \Rightarrow \bar{\rho} \text{ は } v \text{ で不分岐 }, \bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v) \text{ は異なる固有値 } (\alpha_v, \beta_v) \text{ を持つ.}\}$$

をとる. すると

事実 (Faltings).
$v \in Q \in \mathcal{Q}$ なら $\bar{\rho}|_{D_v}$ の普遍変形環は $\mathcal{O}[\Delta_v]$ であり、関係式

$$\rho_Q^{\mathrm{univ}}|_{D_v}(\sigma_v) = \begin{pmatrix} \delta_v & 0 \\ 0 & \delta_v^{-1} \end{pmatrix}; \qquad \sigma_v \text{ は惰性群の } \textit{tame part} \text{ のある生成元}$$

が成立する.

これにより R_Qの $\mathcal{O}[\Delta_v]$-代数構造が$\rho_Q^{\mathrm{univ}}|_{D_v}$ により与えられることになる.

これで TW1 が説明できることになるが, さらにこの記述より TW2 も普遍変形環に対しては自明になってしまう. なぜなら Spec R_Q 内で $\delta_v = 1 (v \in Q)$ となる部分は $\rho_Q^{\mathrm{univ}}|_{D_v}$, $v \in Q$ が不分岐になる部分であり, それはSpec Rに等しい.

注意.
もしヘッケ環により系を作ったとすると TW2 は全く自明ではない. 何故なら $T_Q/(\delta_v - 1, v \in Q)$ は p ベキのねじれ元を持つ可能性があるからである. これは$\mathrm{mod}\, p$ モデュラー形式の標数 0 への持ち上げ可能性と深い関係がある.

従って公理の中で非自明なのは TW3, つまり M_Qの構成と群環上の自由性であるが, モデュラー多様体から生じる系については一般的原理から説明する事が可能である. このことは後述する.

$$\operatorname{Spec} R \overset{i_1}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec} R_Q \overset{i_2}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec} \mathcal{O}[[T_1, \ldots, T_r]]$$

ここで埋め込み i_1 は TW2 と b) により r個の関係式で書けており i_2は c) によって得られる埋め込みである. 実際には $r = \dim_k H^1_{\mathcal{D}}(F, \mathrm{ad}^0 \bar{\rho})$ と思ってよい. ここで

(期待) R_Qは smooth な環になる

がもし正しいとするなら i_2は同型であり, R の完全交差性 $R \simeq \mathcal{O}[[T_1, \ldots, T_r]]/(f_1, \ldots, f_r)$ を導く. もちろん (期待) はあまりに naive すぎて (Krull 次元すら異なっている), そのままでは成り立たない. しかし (期待) は与えられた次数までの jet については成り立つ。つまり適当な列 $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ をコンパクト性の議論を使って作ると極限

$$P = \varprojlim_n R_{Q_n}/I_{Q_n}, \quad \exists I_{Q_n} \subset R_{Q_n}$$

が smooth になっていることが示せる. これが[TW] の議論の本質的な部分である.

注意.

1. 有理数体 $\mathbf{Q}$ の場合に F. Diamond も同様の議論を独立に見つけている.
2. Taylor-Wiles 系の手法はヘッケ環 T が極小の時でないと有効でない. 同型判定法 の条件 b) と c) における rの一致はこの場合にしか示せないからである. [W] において Wiles が分岐素点における条件を仮定しているのもこの極小性が満たされていないからである.

§4. 変形

$\bar{\rho} : G_\Sigma \to \mathrm{GL}_2(k)$ を G_Σ の既約表現とする. $\bar{\rho}$ は $v|p$ で flat または ordinary であるとする. ただし, $\bar{\rho}$ が v で flat であるとは (o_v の絶対分岐指数が $p-1$ より小さいとして) $\bar{\rho}|_{D_v}$ が o_v 上の有限平坦群スキームからつくられており, なおかつ $\det \bar{\rho}|_{I_v} = \omega_v$ が成り立っていることとする. ここで ω_v は Teichmüller 指標. さらに ordinary の時には $(\bar{\rho}|_{D_v})^{ss}$ が異なる指標の直和になっているとする (D_v-distinguished). このとき変形のタイプ $\mathcal{D} = \{\Sigma, \mathcal{O}, G\}$ を以下のように決める: $\mathcal{O}$ は p-進整数環であり G は $|\operatorname{Spec}\, o_F|$ 上定義され, 集合 $\{\mathbf{fl}, \mathbf{Sel}, \mathbf{f}, \mathbf{u}\}$ に値を取る関数である. ただし G は以下の条件に従うものとする.

もし $v|p$ なら G の値は $\{\mathbf{fl}, \mathbf{Sel}\}$ のいずれかであり (flat や Selmer 変形については[W] 参照) $G(v) = \mathbf{Sel}$ ($\bar{\rho}|_{D_v}$ が ordinary の時), $G(v) = \mathbf{fl}$ ($\bar{\rho}|_{D_v}$ が flat のとき). 仮に$\bar{\rho}|_{D_v}$ が ordinary かつ flat ならば, $G(v)$ は $\mathbf{fl}$ 又は $\mathbf{Sel}$ のいずれをも取りうる.

$v \not| p$ ならば G の値は $\{\mathbf{f}, \mathbf{u}\}$ に入るとし, $v \notin \Sigma$ については $G(v) = \mathbf{f}$ とする.

変形のタイプ $\mathcal{D}$ が極小であるとは

$G(v) = \mathbf{fl}$ ($v|p$, $\bar{\rho}$ が flat のとき)

$G(v) = \mathbf{f}$ ($v \not| p$ の時) とする.

$\Sigma_{\mathcal{D}} = \{v|p\} \cup \{v : \bar{\rho}$ が vで分岐 $\}$ と定義する.

$v|p$ の場合には, $\bar{\rho}$ のアルティン局所環上の変形 ρ を $G(v) = \mathbf{Sel}$ 又は $\mathbf{fl}$ に従って Selmer ないしは flat ということにする. flat な$\bar{\rho}$ が ordinary であることもあり得るがそのような場合にはいかなる flat 変形も Selmer 変形になっている.

$v \nmid p$ の時には $G(v) = \mathbf{f}$ か $G(v) = \mathbf{u}$ に従って有限変形, 無制限変形することにする. ここでは有限変形については述べないが, $\dim_k \bar{\rho}^{I_v} = 1$ の時には持ち上げ ρ に対しても $\rho|^{I_v}$ がランク 1 の自由加群になっていることを要求する. $\bar{\rho}|_{D_v}$ が絶対既約の時にも 有限変形と

無制限変形が異なる場合がある ($\bar{\rho}|_{I_v}$ が絶対可約の場合である. 以下では exceptional ということにする. [W] では除外されている場合である. この場合にも 有限変形はρ^{I_v} に条件をつけたものである.) $R_{\mathcal{D}}$ ($R^0_{\mathcal{D}}$) を $\bar{\rho}$ のタイプ $\mathcal{D}$ の普遍変形環 (determinant を固定した普遍変形環) とし$\rho^{\mathrm{univ}} : G_\Sigma \to \mathrm{GL}_2(R_{\mathcal{D}})$ を普遍変形とする. ただし determinant を固定するとは $\det\rho/\chi_{\mathrm{cycle}}$ が $\det\bar{\rho}/\bar{\chi}_{\mathrm{cycle}}$ の Teichmïler lift になっているものとする. ここで χ_{cycle} は円分指標である. 存在は[M] の議論と同様である.

