数理解析研究所講究録
1007 巻 1997 年 1-10

The comparison of estimators of a reliability function in the Weibull case

筑波大・数学 田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

信頼性理論において, 信頼度関数 (reliability function) は重要な役割を果たす ([S86]). 本論では信頼度関数の推定について考察する. 正規分布からの無作為標本に基づく推定において分散が既知のときは Zacks and Even [ZE66], 分散が未知のときには Zacks and Milton [ZM71], Hurt [H80] らによって MSE (mean squared error) を用いて比較されている. Hurt *et al.* [HNW95] は指数分布からの無作為標本に基づいて信頼度関数の単純推定量, 最尤推定量, 一様最小分散不偏推定量, 不変最適推定量 の IMSE (integrated mean squared error) を計算し不変最適推定量, 最尤推定量, 一様最小分散不偏推定量, 単純推定量の順に IMSE を漸近的に小さくすることを示した. ここでは指数分布を含む Weibull 分布について考察し, [HNW95] の結果はその特別の場合として得られる.

2 信頼度関数の IMSE 効率と IMSE 欠損量

$X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立にいずれも密度 $f(x;\theta)$, $(\theta \in \Theta \subset \mathbf{R})$ に従う実確率変数とする. このとき任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $R_\theta(t) := \int_t^\infty f(x;\theta)dx$ を信頼度関数と呼び信頼度関数 $R_\theta(t)$ の推定量 $\hat{R}(t)$ の IMSE を $\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}(t)) := \int_{-\infty}^\infty E_\theta[(\hat{R}(t) - R_\theta(t))^2]dt$ で定義する.

信頼度関数 $R_\theta(t)$ の 2 つの推定量 $\hat{R}_{1n}(t)$, $\hat{R}_{2n}(t)$ について, ある $r > 0$ に対して正数列 k_n を $n^r\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{1n})$ と $n^r\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{2k_n})$ が同じ値に収束するように選ぶとき $\lim_{n\to\infty} k_n/n$ が k_n の選び方によらず確定すれば, この値を$\hat{R}_{2n}$ に対する $\hat{R}_{1n}$ の IMSE 効率 (efficiency) といい $e(\hat{R}_{1n}, \hat{R}_{2n})$ で表す. 各 $j = 1, 2$ について, $\hat{R}_{jn}(t)$ の IMSE が

$$\lim_{n\to\infty} n^r\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{jn}) = \tau_j^2 > 0 \qquad (j = 1, 2)$$

を満たしていれば

$$e(\hat{R}_{1n}, \hat{R}_{2n}) = (\tau_2^2/\tau_1^2)^{1/r} \tag{2.1}$$

が成り立つ.

また $e(\hat{R}_{1n}, \hat{R}_{2n}) = 1$ のとき

$$\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{2k_n}) = \mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{1n}) + o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$$

となるように正数列 $\{k_n\}$ を選んで $\lim_{n\to\infty}(n-k_n)$ が存在し, これが k_n のとり方に依らないとき, これを $\hat{R}_{2n}(t)$ に対する $\hat{R}_{1n}(t)$ の IMSE 欠損量 (deficiency) といい $d(\hat{R}_{1n}, \hat{R}_{2n})$ で表す. 各 $j = 1, 2$ について, $\hat{R}_{jn}(t)$ の IMSE が

$$\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{jn}) = \frac{\alpha(\theta)}{n^r} + \frac{\delta_j(\theta)}{n^{r+1}} + o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \quad \alpha(\theta) > 0$$

と展開されるとき

$$d(\hat{R}_{1n}, \hat{R}_{2n}) = \frac{1}{r\alpha(\theta)}\{\delta_1(\theta) - \delta_2(\theta)\} \tag{2.2}$$

になる ([HL70], [TA96]).

3 Weibull 分布の場合の信頼度関数の推定

$X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立にいずれも密度

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{c}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつ Weibull 分布に従うとする. 但し $c > 0$ で既知とし, $\theta > 0$ で未知の母数とする. このとき信頼度関数 $R_\theta(t)$ は

$$R_\theta(t) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^c\right\} & (t \geq 0), \\ 1 & (t < 0) \end{cases}$$

となり $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i^c$ とおくと $R_\theta(t)$ の単純推定量 $\hat{R}_{\mathrm{N}}(t)$, 最尤推定量 $\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)$, 一様最小分散不偏推定量 $\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}(t)$ はそれぞれ次のようになる.

$$\hat{R}_{\mathrm{N}}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \chi_{\{X_i > t\}}(\mathbf{X}),$$

$$\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{nt^c}{Z_n}\right\} & (t \geq 0), \\ 1 & (t < 0), \end{cases}$$

$$\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}(t) = \begin{cases} \left(\frac{Z_n - t^c}{Z_n}\right)^{n-1} \chi_{\{Z_n > t^c\}}(Z_n) & (t \geq 0), \\ 1 & (t < 0). \end{cases}$$

但し, $\chi_A(\cdot)$ は集合 A の定義関数とする.

