数理解析研究所講究録
1012巻 1997年 78-81



# 有理型関数の星型であるための十分条件について

布川　護　(ぬのかわ　まもる・群馬大学教育学部)
山川　陸夫　(やまかわ　りくお・芝浦工業大学工学部)
池田　彰　(いけだ　あきら・群馬大学教育学部)
小池　尚也　(こいけ　なおや・群馬大学教育学部)
大田　悦彰　(おおた　よしあき・群馬大学教育学部)

単位円 $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ で正則な関数

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

の集合を $A(p)$ とする。

尾崎 [ 4, 定理 1 の (ii) ] は次の定理を証明した。

**定理 A.**　$f(z) \in A(1)$ かつ $\Delta$ で

$$1 + \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} < \frac{3}{2}$$

ならば、$f(z)$ は $\Delta$で単葉である。

つぎに、R.Singh と S.Singh [ 7, 定理 6 ] は、定理 A を改良して次の定理を証明した。

**定理 B.**　$f(z) \in A(1)$ かつ $\Delta$ で

$$1 + \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} < \frac{3}{2}$$

ならば、$f(z)$ は $\Delta$ で星型である。

すなわち、$f(z)$ は $\Delta$ で単葉で $\Delta$ を原点に関して星型領域に写像する。

ところで、この定理に関して、布川 [ 3 ] はさらに次の定理 C が成立するであろうことを予想した。

**定理 C.**　$f(z) \in A(p)$ かつ $\Delta$ で

$$1 + \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} < p + \frac{1}{2}$$

ならば、$f(z)$ は $\Delta$ で p-valently starlike (p 葉星型) となる。

すなわち、$z$ が原点を中心とする任意の円 $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ の上を正の方向に一周すれば、$arg f(z)$ は恒に増加し、$f(z)$ は原点の周りを p 回転する。

この定理 C は、尾和 [ 5 ] によって証明された。

この小論文の目的は上記の定理に対応して有理型関数が星型となるための十分条件を得ることである。

$\Delta' = \{z : 0 < |z| < 1\}$ で正則な関数

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

の集合を $B$ とする。

定理を証明するために次の予備定理を必要とする。

**予備定理．** $w(z) = w_n z^n + w_{n+1} z^{n+1} + \cdots$ は $\Delta$ で正則とする。このとき、$z_0 = r_0 e^{i\theta}$, $0 < r_0 < 1$ として

$$|w(z_0)| = \operatorname*{Max}_{|z| \leq r_0} |w(z)|$$

すなわち円周 $|z| = r_0$ の上で $|w(z)|$ が $z = z_0$ で最大値をとるならば

$$\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = m$$

となる。

ただし、$m$ は実数で $m \geq n$ である。

この定理は、Jack [ 1 ], 福井と坂口 [ 6 ], Miller と Mocanu [ 2 ] によって得られている。

**定理 1.** $g(z) \in B$ かつ $\Delta'$ で

$$1 + \mathrm{Re}\frac{zg''(z)}{g'(z)} > -\frac{3}{2} \tag{1}$$

ならば $g(z)$ は $\Delta$ で meromorphic starlike (有理型星型) である。

すなわち $g(z)$ は $\Delta'$ で単葉であり $g(\Delta')$ の補集合は原点に関して星型となる。さらに、$z \in \Delta'$ ならば

$$|1 + \frac{g(z)}{zg'(z)}| \leq |z|^2$$

が成立する。

**証明．** $w(z)$ を次のように定義する。

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = -\frac{1}{1 - w(z)}.$$

このとき、$w(0) = w'(0) = 0$ となり、定理の仮定 (1) より、$\Delta'$ で明らかに $g'(z) \neq 0$ となるから $w(z)$ は $\Delta$ で正則である。

次に $\Delta$ で $|w(z)| < 1$ であることを証明したい。

今、単位円 $\Delta$ の中にある点 $z_0$が存在して、$|z| < |z_0|$ ならば$|w(z)| < 1$ かつ $|w(z_0)| = 1$ $(w(z_0) = e^{i\theta})$ ならば、予備定理より、

$$\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = k \geq 2$$

となる。
　次の簡単な計算によって

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(1+\frac{z_0 g''(z_0)}{g'(z_0)}) &= \mathrm{Re}(\frac{z_0 w'(z_0)}{1-w(z_0)} - \frac{1}{1-w(z_0)}) \\
&= \mathrm{Re}(\frac{k w(z_0)}{1-w(z_0)} - \frac{1}{1-w(z_0)}) \\
&= \mathrm{Re}(\frac{k(\cos\theta + i\sin\theta)}{(1-\cos\theta) - i\sin\theta} - \frac{1}{(1-\cos\theta) - i\sin\theta}) \\
&= -\frac{1+k}{2} \\
&\leq -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

を得る。
　このことは、(1) に反するので、$\Delta$ で $|w(z)| < 1$ となる。
　従って、$\Delta$ で

$$\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} < -\frac{1}{2} < 0$$

ということがわかり、
　さらに、Schwarz の補題より

$$|1 + \frac{g(z)}{zg'(z)}| \leq |z|^2$$

を得る。

## 文献


[ 1 ] I.S.Jack, Functions starlike and convex of order $\alpha$, Jour. London Math. Soc.(2), **3** (1971), 469-474.

[ 2 ] S.S.Miller and P.T.Mocanu, Second order differential inequalities in complex plane, Jour. Math. Anal. Appl. **65** (1978), 289-305.

[ 3 ] M.Nunokawa, On the multivalent functions, Indian J. Pure Appl. Math. **20** (1989), 577-582.

[ 4 ] S.Ozaki, Onthe theory of multivalent functions II, Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, **4** (1941), 45-87.

[ 5 ] S.Owa, On Nunokawa's conjecture for multivalent functions, Bull. Austral. Math. Soc. **41** (1990), 301-305.

[ 6 ] S.Fukui and K.Sakaguchi, An extention of a theorem of S.Ruscheweyh, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Nat. Sci. **29** (1980), 1-3.
[ 7 ] R.Singh and S.Singh, Some sufficient conditions for univalence and starlikeness, Colloq. Math. **47** (1982), 309-314.