一般的な変形の議論はこのぐらいにして、以下ではモデュラー表現の変形環をヘッケ環を使って具体的に構成する。この際基本になるのは保型表現から p 進表現を構成することが今の場合可能であること (太田 [O], Carayol , Wiles, Taylor, Blasius, Rogawski 等による), 及びその大局的対応が局所 Langlands 対応と compatible であること (Carayol [Car 1], Wiles [W2], Taylor [T]) が重要になる. まずモデュラー $\mathrm{mod}\, p$ 表現を定義する.

定義. 絶対既約な$\mathrm{mod}\, p$-表現 $\bar{\rho} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(k)$ が *(タイプ* $(2,\dots,2)$ *の)* モデュラー表現であるとは ある p-進整数環 $\mathcal{O}$ があって $\bar{\rho} \simeq \rho_{\pi,\lambda} \,\mathrm{mod}\, \lambda$ となる $\mathcal{O}$-係数の$\mathrm{GL}_{2,F}$ 上の尖点表現 π が存在することをいう. 強い意味でのモデュラー表現であるとはさらに以下の条件が満たされることをいう:

a) もし $\bar{\rho}|_{D_v}$ が $v \not| p$ で絶対可約で分岐している場合には $\dim \bar{\rho}^{I_v} = 1$ が成り立つ.

b) π として導手が $\mathfrak{f}_\pi = \mathfrak{f}_{\bar{\rho}} \cdot \prod_{v|p} v^{n_v}$ となるものがとれる. ここで $\mathfrak{f}_{\bar{\rho}}$ は $(p$ と素な$)$ $\bar{\rho}$ のアルティン導手であり, n_v は $\bar{\rho}|_{D_v}$ が *flat* のとき 0, それ以外の時は *1* とする. さらに $\det\rho_{\pi,\lambda}/\chi_{\mathrm{cycle}}$が p と素な位数のアルティン指標であるようにできる.

条件を満たす π, またはそれを定義する eigenform $f_\pi : T'_{H_p}(\mathfrak{f}_\pi) \to \mathcal{O}$ (H_p は p-Sylow 部分群) を極小持ち上げということにする.

注意. 条件 a) は $F = \mathbf{Q}$ の時と異なり, (新たな分岐を許さない限り) 一次指標でひねっても満たされるとは限らない. そのような場合も含めようとすると、ヘッケ環の定義を少し変更する必要がある. 単にモデュラーであるときに b) を満たすπ を探すこと (レベルの引き下げ) については後に論じる.

$\mathcal{D}$ をモデュラー表現 $\bar{\rho}$ の変形のタイプとするとき π をその極小持ち上げとして

$$\mathfrak{f}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{f}_\pi \cdot \prod_{G(v)=\mathbf{u}} v^{\dim_k \bar{\rho}^{I_v}}$$

としてレベルを定義する. $H = H_p$ としては p-Sylow 部分群を取る. するとヘッケ環 $T'_{H_p}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}})$ の極大イデアル m' が $T_v \mapsto \mathrm{trace}\,\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)$ ($T'_{H_p}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}}) \to T'_{H_p}(\mathfrak{f}_\pi) \xrightarrow{f_\pi} \mathcal{O} \to k$) として作れる. p が奇数なら$\bar{\rho}$ は $T'_{H_p}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}})/m'$ 上定義されている. そこで $T'_{\mathcal{D}} = T'_{H_p}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}})_{m'} \hat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}$ と定義する. これが変形のタイプに伴うヘッケ環であり, 今後調べるものである. タイプを $\mathcal{D} = \{\Sigma, \mathcal{O}, G\}$ から $\mathcal{D}' = \{\Sigma, \mathcal{O}', G\}$ ($\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ の拡大) に変更すると $T_{\mathcal{D}'} = T_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$となる (右辺が局所環になるから).

定理 (普遍モデュラー表現の存在).

$\bar{\rho}$ が絶対既約であるならガロア表現 $\rho^{\mathrm{mod}} : G_\Sigma \to \mathrm{GL}_2(T'_{\mathcal{D}})$ で

$$\mathrm{trace}\,\rho^{\mathrm{mod}}(\mathrm{Fr}_v) = T_v \quad (v \notin \Sigma)$$

を満たすものが同型を除きただ一つ存在する.

これは Carayol の一般的な定理より従う(が本来は Wiles の擬表現の方法[W2] で示されている). ただし, odd で既約な表現はトレースで生成される体上定義されることを使う.

注意. $\det \rho^{\mathrm{mod}}(\mathrm{Fr}_v) = \langle v \rangle$ となるが, 実際は $(\det \rho^{\mathrm{mod}}/\chi_{\mathrm{cycle}})/(\det \bar{\rho}/\tilde{\bar{\chi}}_{\mathrm{cycle}})$ ($\det \bar{\rho}/\bar{\chi}_{\mathrm{cycle}}$ の Teichmüller lift) は位数が p ベキの有限素点で不分岐な指標になっている (Hとして p-Sylow 部分群をとったことによる). 従って, 一般には determinant も変形することになる.

この普遍モデュラー表現を調べる際に最も重要なのが以下の事実である.

事実.
πを$\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_F)$ の尖点表現とし, 無限遠でのタイプが D_{k_ι}, $k_\iota \geq 2$ となるものとする. このときρ_πを対応する ℓ進表現とすると有限素点 $v \not| \ell$で$\pi \to \rho_\pi$という大域的ラングランヅ対応は局所ラングランヅ対応と *compatible* である. つまり、$\pi = \otimes_v \pi_v$と分解したとき$\pi_v \to \rho|_{D_v}$が局所ラングランヅ対応になっている.

これは gが奇数の場合と gが偶数のほとんどの場合に[Car 1] で示されたが残りの場合も[W2], [T] で示されている.

この事実により以下のことが示せる.

主張.
a) ある $T_{H_p}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}})$ の極大イデアル m があり

$$T'_{\mathcal{D}} \simeq T_{\mathcal{D}} = T_{H_p}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}})_m \hat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}.$$

b) ρ^{mod} は $\bar{\rho}$ のタイプ $\mathcal{D}'$の変形である. ここで $\mathcal{D}' = (\Sigma, \mathcal{O}, G')$, $G'(v) = G(v)$ (*rho̅* が v で *exeptional* でないとき) $G'(v) = \mathbf{u}$ (v で *exeptional* なとき).

これによって $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ の時には $R_{\mathcal{D}} \to T_{\mathcal{D}}$ が定義できることになる (しかも全射である). また, ヘッケ加群 $M_{\mathcal{D}} = M_{T_{\mathcal{D}}}$ も定義できる事になる. これで主役 $(R_{\mathcal{D}}, T_{\mathcal{D}}, M_{\mathcal{D}})$ が出そろったことになる.

注意.

1. もちろんこのようなガロア表現を構成したのは ($F = \mathbf{Q}$ で ordinary Λ-進の場合だが) 肥田が最初である. ここでの構成法は Wiles の擬表現の手法による.
2. 本来の局所ラングランヅ対応では剰余標数が p と素であることを要求するため, 上記定理もこの場合には適用されない. 従って他の手法を使うことになる. ただし, 有理数体の場合に de Jong の alteration と辻の結果から Weil-Deligne 群の表現を定義することができ、Langlands 対応と compatible であることが示されている(斉藤毅、this volume).

§5. テイラーワイルス系の構成

以下の定理が主定理の一つである.