定理 $R_\theta(t)$ の推定量 $\hat{R}_{\mathrm{N}}(t)$, $\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)$, $\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}(t)$ の IMSE はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{N}}) &= \frac{1}{n}\frac{\Gamma(1/c)}{2^{1/c}}\left(2^{1/c}-1\right)\left(\frac{\theta}{c}\right), \\ \mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{ML}}) &= \frac{\Gamma(2+1/c)}{2^{2+1/c}}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{16n^2}\left(10-\frac{21}{c}+\frac{7}{c^2}\right)\right\}\left(\frac{\theta}{c}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}) &= \frac{\Gamma(2+1/c)}{2^{2+1/c}}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{8n^2}\left(6-\frac{3}{c}+\frac{1}{c^2}\right)\right\}\left(\frac{\theta}{c}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

定理を証明する前に次の補題を証明する.

補題 $M_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ を満たす数列 M_n と任意の $q \in \mathbf{R}$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(M_n+q)}{\Gamma(M_n)} &= M_n^q\left\{1+\frac{1}{2M_n}q(q-1)+\frac{1}{3M_n^2}q(q-1)(q-2)\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{8M_n^2}q(q-1)(q-2)(q-3)+o\left(\frac{1}{M_n^2}\right)\right\} \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

証明 Stirling の公式より

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(M_n+q)}{\Gamma(M_n)} &= \frac{\sqrt{2\pi}(M_n+q)^{M_n+q-1/2}e^{-(M_n+q)}e^{\mu(M_n+q)}}{\sqrt{2\pi}M_n^{M_n-1/2}e^{-M_n}e^{\mu(M_n)}} \\ &= M_n^q e^{-q}\left(1+\frac{q}{M_n}\right)^{M_n+q-1/2}e^{\mu(M_n+q)-\mu(M_n)}. \end{aligned}$$

になる. 但し

$$\mu(s) = \frac{1}{12s} - \frac{\eta}{360s^3} \quad (0 < \eta < 1)$$

とする．また

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{q}{M_n}\right)^{M_n+q-1/2} &= \exp\left[\left(M_n+q-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{q}{M_n}\right)\right] \\
&= \exp\left[\left(M_n+q-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{q}{M_n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{M_n}\right)^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{q}{M_n}\right)^3+o\left(\frac{1}{M_n^3}\right)\right\}\right] \\
&= \exp\left[q\left\{1+\frac{1}{2M_n}(q-1)+\frac{1}{4M_n^2}q-\frac{1}{6M_n^2}q^2\right\}\right. \\
&\qquad \left.+o\left(\frac{1}{M_n^2}\right)\right], \\
\mu(M_n+q)-\mu(M_n) &= -\frac{q}{12M_n^2}+o\left(\frac{1}{M_n^2}\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(M_n+q)}{\Gamma(M_n)} \\
&= M_n^q e^{-q}\exp\left[q\left\{1+\frac{1}{2M_n}(q-1)-\frac{1}{12M_n^2}(2q-1)(q-1)\right\}+o\left(\frac{1}{M_n^2}\right)\right] \\
&= M_n^q e^{-q}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}q^j\left[1+\frac{j}{2M_n}(q-1)-\frac{j}{12M_n^2}(2q-1)(q-1)\right. \\
&\qquad \left.+\frac{j(j-1)}{8M_n^2}(q-1)^2+o\left(\frac{1}{M_n^2}\right)\right] \\
&= M_n^q\left[1+\frac{1}{2M_n}q(q-1)+\frac{1}{3M_n^2}q(q-1)(q-2)\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{8M_n^2}q(q-1)(q-2)(q-3)+o\left(\frac{1}{M_n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