定理. F を総実代数体とし $\bmod p$ 表現 $\bar{\rho}: \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(k)$ がモデュラーで $v|p$ で *flat* か *ordinary*, $\bar{\rho}|_{D_v}$ ($v \not| p$) が分岐しており絶対可約なら $\dim_k \bar{\rho}^{I_v} = 1$ とする. $\mathcal{D}$ を $\bar{\rho}$ に対する変形のタイプとする.

1. 奇素数 p は F で不分岐で, F と $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ は線形独立. (線形独立性は不分岐な事から従うが, 重要な仮定なので強調しておく)
2. $\bar{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}\,))}$ は絶対既約である.
3. $\bar{\rho}$ は§4 の意味での極小持ち上げ π を持つ.

このとき $\bar{\rho}$ の変形のタイプ $\mathcal{D}$ に対しヘッケ環 $T_{\mathcal{D}}$ は完全交差環で, *Fontaine-Mazur* 予想が成り立つ. つまり普遍変形環 $R_{\mathcal{D}}$ にたいし $R_{\mathcal{D}} \simeq T_{\mathcal{D}}$ となる.

証明は $\mathcal{D}$ が極小のときを先に示し, 一般の場合はレベルをあげる議論により極小の場合に帰着するという方法をとる. 定理には含めなかったが, "multiplicity one theorem" も同時に証明されていく.

$F = \mathbf{Q}$ の場合は Wiles, Taylor-Wiles, Diamond による結果と一致する. 有理数体の場合に限れば議論はかなり易しくなっている.

注意.

a) 一般の F の場合は一次指標によってひねる議論が適用できないので結論は少し弱くなっている.「 $\bar{\rho}|_{D_v}$ ($v \not| p$) が分岐しており絶対可約なら $\dim_k \bar{\rho}^{I_v} = 1$」はヘッケ環の定義を変更してはずせるが, そうすると極小持ち上げの定義を強める必要があり, レベルを下げる議論がやりづらくなる.

b) 分岐素点が例外的な場合には今までと異なる志村曲線を使う必要があり ($F = \mathbf{Q}$ で Diamond が扱った場合), 従って "multiplicity one" もそのような曲線のコホモロジー群に対してしか分からないことに注意しておく.

$\mathcal{D}$ が極小の時には Taylor-Wiles 系を作ることになる.

定理. F を総実代数体, p を奇素数とし $\bmod p$ 表現 $\bar{\rho}: \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(k)$ がモデュラーで $v|p$ で *flat* か *ordinary*, $\bar{\rho}|_{D_v}$ ($v \not| p$) が分岐しており絶対可約なら $\dim_k \bar{\rho}^{I_v} = 1$ とする. さらに? の意味での極小持ち上げ π を持つとする. $\mathcal{D}$ を $\bar{\rho}$ に対する変形のタイプとする. このとき *Taylor-Wiles* 系 $\{R, \{R_Q, M_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}_{\Sigma,\bar{\rho}}}\}$ で
$\mathcal{Q}_{\Sigma,\bar{\rho}} = \{v; v \not| \mathfrak{f}_{\mathcal{D}},\ q_v \equiv 1 \bmod p, \bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)$ は異なる固有値を持つ $\}$ となるものが作れる.

以下, 簡単のため $\bar{\rho}$ には例外的な場合, つまり $\bar{\rho}|_{D_v}$ が絶対既約だが 惰性群への制限が可約になっていることはないとする. (そのような例外的な場合にはヘッケ環を極小にするために F. Diamond が $F = \mathbf{Q}$ で行ったように分岐する四元数環に伴うモデュラー多様体を係数層付きで考える必要がある.) $T = T_{\mathcal{D}}$ とおく. まず $Q \in \mathcal{Q}$ に対しヘッケ環 T_Q と T_Q-加群 M_Q, 変形環 R_Q, 準同型 $R_Q \to T_Q$ を定義する. $\mathfrak{Q} = \prod_{v \in Q} v$ とおく. $\bar{\rho}$ が不分岐になっている v に対し α_v と β_v を $\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)$ の v での固有値とする.

まず最初に一見技術的ではあるがヘッケ環を変えずにレベルを増大させ(群を減少させ) 不連続群の作用を自由にする事を行う. まず整数 A で $q_{\mathfrak{r}} \not| A$ なら $G_D^{\mathrm{der}}(\mathbf{Q}) \cap g K_{11}(\mathfrak{r}) g^{-1}$, $g \in G_D(\mathbf{A}^\infty)$ がねじれ元を持たないようにできる. そこで $\mathfrak{r}$ を

1. $q_{\mathfrak{r}} \not| A\mathfrak{f}$, $q_{\mathfrak{r}} \not\equiv 1 \bmod p$
2. $\alpha_{\mathfrak{r}} \neq \beta_{\mathfrak{r}}$. $\alpha_{\mathfrak{r}} \neq q_{\mathfrak{r}}^{\pm 1} \beta_{\mathfrak{r}}$.

となるように取る．これは Diamond と Taylor の議論であるが，F と $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ が線形独立な事と $p=3$ なら $\bar{\rho}|_{F(\sqrt{-3})}$ が絶対既約な事を使っていることに注意．このような条件なしには出てくる結論に反例があることすらあるのである．

ヘッケ環を $\mathfrak{r}$ で変更しても変わらないことを見よう．$K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}}) = K_H(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}}) \cap K_{11}(\mathfrak{r})$ とし $T_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}$ の極大イデアル $m_{\mathfrak{r}}$ を m と $U_{\mathfrak{r}} - \alpha_{\mathfrak{r}}, < \delta > -1, \delta \in k(\mathfrak{r})^{\times}$ で生成されるものとする．　$T' = (T_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O})_{m_{\mathfrak{r}}}$ とする．固有形式 $f : T' \to \mathcal{O}$ をとり π を対応する尖点表現とする．まず $\mathfrak{r}$-成分 $\pi_{\mathfrak{r}}$ は超尖点的ではないことをみる．$\pi_{\mathfrak{r}}$ は表現空間内に $\begin{pmatrix} a & * \\ \pi_{\mathfrak{r}} \cdot * & b \end{pmatrix} w = \chi_1(a)\chi_2(b)w$ となるベクトル w をもつ．ここで $\chi_1, \chi_2 : K_{\mathfrak{r}}^{\times} \to \bar{\mathbf{Q}}_p$ は従順指標である．$\pi_{\mathfrak{r}} \otimes \chi_2^{-1}$ は導手が高々 1 なので超尖点的にはならない．条件 1 から中心指標の分岐が分かるので，もし $\pi_{\mathfrak{r}}$ が主系列表現なら，不分岐にならなくてはいけない．条件 2 から $\pi_{\mathfrak{r}}$ は Steinberg 表現にもならないのがわかる．そこで $< \delta >$-作用は自明であり，T' は $\mathfrak{r}$ で old な形式の空間に作用する商と一致することがわかる．$U_{\mathfrak{r}}$ が T に属することを見るのも容易なので (フロベニウスの固有値が異なることによる) $T = T'$ が従う．

今後　T とレベルを $\mathfrak{r}$ であげたヘッケ環を同一視することとする．この手法を使うとさらにいろいろなヘッケ環を T と同一視する事ができる．たとえば $K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{Q}) = K_H(\mathfrak{f}, \mathfrak{Q}) \cap K_{11}(\mathfrak{r})$ とおき

$$T_{0,Q} := (T_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{Q}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O})_{m_Q}$$

とする．ここで m_Q は $m_{\mathfrak{r}}$ と $U_v - \alpha_v$,$v \in Q$ で生成された極大イデアルである．

補題.

$$T_{0,Q} \simeq T = (T_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O})_{m_{\mathfrak{r}}} = (T_H(\mathfrak{f}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O})_m.$$

証明．$N = \sharp Q$ についての帰納法で示す．$N = 0$ なら主張は明らかである．Q' について正しいとし $Q = Q' \cup \{v\}$ とする．表現は v で new な $K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{Q})$ 上の保型形式の空間には現れない．もし現れるとすると $\alpha_v/\beta_v = q_v^{\pm 1}$, $\alpha_v\beta_v = q_v\langle v\rangle$ となるはずであるが $q_v \equiv 1 \bmod p$ と α_v, β_v が異なることを仮定したのでこれは起きない．したがって old な $K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{Q}')$ からくる空間 $V_{Q'}$ だけを考えればよい．$V_{Q'} = S_{2,K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f},\mathfrak{Q}'),\mathbf{C}} \oplus S_{2,K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f},\mathfrak{Q}'),\mathbf{C}}$ であり，$S_{2,K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f},\mathfrak{Q}),\mathbf{C}}$ への埋め込みは標準的な射影と行列 $\begin{pmatrix} \pi_{v'} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ によるひねりで引き起こされる．U_v の行列形は $V_{Q'}$ 上で

$$\begin{pmatrix} T_v & 1 \\ q_v < v > & 0 \end{pmatrix}$$

となるので方程式 $U_v^2 - T_v \cdot U_v + < v > q_v = 0$ を満たすことが分かる．仮定からこの方程式は T/m_T で異なる解を持つので，ヘンゼルの補題により T で解を持つ．従って old form の空間に作用する U_v 作用素が T に入ることになり同型を得る．

Δ_v, δ_v, $\Delta_Q := \prod_{v \in Q} \Delta_v$ は以前の通りとする．

さらに $\Delta_v^{\vee} = p$ と素な Δ_v の極大部分群, $\mathfrak{Q} = \prod_{v \in Q} v$ とする．コンパクト開部分群 K_Q を

$$K_Q = \{g \in K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{Q});\ g \equiv \begin{pmatrix} \delta \cdot h_1 & * \\ 0 & \delta \cdot h_2 \end{pmatrix} \bmod v, \quad \delta \in \Delta_v, h_1, h_2 \in \Delta_v^{\vee},\ v \in Q\}$$

として決める. K_Q に伴うヘッケ環 T_{K_Q} を $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_{2,K_Q})$ 内で T_v, $v \notin \Sigma \cup Q$, U_v, $v \in \Sigma$, U_v, $< \delta >$, $\delta \in \Delta_v$, $v \in Q$ で生成される $\mathbf{Z}$-部分代数とする. ここで U_v-作用素や $< \delta >$, $v \in Q$, $\delta \in \Delta_v$ も普通通り決めるが, $< \delta >$ は素元の取り方によることに注意する. T_{K_Q} は通常通り可換になる事が言える. $T_{K_Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}$ の極大イデアル m_{K_Q} を $m_\mathfrak{r}, U_v - \alpha_v$, $\delta - 1$ ($\delta \in \Delta_v$, $v \in Q$) で生成されるものとし

$$T_Q := (T_{K_Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O})_{m_{K_Q}}$$

とする. 以前と同様に不要な作用素を省くことができる. つまり T'_Q を T_v, $v \notin \Sigma \cup Q$, $U_v \in \Sigma$ で $\mathcal{O}$ 上生成される T_Q の部分代数とすると $T'_Q = T_Q$ が成り立ち, 特に T_Q は被約である.

まず 変形のタイプを $\mathcal{D}_Q = \{\Sigma, G_Q, \mathcal{O}\}$, $G_Q(v) = G(v)$ ($v \notin Q$, $G_Q(v) = \{\mathbf{u}\}$ ($v \in Q$) と定義する.

まず $\bar{\rho}$ が絶対既約なので $\rho_Q : G_{\Sigma \cup Q} \to \mathrm{GL}_2(T_Q)$, $\rho_Q(\mathrm{Fr}_v) = T_v$, $v \notin \Sigma \cup Q$ が以前と同様に作れ, タイプが $\mathcal{D}_Q$ の変形を与えていることに注意する. ρ_Q の $v \in Q$ でのより詳細な情報が次で与えられる.

補題. $v \in Q$ のとき $\rho_Q|_{D_v}$ は一次指標 $\chi_{1,v}$, $\chi_{2,v} : G_Q \to T_Q^\times$ の直和であり, 適当に χ_i の順序を選ぶと, $\chi_{2,v}(\sigma_v) = \delta_v$ となる. つまり

$$\rho_Q(\sigma_v) = \begin{pmatrix} \delta_v^{-1} & 0 \\ 0 & \delta_v. \end{pmatrix}$$

ただし σ_v は局所類体論により δ_v にうつる I_v^{tame} の生成元.

以下簡単のため 狭義イデアル類群の p-部分 $C_{F,p}$ は自明であるとする. すると $\det \rho_Q = \tilde{\det} \bar{\rho} \cdot \epsilon'$. ここで $\tilde{\det} \bar{\rho}$ は $\det \bar{\rho}$ の Teichmüller lifting で, ϵ' は円分指標の p-部分. 従って determinant はこのように固定されているとして良い.

R_Q を $\bar{\rho}$ のタイプ $\mathcal{D}_Q$ の普遍変形環とする. $\kappa_Q : R_Q \to R$ を自然な射影としよう. ρ_Q がタイプ $\mathcal{D}_Q$ の変形なので ρ_Q に対応する環準同型 $f_Q : R_Q \to T_Q$ を得る.

自然な射影 $\pi_Q : T_Q \to T$ により, ρ_Q は ρ を与える: $\mathrm{Trace}_{T_Q} \rho_Q(\mathrm{Fr}_v) = T_v$ ($v \notin \Sigma \cup Q$) は $T_v = \mathrm{Trace}_T \rho^{\mathrm{mod}}(\mathrm{Fr}_v) \in T$ にうつり Chebotarev の密度定理により $\pi_Q \rho'_Q$ と ρ は同じ指標を持つからである.

可換図式

$$\begin{array}{ccc} R_Q & \xrightarrow{f_Q} & T_Q \\ {\scriptstyle \kappa_Q}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_Q}\downarrow \\ R & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

をえるが, $\mathcal{O}[\Delta_v]$ は $\bar{\rho}|_{D_v}$ の普遍変形環とみなせるのだった. §4 での議論により TW2 は満たされている. 従って

$$\tau_Q : \mathcal{O}[\Delta_Q] = \otimes_{v \in Q} \mathcal{O}[\Delta_v] \to R_Q$$

を得る. $\rho_Q|_{D_v}$ の記述から $f_Q \cdot \tau_Q(\delta_v) =< \delta_v >$ となり, $\mathcal{O}[\Delta_Q] \stackrel{f_Q \cdot \tau_Q}{\to} T_Q$ は$<\ \ >$による自然な埋め込み $\mathcal{O}[\Delta_Q] \to T_Q$ と一致する.

テイラーワイルス系の公理 TW3 をチェックする方法を述べる. これは以下の原理に基づいている.

「 Yを多様体, G を Y に自由に作用する群で $X = Y/G$ となっているとする. このとき $R\Gamma(Y, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}[G]$-加群の複体として完全である. 」

この完全複体の議論を適用してみる. この考え方は実に単純なものであるが、それ故に強力で一般化も容易である.