になる． ■

定理の証明

$$\begin{aligned}
E_\theta[\{\hat{R}_{\mathrm{N}}(t)-R_\theta(t)\}^2] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E_\theta[\{\chi_{\{X_i\geq t\}}(\mathbf{X})-R_\theta(t)\}^2] \\
&\quad +\frac{1}{n^2}\sum\sum_{i\neq j}^{n}E_\theta[\{\chi_{\{X_i\geq t\}}(\mathbf{X})-R_\theta(t)\}\{\chi_{\{X_i\geq t\}}(\mathbf{X})-R_\theta(t)\}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} E_\theta[\{\chi_{\{X_1 \geq t\}}(X_1) - R_\theta(t)\}^2 \chi_{\{X_1 \geq t\}}(X_1)] \\
&\qquad + \frac{1}{n} E_\theta[\{\chi_{\{X_1 \geq t\}}(X_1) - R_\theta(t)\}^2 \chi_{\{X_1 < t\}}(X_1)] \\
&= \frac{1}{n} R_\theta(t)\,(1 - R_\theta(t))
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{N}}) &= \frac{1}{n}\int_0^\infty R_\theta(t)(1-R_\theta(t))dt \\
&= \frac{1}{n}\frac{\Gamma(1/c)}{2^{1/c}}\left(2^{1/c}-1\right)\left(\frac{\theta}{c}\right)
\end{aligned}
$$

になる. いま

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{ML}}) &= \int_0^\infty E_\theta[\hat{R}^2_{\mathrm{ML}}(t)]dt - 2\int_0^\infty R_\theta(t) E_\theta[\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)]dt + \int_0^\infty R^2_\theta(t)dt \\
&=: I_{1\mathrm{ML}} - 2I_{2\mathrm{ML}} + I_{3\mathrm{ML}}
\end{aligned}
$$

と表すと

$$
\begin{aligned}
I_{1\mathrm{ML}} &= \frac{1}{2^{1/c}}\left(\frac{\theta}{c}\right)\frac{\Gamma(n+1/c)}{n^{1/c}\Gamma(n)}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right), \\
I_{3\mathrm{ML}} &= \frac{1}{2^{1/c}}\left(\frac{\theta}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)
\end{aligned}
$$

になる. また

$$
I_{2\mathrm{ML}} = \left(\frac{\theta}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)E_\theta\left[\left(\frac{Z_n/n}{\theta^c + Z_n/n}\right)^{1/c}\right]
$$

になる. そこで

$$
h(s) := \left(\frac{s}{s+\theta^c}\right)^{1/c}, \qquad S_n := \frac{Z_n}{n}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&h(s)|_{s\to\theta^c} = \frac{1}{2^{1/c}}, \\
&h'(s)|_{s\to\theta^c} = \frac{1}{2c}\frac{1}{\theta^c 2^{1/c}}, \qquad E_\theta[S_n - \theta^c] = 0,
\end{aligned}
$$

$$h''(s)|_{s\to\theta^c} = \frac{1-3c}{4c^2}\frac{1}{\theta^{2c}2^{1/c}}, \qquad E_\theta[(S_n-\theta^c)^2] = \frac{1}{n}\theta^{2c},$$
$$h'''(s)|_{s\to\theta^c} = \frac{(1-2c)(1-7c)}{8c^3}\frac{1}{\theta^{3c}2^{1/c}}, \qquad E_\theta[(S_n-\theta^c)^3] = \frac{2}{n^2}\theta^{3c},$$
$$h^{(4)}(s)|_{s\to\theta^c} = \frac{(1-5c)(1-13c+18c^2)}{16c^4}\frac{1}{\theta^{4c}2^{1/c}}, \quad E_\theta[(S_n-\theta^c)^4] = 3\frac{n+2}{n^3}\theta^{4c}$$

であるから

$$\begin{aligned} E_\theta[h(S_n)] &= \frac{1}{2^{1/c}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{1-3c}{4c^2}\frac{1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{(1-2c)(1-7c)}{8c^3}\frac{2}{n^2}\right.\\ &\qquad \left.+\frac{1}{4!}\frac{(1-5c)(1-13c+18c^2)}{16c^4}\frac{n+2}{n^3}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

となる. つまり

$$\begin{aligned} I_{2\mathrm{ML}} &= \frac{1}{2^{1/c}}\left(\frac{\theta}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\left[1+\frac{1-3c}{8nc^2}+\frac{(1-2c)(1-7c)}{24n^2c^3}\right.\\ &\qquad \left.+\frac{(1-5c)(1-13c+18c^2)}{128n^2c^4}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