まず Δ_Q が $S_{K_Q,F}$ に自由に作用することを見る. ($[F:\mathbf{Q}] > 1$ の時にこれを成り立たせるためには K_1 を使えない事に注意) K_Qの定義から,

$$(*) \qquad K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f},\mathfrak{Q})/(F^\times \cap K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f},\mathfrak{Q}))^-/K_Q/(F^\times \cap K_Q)^- = \Delta_Q \times \Delta_Q/\Delta_Q \simeq \Delta_Q$$

となる. ここで $\Delta_Q \subset \Delta_Q \times \Delta_Q$ は対角線に入っており$^-$は閉包である.

$K_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f})$ は $G_D^{\mathrm{der}}(\mathbf{Q}) \cap gK_{H,\mathfrak{r}}(\mathfrak{f})g^{-1}, g \in G_D(\mathbf{A}^f)$ がねじれがないように選んだので, Δ_Q の $S_{K_Q,F}$ は自由になる.

そこで $R\Gamma(S_{K_Q,\bar{F}}, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-加群の完全複体であることが言える. $[F:\mathbf{Q}]$ を奇数とする. $T_{K_Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}$ は局所環の積 $\prod_m T_{Q,m}$ に分解する. M_m を $H^1(S_{K_Q,\bar{F}}, \mathcal{O})$ の m-進完備化とする. 分解 $T_{K_Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O} = \prod_m T_{Q,m}$ に対応するベキ等元 e によって $M_Q = eH^1(S_{\tilde{H}}(\mathfrak{f}\mathfrak{Q}), \mathcal{O})$ となる.

命題**.** $g = [F:\mathbf{Q}]$ が奇数で, 極大イデアル m に対応する$\bar{\rho}$ が絶対既約とする. このとき $M_{Q,m}$ は自由 $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-加群である. g が偶数の時も H^0 に対して同様のことが成立する.

ここでは[TW] の「 $H^1(Y_Q, \mathcal{O})^-$ が $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-自由」を完全複体の議論で示そう. アファインモデュラー曲線 Y_Q に対し $L = R\Gamma(Y_Q, \mathcal{O})$ は 完全複体で H^0, H^1 のみが残る. ここで Y_Q は $\mathbf{R}$ 上定義されているので複素共役が L に作用するが H^0 は+-部分に入っている. 従って L^-は L の直和因子でしかも H^1 以外は消えるので $H^1(L^-) = H^1(Y_Q, \mathcal{O})^-$ の自由性が従う. 一般の F では $L = R\Gamma(S_{\tilde{H}}(\mathfrak{f}\mathfrak{Q}), \mathcal{O})$ の H^2 も残ってしまうが, ヘッケ作用素の作用を考えると H^0, H^2 への作用は一次元的で Eisenstein になってしまい, したがって $\bar{\rho}$ のような既約表現の部分には全く寄与をしない.

M_Q を f_Q により R_Q-加群とみなすと補題により $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-加群として自由になる. M_Q の $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-加群としての階数は $M_Q/\{\delta_v - 1, v \in Q\}M_Q$ の $\mathcal{O}$-加群としての階数に等しく, 従って $2\dim_K T \otimes_{\mathcal{O}} K$ ($[F:\mathbf{Q}]$ 奇数), $\dim_K T \otimes_{\mathcal{O}} K$ ($[F:\mathbf{Q}]$ 偶数) となる. 従って TW3 が $\{R, R_Q, M_Q, Q \in \mathcal{Q}\}$ に対し成り立つことになる.

あとは極小性を使って 同型判定法の条件をみたす $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_{\Sigma,\bar{\rho}}$ を $\mathcal{D}$ の極小性の下で構成していく事になる. ポイントとなるのはガロアコホモロジーを使って生成元の数をコントロールすることであり, また $v \in Q$ への制限が "強くなる" コホモロジー類を密度定理をつかって作ることにある.

$\mathrm{ad}^0\, \bar{\rho}^* = \mathrm{ad}^0\, \bar{\rho}(1)$ を$\mathrm{ad}^0\, \bar{\rho}$の双対とし, $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{D}^{*Q}$ で $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_Q$の[W] の意味での双対のタイプを取ることにする.

$H^1_{\mathcal{D}^*}(F_\Sigma/F, \mathrm{ad}^0\, \bar{\rho}(1))$, $H^1_{\mathcal{D}^{*Q}}(F_{\Sigma\cup Q}/F, \mathrm{ad}^0\, \bar{\rho}(1))$ は双対セルマー群の$\mathrm{mod}\, p$ 版である.

普遍変形環 $R_{\mathcal{D}_Q}$ に対し

$$(m_{R_Q}/(m_{R_Q}^2, \lambda))^* \ = \ H^1_{\mathcal{D}_Q}(F_{\Sigma\cup Q}/F, \mathrm{ad}^0\, \bar{\rho}),$$

であることに注意しておく. 特に $R_{\mathcal{D}_Q}$ は高々 $\dim_k H^1_{\mathcal{D}_Q}$ 個の元で生成される.

$$r = \dim_k H^1_{\mathcal{D}^*}(F_\Sigma/F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1))$$

とおく. 以下では $m \geq 1$ に対し $Q \subset \{v : q_v \equiv 1 \bmod p^m\} \cap \mathcal{Q}_{\Sigma,\bar\rho}$ が $\dim_k H^1_{\mathcal{D}_Q}(F_{\Sigma\cup Q}/F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho) \leq \sharp Q = r$ を満たすように作れることを示す. そうすれば定理は証明されたことになる (他の条件は比較的容易である).

補題. 変形のタイプ $\mathcal{D}$ が極小のとき, $\dim_k H^1_{\mathcal{D}}(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho) \leq \dim_k H^1_{\mathcal{D}^*}(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1))$ がなりたつ.

以下の公式を使う [W, proposition 1.6].

$$\dim_k H^1_{\mathcal{D}}(F_\Sigma/F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho) - \dim_k H^1_{\mathcal{D}^*}(F_\Sigma/F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1))$$

$$= \sum_{v\in\Sigma} h_v + \sum_{v\in P_\infty} h_v + \dim_k H^0(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho) - \dim_k H^0(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)).$$

ここで $v \in \Sigma$ に対しては $h_v = \dim_k H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)) - \dim_k H^1(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho)/H^1_f(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho)$ であり無限素点では $h_v = \dim_k H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1))$ となる. $\bar\rho|_{\mathrm{Gal}(\bar F/F(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}\,)}$ の既約性から $\dim_k H^0(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho) = \dim_k H^0(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)) = 0$. $\bar\rho$ が複素共役に関し奇なので $\sum_{v:\text{無限素点}} h_v = 2[F : \mathbf{Q}]$. $v \in \Sigma$, $v \not| p$ なら, $h_v = 0$. $v|p$ のときに寄与が存在し, $h_v \leq -2[k(v) : \mathbf{F}_p]$ となる. flat でない場合には[W, proposition 1.9] の方法で従う. flat な場合には $\dim_k H^1_f(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho) \leq \dim_k H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)) + [k(v) : \mathbf{F}_p]$ が[TW] の議論からでて, Tate の 局所 Euler 数公式からしたがう.

p を Fで不分岐としたので総和は 0 以下である.

$\mathcal{D}_Q$ に対しては, [loc. cit.]

$$\dim_k H^1_{\mathcal{D}_Q}/H^1_{\mathcal{D}^*Q} = \dim_k H^1_{\mathcal{D}}(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho)/H^1_{\mathcal{D}^*}(F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)) + \sum_{v\in Q} \dim_k H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1))$$

$$\leq \sharp Q.$$

となる. $\mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)(\mathrm{Fr}_v)$ は固有値 $q_v{\cdot}\alpha_v/\beta_v, q_v, q_v{\cdot}\beta_v/\alpha_v$ を持つので $\dim_k H^0(F_v,\ \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)) = 1$ ($v \in Q \in \mathcal{Q}_{\Sigma,\bar\rho}$ に対して) となることに注意.

従って $\dim_k H^1_{\mathcal{D}_Q} \leq \sharp Q = r$ を満たすためには, $H^1_{\mathcal{D}^*Q} = 0$ と $\#Q = H^1_{\mathcal{D}^*}(\mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)) = r$ が満たされればよい. ここでワイルスの結果を使う ($\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ の部分群の構造を使う場合分けが必要である. この部分に本質的な改良がなされる余地, 特に L-関数との関係があるように思う).

(cf. [W, 3.8]**).** F を代数体とし F と $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ が線形独立で $\bar\rho|_{\mathrm{Gal}(\bar F/F(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}\,)}$ が絶対既約であるとする. このとき $Q \subset \{v : v \notin \Sigma, v$ は次数 *1*, $q_v \equiv 1 \bmod p^m\} \cap \mathcal{Q}_{\Sigma,\bar\rho}$ で

$$H^1_{\mathcal{D}^*}(F_\Sigma/F, \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1)) \to \prod_{v\in Q} H^1_f(F_v,\ \mathrm{ad}^0\,\bar\rho(1))$$

が単射である (従って $H^1_{\mathcal{D}^*Q}$ が消える) ものが存在する.

$\dim_k H^1_f(F_v,\ \mathrm{ad}^0\,\bar{\rho}(1)) = \dim_k H^0(F_v,\ \mathrm{ad}^0\,\bar{\rho}(1)) = 1$ が各 $v \in Q$ で成り立つので, Q を

$$H^1_{\mathcal{D}^*}(F_\Sigma/F, \mathrm{ad}^0\,\bar{\rho}(1)) \ \simeq\ \prod_{v\in Q} H^1_f(F_v, \mathrm{ad}^0\,\bar{\rho}(1))$$

となるように取れば$\#Q = \dim_k H^1_{\mathcal{D}^*}(F_\Sigma/F, \mathrm{ad}^0\,\bar{\rho}(1)) = r$となる. ($\dim_k H^1_f(F_v,\ \mathrm{ad}^0\,\bar{\rho}(1)) =$ 1 を使った) .

これで $\mathcal{D}$ が極小の場合の証明は終わりである.

§6. レベル上昇

レベルを上昇させるために可換環論の枠組みの中でモデュラー多様体で現れる状況を抽象化する. 基本的にレベルをあげるためには合同式をたくさん作り, それらが変形の全てを尽くしていることを示すのである.

定義.

a) 以下の条件を満たす $(R, T, \pi, M, \langle\ ,\ \rangle)$ を五つ組ということにする. R, T は完備局所 $\mathcal{O}$-代数で 全射$\pi : R \to T$をもち T は $\mathcal{O}$ 上有限平坦で M は $\mathcal{O}$-加群として自由な有限生成 T-加群である. さらにペアリング $\langle\ ,\ \rangle : M \otimes_{\mathcal{O}} M \to \mathcal{O}$ は T-加群として $M \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$ を導くものとする.

b) 五つ組 $(R, T, \pi, M, \langle\ ,\ \rangle)$ が単純であるとはπ が同型で M が自由 T-加群になることをいう. とくに, T はゴレンシュタイン環である.

c) 五つ組 $(R', T', \pi', M', \langle\ ,\ \rangle')$ から $(R, T, \pi, M, \langle\ ,\ \rangle)$ への射とは $\mathcal{O}$-代数としての準同型 $\alpha : R' \to R$ と $\beta : T' \to T$ で以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{\ \alpha\ } & R \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T' & \xrightarrow{\ \beta\ } & T. \end{array}$$

さらに単射$\xi : M \hookrightarrow M'$ による M の像 $\xi(M)$ は T'-安定な $\mathcal{O}$-直和因子であり, 上記図式により与えられる T の作用と *compatible* であることも仮定する. (ただし, $\langle\ ,\ \rangle'$ の $\xi(M)$ への制限は $\langle\ ,\ \rangle$ に一致するとは限らない. このことが以下本質的である.)

双対性により $\hat{\xi} : M' \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M', \mathcal{O}) \to M \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$ がひきおこされ, $\langle\, \xi(x),\ y\,\rangle' = \langle\, x,\ \hat{\xi}(y)\,\rangle\ (\forall x \in M,\ \forall y \in M')$ を満たす.

$\mathcal{O}$-代数 R で $\mathcal{O}$-代数準同型 $f : R \to \mathcal{O}$ を持つものに対し, 不変量を [L] に従い以下のように定義する:

Ker f の R 内での零化域 $\mathrm{Ann}_R(\mathrm{Ker}\ f)$ の f による像は $\mathcal{O}$ 内のイデアルであり, それを η_f とあらわすことにする. R が有限平坦なゴレンシュタイン $\mathcal{O}$-代数なら, η_f は $\mathcal{O}$-加群準同型 $\mathcal{O} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{R} \simeq R \xrightarrow{f} \mathcal{O}$ による 1 の像で生成される. ここで$\hat{R} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(R,\ \mathcal{O})$ は R の双対化加群. 従ってこの場合にはワイルスによって考えられた不変量と一致する.

五つ組が与えられているときに $\mathcal{O}$-代数準同型 $f_T : T \to \mathcal{O}$ を固定し(固有形式の類似) $f_R = f_T \cdot \pi,\ f'_{T'} = f \cdot \beta,\ f'_{R'} = f'_{T'} \cdot \pi'$ とおく. すると不変量$\eta_T,\ \eta_{T'},\ \eta_R,\ \eta_{R'}$ が $f_T,\ f_{T'},\ f_R$, $f_{R'}$ から得られる.

補題. 五つ組の間の射で $(R',T',\pi',M',\langle\ ,\ \rangle') \to (R,T,\pi,M,\langle\ ,\ \rangle)$ $(R,T,\pi,M,\langle\ ,\ \rangle)$ が単純であり, T, T' が被約なものを考える. もし$\hat{\xi}\cdot\xi(M) = \Delta\cdot M$ がある T の元Δ に対し成り立つなら

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathcal{O}/\eta_{T'} \geq \mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathcal{O}/f_T(\Delta)\cdot\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathcal{O}/\eta_T$$

が成り立つ.

意味を説明する. $M/\hat{\xi}\cdot\xi(M)$ は合同加群と呼ばれているものであり, "old space" M と "new space" $M'^{\mathrm{new}} = M'/\xi(M)$ の元との合同関係を記述している. 実際合同加群は "old" ヘッケ環 T だけでなく"new"ヘッケ環 $T'^{\mathrm{new}} = \Im(T' \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M'^{\mathrm{new}})$ 上の加群になっている.

さて, ワイルスが不変量 η_f を導入した動機は完全交差性の判定 (やさらに $R \to T$ の同型判定法) にあった. (η_f と Bloch-加藤予想, つまり L 関数の値との関係もあるが, ここでは省略する.) T を完全交差環とすると. $\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathcal{O}/\eta_T = \mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathrm{Ker}\,f_T/(\mathrm{Ker}\,f_T)^2$ が成り立つ. もはや我々は T に対しては強力な同型判定法を持っているのでここでは T' が完全交差環になる条件を確立することにする.