になる. よって補題より

$$\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{ML}}) = \frac{\Gamma(2+1/c)}{2^{2+1/2}}\left(\frac{\theta}{c}\right)\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{16n^2}\left(10-\frac{21}{c}+\frac{7}{c^2}\right)\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる. また

$$\begin{aligned} \int_0^\infty E_\theta\left[\hat{R}^2_{\mathrm{UMVU}}(t)\right]dt &= \frac{1}{\Gamma(n)\theta^{cn}}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z/\theta^c}\int_0^{z^{1/c}}\left(\frac{z-t^c}{z}\right)^{2(n-1)}dtdz\\ &= \frac{1}{\Gamma(n)\theta^{cn}c}\int_0^\infty z^{n-1+1/c}e^{-z/\theta^c}dz\int_0^1 s^{2(n-1)}(1-s)^{-1+1/c}ds\\ &= \frac{\Gamma(n+1/c)}{\Gamma(n)}B\left(2n-1,\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\theta}{c}\right), \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty R_\theta^2(t)dt = \frac{\Gamma(1/c)}{2^{1/c}}\left(\frac{\theta}{c}\right)$$

であるから補題より

$$\begin{aligned} \mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}) &= \int_0^\infty E_\theta[\hat{R}^2_{\mathrm{UMVU}}(t)]dt-\int_0^\infty R^2_\theta(t)dt\\ &= \frac{\Gamma(2+1/c)}{2^{2+1/c}}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{8n^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{3}{c}+6\right)\right\}\left(\frac{\theta}{c}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

になる. ■

系 1 最尤推定量, 一様最小分散不偏推定量に対する単純推定量の漸近効率 (efficiency) は等しく次のようになる.

$$\begin{aligned} e(\hat{R}_{\mathrm{N}}, \hat{R}) &= \frac{1}{4c}\left(1+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2^{1/c}-1} \\ &< \frac{1}{e\sqrt{2}(\log 2)^2} \fallingdotseq 0.541427. \end{aligned}$$

ただし $\hat{R}$ は $\hat{R}_{\mathrm{ML}}, \hat{R}_{\mathrm{UMVU}}$ とする.

証明 前半は (2.1) から明らか. 後半については

$$\begin{aligned} k &:= \frac{2^{3/2}}{e(\log 2)^2}, \\ l(c) &:= k(2^{1/c}-1) - \frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{c}\right) \end{aligned}$$

とおいて

$$l(c) \geq 0, \qquad (\forall c > 0)$$

を示せば良い.

$$l'(c) = -\frac{\log 2}{c^2} 2^{1/c}\left\{k - \frac{1}{\log 2}\left(1+\frac{2}{c}\right)2^{-1/c}\right\}$$

となるから, $x := 1/c$ として

$$m(x) := k - \frac{1}{\log 2}(1+2x)2^{-x}$$

とおくと

$$m'(x) = -\frac{1}{\log 2}2^{-x}\left\{2-(1+2x)\log 2\right\}$$

となる. $m'(x) = 0$ を x について解くと

$$x = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{2}$$

になり, このとき

$$m\left(\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

つまり $l'(c)\geq 0$ となる.

$$\lim_{c\to\infty} l(c)=0$$

であるから $m(c)\geq 0$ $(\forall c>0)$ が言えた. ■

系 2 最尤推定量に対する一様最小分散不偏推定量の IMSE 欠損量は次のようになる.

$$d(\hat{R}_{\mathrm{UMVU}},\hat{R}_{\mathrm{ML}}) \;=\; \frac{1}{16c^2}(2c^2+15c-5).$$

系 2 の結果は (2.2) と定理から直接的に導かれる.

系 3 $c=1$ の場合, $R_\theta(t)$ の推定量 $\hat{R}_{\mathrm{N}}(t)$, $\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)$, $\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}(t)$ の IMSE はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{N}}) &= \frac{\theta}{2n},\\
\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{ML}}) &= \frac{\theta}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\\
\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}) &= \frac{\theta}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

$c=1$ の場合に系 1,2 から

$$e(\hat{R}_{\mathrm{N}},\hat{R})=\frac{1}{2},\qquad d(\hat{R}_{\mathrm{UMVU}},\hat{R}_{\mathrm{ML}})=\frac{3}{4}$$

となり [HNW95] の結果に一致する.