命題. 五つ組の間の射 $(R',T',\pi',M',\langle\ ,\ \rangle') \to (R,T,\pi,M,\langle\ ,\ \rangle)$ があるとし, $(R,T,\pi,M,\langle\ ,\ \rangle)$ が単純で, T と T' は被約, T は完全交差環, $\hat{\xi}\xi(M) = \Delta\cdot M$, $\Delta\in T$ とする. もし

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathrm{Ker}\,f_{R'}/(\mathrm{Ker}\,f_{R'})^2 \leq \mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathrm{Ker}\,f_T/(\mathrm{Ker}\,f_T)^2 + \mathrm{length}_{\mathcal{O}}\,\mathcal{O}/\ f_T(\Delta)$$

が $\mathcal{O}$-代数準同型 $f: T \to \mathcal{O}$ に対して成り立つなら, 同型 $R' \simeq T'$が成り立ち, T' が完全交差環になる. さらに $M'\otimes_{\mathcal{O}} K$ が $T'\otimes_{\mathcal{O}} K$-自由加群であるとすると, $(R',T',\pi',M',\langle\ ,\ \rangle')$ もまた単純になる. つまり M' は T'-自由加群になる.

最初の部分は補題と Lenstra の同型判定法 [L] から従う.

M' の自由性は斉藤毅氏に教えてもらった. 議論は以下の通り. M はT-自由と仮定されている. T'-自由な M' の部分加群 F で $F \to M$ が全射になるものをとる. すると $M \to F \to M$ を得て, 本質的に$\Delta_0 : T \to T' \to T$による倍写像になっている(ように基底をとる. すでに T' は完全交差であることにも注意). $M \to M'$ は $\mathcal{O}$-直和因子なので $f : M \to M$ で以下の図式を可換にするものがある.

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ M & \xrightarrow{\ \xi\ } & M' & \xrightarrow{\ \hat{\xi}\ } & M \end{array}$$

同型で取り替えて$\Delta: M \to M' \to M$としてよい. すると$\Delta_0 = \Delta\cdot f$となり, $(\Delta_0)\subset(\Delta)$ が従う. $(\Delta_0) = (\Delta)$ を示せば $f\in\mathrm{Aut}_T M$ となり , $M'\simeq F$となる.

ある$\alpha\in T$により$\Delta_0 = \alpha\cdot\Delta$ となる. 仮定により $f_T(\Delta_0) = f_T(\Delta)$ となるのでα が単数であることが従う.

志村曲線に適用する際にはまず 双対性 $R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma(S_K,\mathcal{O}),\mathcal{O}) \simeq R\Gamma(S_K,\mathcal{O}),\mathcal{O})$ におけるヘッケ環の作用を見る必要がある (単純に考えると反傾表現になってしまうので良くない). 本当は determinant でひねることで調節するが簡単のため $\det\bar{\rho} = \bar{\chi}_{\mathrm{cycle}}$ にしておけばその部分の成分に対し作用込みで成立する. g が偶数の場合も同様である.

定理を適用する際に一番問題になるのは $\xi: M \to M'$ が $\mathcal{O}$-直和因子になるという部分である. g が偶数なら単に点集合の問題なので容易であるが g が奇数の場合が問題になる.

コンパクト開部分群 $K = \mathrm{GL}_2(o_v) \cdot K^v$ を固定する. $\pi_{i,v} : S_{K_0(v)\cap K} \to S_K$ $(i = 1, 2)$ を退化写像とする. $v \not| p$ としコホモロジー群に引き起こされた写像

$$H^1(S_K, \mathbf{Z}_p) \oplus H^1(S_K, \mathbf{Z}_p) \to H^1(S_{K_0(v)\cap K}, \mathbf{Z}_p)$$

$$(f_1, f_2) \mapsto p_1^* f_1 + p_2^* f_2$$

を考える.

定理. $v \not| p$ と仮定する.

$$H^1(S_K, \mathbf{Z}_p) \oplus H^1(S_K, \mathbf{Z}_p) \to H^1(S_{K_0(v)\cap K}, \mathbf{Z}_p)$$

の像は$\bar{\rho}|_{D_\mathfrak{p}}$ が *flat* か *ordinary* な部分に限れば *Eisenstein* な部分を除き $\mathbf{Z}_p$-直和因子になっている. 但し $K = K_1(\mathfrak{p}^n)_\mathfrak{p} \cdot K^\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}|p$, $n = 0, 1$.

モデュラー曲線の場合には Ribet が "伊原の補題" と名付けた性質である. その場合は群コホモロジーの議論で証明できるがその方法を一般化することはできない. Diamond と Taylor は $\mathbf{Q}$ 上の p で良還元を持つ志村曲線の場合に数論幾何的な方法を開発した (p-進ホッジ理論も使われる). 我々の場合も数論幾何的な方法を使うが, 良還元を持たない場合にも適用できる利点がある. ポイントは supersingular な点の振る舞いにある. 証明の過程で mod p-モデュラー形式の興味深い表示も得られるが, ここでは省略する.

§7. レベルの降下

楕円曲線に今までの結果を適用しようとすると $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$-セール予想を解く必要がある. 以下の結果を紹介しておく.

定理 (mod 3 セール予想の特別な場合). Fを次数 g の総実代数体とする. $\bar{\rho}: G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ を既約, 全ての複素共役に関し奇な表現とし, 以下の条件を仮定する:

1) $\bar{\rho}|_{F(\sqrt{-3})}$ が絶対既約, $\bar{\rho}|_{D_v}$, $v|3$ は *ordinary,* かつ *3* が F で不分岐.

2) gが偶数の時にはさらに

2_a) ある $v|3$ で $\bar{\rho}|_{D_v}$が *flat* でないか

2_b) ある $v \not| 3$ で $\bar{\rho}|_{D_v}$が絶対既約か, 又は $0 \to \chi \to \bar{\rho}|_{D_v} \to \chi \to 0$ の形の I_v で分裂しない拡大になる

のいずれかが満たされるものとする.

この時 $\mathrm{GL}_{2,F}$の タイプ $(2, \ldots, 2)$ の尖点表現 π で $\bar{\rho} \simeq \rho_{\pi,\lambda} \bmod \lambda$, $\mathfrak{f}_\pi$ は極小な導手, $\det \rho_{\pi,\lambda}/\chi_{\mathrm{cycle}}$は p と素となるものが存在する.

これは Langlands-Tunnel の定理, ordinary form についての肥田の結果 [H] と以下の結果から従う.