4 偏り補正

ここでは最尤推定量の偏り補正を行う．まず $h(s) := \exp\{-t^c/s\}$, $S_n := Z_n/n$ とおくと

$$E_\theta[\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)] \;=\; E_\theta[h(S_n)]$$

となり，また

$$\begin{aligned}
&h(s)|_{s\to\theta^c} = R_\theta(t), \\
&h'(s)|_{s\to\theta^c} = -\frac{1}{\theta^c}\log R_\theta(t)\cdot R_\theta(t), && E_\theta[S_n-\theta^c]=0, \\
&h''(s)|_{s\to\theta^c} = \frac{1}{\theta^{2c}}\left\{\log^2 R_\theta(t) + 2\log R_\theta(t)\right\} R_\theta(t), && E_\theta[(S_n-\theta^c)^2] = \frac{1}{n}\theta^{2c}
\end{aligned}$$

になる．よって $R_\theta(t)$ の最尤推定量 $\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)$ の偏りは

$$E_\theta[\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)] - R_\theta(t) \;=\; \frac{1}{2n}\left\{\log^2 R_\theta(t) + 2\log R_\theta(t)\right\} R_\theta(t) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる．そこで $\hat{R}_{\mathrm{ML}}$ の補正推定量 $\hat{R}^*_{\mathrm{ML}}$ として

$$\hat{R}^*_{\mathrm{ML}}(t) := \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t) - \frac{1}{2n}\left\{\log^2 \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t) + 2\log \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)\right\} \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)$$

を考える．このとき

$$E_\theta[\hat{R}^*_{\mathrm{ML}}(t) - R_\theta(t)] = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が示される．また

$$\begin{aligned}
\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}^*_{\mathrm{ML}}) &= \mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}_{\mathrm{ML}}) \\
&\quad -\frac{1}{n}\int_0^\infty E_\theta[(\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t) - R_\theta(t))(\log^2 \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t) + 2\log \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t))\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)]dt \\
&\quad +\frac{1}{4n^2}\int_0^\infty E_\theta[(\log^2 \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t) + 2\log \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t))^2 \hat{R}^2_{\mathrm{ML}}(t)]dt
\end{aligned}$$

になり，

$$\int_0^\infty E_\theta[\hat{R}^2_{\mathrm{ML}}(t)\log^J \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)]dt = (-1)^J\left(\frac{\theta}{c}\right)\frac{\Gamma(J+1/c)}{2^{J+1/c}}\left\{1 + \frac{1}{2n}\frac{1}{c}\left(\frac{1}{c}-1\right)\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty R_\theta(t)E_\theta[\hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)\log^J \hat{R}_{\mathrm{ML}}(t)]dt &= (-1)^J\left(\frac{\theta}{c}\right)\theta^{cJ}\Gamma(J+1/c)E_\theta\left[\frac{S_n^{1/c}}{(\theta^c+S_n)^{J+1/c}}\right] \\
&= (-1)^J\left(\frac{\theta}{c}\right)\frac{\Gamma(J+1/c)}{2^{J+1/c}}\left[1 + \frac{1}{8c^2n}\left\{1 - c(2J+3) + c^2J(J+1)\right\}\right] + o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

$$(J = 0, 1, 2, \ldots)$$

より

$$\mathrm{IMSE}_\theta(\hat{R}^*_{\mathrm{ML}}) = \frac{\Gamma(2+1/c)}{2^{2+1/c}}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{8n^2}\left(6-\frac{3}{c}+\frac{1}{c^2}\right)\right\}\left(\frac{\theta}{c}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

を得る．このことと定理より

$$d(\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}, \hat{R}^*_{\mathrm{ML}}) = 0$$

となり，補正最尤推定量 $\hat{R}^*_{\mathrm{ML}}$ は$\hat{R}_{\mathrm{UMVU}}$ と IMSE の意味で $o(1/n^2)$ まで漸近的に同等になる．

参考文献

[HL70] Hodges, J. L. and Lehmann, E. L. (1970). Deficiency. Ann. Math. Statist., **41**, 783-801.

[H80] Hurt, J. (1980). Estimates of reliability for the normal distribution. *Appl. Math.*, **25**, 432-444.

[H86] Hurt, J. (1986). Asymptotic expansions for moments of stochastic processes and their applications. *Statistics and Decisions* **4**, 251-271.

[HNW95] Hurt, J., Novák, B. and Wertz, W. (1995). Invariantly optimal look on reliability estimation in the exponential case . *Statistics and Decisions* **13**, 193-197.

[S86] Sinha, S. K. (1986). *Reliability and Life Testing.* Wiley, New York.

[TA96] Tanaka, H. and Akahira, M. (1996). Deficiency of minimum discrepancy estimators of multinomial parameters. *Statistics and Decisions* **14**, 241-251.

[ZE66] Zacks, S. and Even, M. (1966). The efficiencies in small samples of the maximum likelihood and best unbiased estimators of reliability functions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **61**, 1033-1050.

[ZM71] Zacks, S. and Milton, R. C. (1971). Mean square errors of the best unbiased and maximum likelihood estimators of tail probabilities in normal distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **66**, 590-593.