定理 (レベル最適化). F を総実代数体とし, F と $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ が線形独立とする. $v \not| p$ をとる. 既約なmod p-表現 $\bar{\rho}$ が

a) $p = 2$ なら$\bar{\rho}|_{F(\sqrt{-1})}$ が, $p = 3$ なら $\bar{\rho}|_{F(\sqrt{-3})}$ が絶対既約

b) $\bar{\rho} \simeq \rho_{\pi,\lambda}$, πはタイプ $(k_1, \ldots, k_g)$, $k_i \geq 2$, 係数環 $\mathcal{O}$ の尖点表現 (ただし, g が偶数の時はπ_wが本質的に二乗可積分になるような $w \neq v$が存在するとする)

としてえられているとする．もし $\bar{\rho}|_{D_v}$ が不分岐で $q_v \equiv 1 \bmod p$ となっている場合を除けば π と同じタイプの尖点表現π'で，$\bar{\rho} \simeq \rho_{\pi',\lambda}$, $\det \rho_{\pi',\lambda}/\chi_{\mathrm{cycle}}^{\alpha}$ は位数が p と素，係数環が $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}$, $\mathfrak{f}_{\pi'}|\mathfrak{f}_{\pi}$, v-成分 $\mathfrak{f}_{\pi',v}$が $\bar{\rho}$のアルティン導手と等しくなるものが存在する．$\alpha = \sup_{\iota \in I_F}\{k_\iota - 1\}$ は $\rho_{\pi,\lambda}$ のウエイトである．

この定理は (ほぼ) F. Jarvis によっても独立に示されている[Ja1], [Ja2].

注意．もちろん $F = \mathbf{Q}$ の時には知られている結果である．$\mathrm{Art}\,\bar{\rho}|_{I_v} - n_{\pi,v} = \mathrm{Art}\,\rho_{\pi,\lambda}|_{I_v} - \mathrm{Art}\,\bar{\rho}|_{I_v} = \dim_k \bar{\rho}^{I_v} - \dim_k \rho_{\pi,\lambda}^{I_v}$ だから $\dim_k \bar{\rho}^{I_v} \neq \dim_k \rho_{\pi,\lambda}^{I_v}$ の時が問題になる．分岐が激しい ($\dim_k \bar{\rho}^{I_v} = 1$) ほうが証明はやさしい．$\bar{\rho}$ が vで不分岐, $q_v \not\equiv 1 \bmod p$ のときには Mazur の原理と呼ばれる．除外されている $\bar{\rho}|_{D_v}$ が不分岐, $q_v \equiv 1 \bmod p$ の場合は $F = \mathbf{Q}$, ウエイト 2 なら Ribet による有名な結果である (この場合が一番難しい). Ordinary の仮定は $v|3$ でのウェ イトとレベルの最適化のためにのみ使われるので, 近い将来に不要になると思われる．また, Ribet の証明 [Ri] も拡張可能と思われる．

g が偶数の時には有限素点で分岐した四元数環に伴う志村曲線を使う必要があるので仮定が増えているが, Jarvis の Carayol の補題 [Car 2] を使う方法では 分岐している場合には仮定がはずせる．

Carayol の補題と完全複体の原理との関係については皆さんにお任せする事にしたい．

§8. お話の終わり-楕円曲線

Fontaine-Mazur 予想に関して得られた結果を楕円曲線に応用してみる．

定理．

E を総実代数体 F上の楕円曲線とする．

1 ．3 は Fで不分岐.

2 ．$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{E,3} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ を三分点上に引き起こされるガロア表現とするとき $\bar{\rho}_{E,3}|_{F(\sqrt{-3})}$ は絶対既約である．

3 ．E は *3* で準安定還元を持ち $\bar{\rho}_{E,3}|_{D_v}$は $v|3$ に対し *ordinary* である．gが偶数の時にはさらに

3_a*)* ある $v|3$ で $\bar{\rho}|_{D_v}$が *flat* でないか,

3_b*)* ある $v \not| 3$ で $\bar{\rho}|_{D_v}$が絶対既約か, 又は $0 \to \chi \to \bar{\rho}|_{D_v} \to \chi \to 0$ の形の I_v で分裂しない拡大になる

このとき E はモデュラーである, つまりタイプ $(2,\ldots,2)$ の尖点表現 π があって $L_v(E,s) = L_v(\pi,s)$ が全ての vに対し成立する．とくに, E に対する *Hasse-Weil* 予想は正しい．

定理を適用する際に「 $\bar{\rho}|_{D_v}$ が分岐して可約なら $\dim_k \bar{\rho}|^{I_v} = 1$」という仮定をおいていたことに注意する．準安定性を仮定しないときには (一次指標によってひねれないので) この仮定が満たされるとは限らない．Fontaine-Mazur 予想も全て修正する．するとレベルの降下がより難しくなるが楕円曲線への応用には十分なだけ一般化できる．詳細は省略する．もちろん望むなら 5 分点を使った結果を出すこともできるが, 余り見やすい形にならないのでここでは省略する．

これは F 上の谷山ー志村予想に対する第一段階の結果である．私が数論を始めた頃にはこの予想は現在の我々の手が届かないほど難しいと思われていた．今や望みさえすれば手にはいるのである．ゼータ関数の解析接続と関数等式を証明したいという誘惑から逃れられる数論の人は多くないだろう．かつて彼の予想が証明された際に Weil がいったように「 数論は静止していない」("Number theory is not standing still") のを実感するときである．

REFERENCES

[Carl] Carayol, H., *Sur les représentations p-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. IV, Ser 19 (1986), 409-468.

[Car 2] Carayol, H., *Sur les représentations galoisiennes* mod ℓ *attachëe aux formes modulaires*, Duke Math. J. **59** (1989), 785-801.

[D] Diamond, F., *On deformation rings and Hecke rings* (1994).

[D2] ———, *The Taylor-Wiles construction and multiplicity one* (1996).

[DT 1] Diamond, F, Taylor, R., *Lifting modular* mod ℓ *representations*, Duke Math. J. **74** (1994), 253-269.

[DT 2] Diamond, F, Taylor, R., *Non-optimal levels of* mod ℓ *modular representations*, Invent. Math. **115** (1994), 435-462.

[Fu] Fujiwara, K ., *Deformation rings and Hecke algebras in the totally real case* (1996).

[FL] Fontaine, J.M, Lafaille, G., *Constructions de représentations p-adiques*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **15** (1982), 547-608.

[H] Hida, H., *On p-adic Hecke algebras for* GL_2 *over totally real fields*, Ann. of Math. **128** (1988), 295-384.

[Ja 1] Jarvis, F., *Mazur's principle for totally real fields of odd degree, Preprint* (1996).

[Ja 2] Jarvis, F., *Optimal levels for modular* mod *ell representations over totally real fields, Preprint* (1996).

[JL] Jacquet, H, Langlands, R.P., *Automorphic forms on* GL_2, Lecture Notes in Math., vol. 114, Springer Verlag, Berlin Heiderberg New York, 1970.

[L] Lenstra, *Complete intersections and Gorenstein rings*, Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem, International press, Cambridge, 1995, pp. 99-109.

[M] Mazur, B., *Deforming Galois representations*, Galois Groups over $\mathbf{Q}$, MSRI Publications, vol. 16, Springer Verlag, New York.

[O] Ohta, M., *On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve*, Jpn. J. Math. **9** (1983), 1-26.

[Ray] Raynaud, M., *Schémas en groupes de type* $(p,..,p)$, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241-280.

[Ri] Ribet, K., *report on* mod ℓ *representations of* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ **55**, 639-676.

[S1] Shimura, G., *On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. (1970), 144-222.

[S2] Shimura, G., *On the critical values of certain Dirichlet series and the periods of automorphic forms*, Invent. Math. **94** (1988), 245-305.

[Sh] Shimizu, H., *Theta series and modular forms on* GL_2, J. Math. Soc. Japan **24** (1973), 638-683.

[T] Taylor, R., *On Galois representations associated to Hilbert modular forms Invent. Math.* **98** (1989), 265-280.

[TW] Taylor, R, Wiles, A., *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (1995).

[W] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (1995).

[W2] ———, *On ordinary λ-adic representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), 529-573.