数理解析研究所講究録
1013巻 1997年 236-241

「位置」と「運動量の有理関数」の同時測定に関する作用素測度について

福井大学工学部　坂口文則 (Fuminori Sakaguchi)
email:saka@dignet.fuee.fukui-u.ac.jp

1　はじめに

よく知られたように、正準共役な関係にある位置 Q と運動量 P のペアについては、その最小不確定状態の一つであるコヒーレント状態を用いて、両者の同時測定（量子光学でいういわゆるヘテロダイン検波）の作用素測度を表すことができ、また、この作用素測度はテンソル積によって自由度を拡張した空間の上で定義できる単純測定の作用素測度の部分トレースと考えることができる。これは、テンソル積空間 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$ 上で定義される作用素 $Q_0 \otimes I_1 - I_0 \otimes Q_1$ と $P_0 \otimes I_1 + I_0 \otimes P_1$ が交換可能で、両者の同時固有ベクトルを空間 $\mathcal{H}_1$ の自由度だけについて $\mathcal{H}_1$の真空ベクトルと内積を取ったものが空間 $\mathcal{H}_0$ のコヒーレント状態ベクトルに相当することに起因していることが知られている。[1]

このような関係は、正準共役ではないペアに関しても無数に考え得る。例えば、信号処理で用いられる連続ウェーブレット変換 [2] と密接な関係がある Q と P^{-1} のペアについては、上記の場合よりやや複雑ではあるが、類似の関係が成立し、元の空間では一般化測定となる非可換量の同時測定の問題を、テンソル積空間上の単純測定の問題にナイマルク拡張することができ、また、テンソル積空間上での同時固有状態の波動関数や $\mathcal{H}_1$ での真空に相当する状態の波動関数などの具体的な関数形が得られている。[3]

本報告では、同様に信号処理の問題と関連づけられる、さらに一般的な場合について議論を拡張し、「位置」と「運動量の（あるクラスの）有理関数」のペアの場合について類似の議論を論じる。もちろん、上記の2つの場合は、この特殊な場合として含まれる。

2　「位置」と「運動量の有理関数」の最小不確定状態

実数係数 $a_n, b_n, c_n, d_n \quad (n = 1, 2, \ldots N)$ を用いて

$$g(p) \equiv \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n p + b_n}{c_n p + d_n} \tag{1}$$

で定義できる有理関数 $g(p)$ を考える。（分子の整式の次数が分母の整式の次数より2以上大きくなく、かつ分母の整式の根がすべて実数となっているような任意の有理関数は、この形に書ける。） $g(p)$ の極はすべて実軸上にあり、小さい方から p_m $(m=1,2,...M)$ とする。また、表記の簡便化のため、p_0 を $-\infty$, p_{M+1} を ∞ と形式的に考えておく（これら2つについては、以下ではこれらを含む不等式の不等号 $\geq$ や $\leq$ を $>$ や $<$ と解釈する特別の約束をしておく。）

さて、以下ではこの関数に空間 $\mathcal{H}_0$ 上の運動量作用素 P_0 を代入して得られる作用素

$$g(P_0) \equiv \sum_{n=1}^{N} (a_n P_0 + b_n I_0)\,(c_n P_0 + d_n I_0)^{-1} \tag{2}$$

（但し、I_0 は $\mathcal{H}_0$ 上の恒等作用素）を考え、この $g(P_0)$ と $\mathcal{H}_0$ 上の位置作用素 Q_0 との間の最小不確定状態や同時測定の問題を考える。

正準共役関係 $[Q_0, P_0] = iI_0$ より、このペアの交換子は

$$[Q_0, g(P_0)] = ig'(P_0) \quad (\text{但し } g' \text{ は } g \text{ の1階微分}) \tag{3}$$

となり、不確定関係

$$\langle (\Delta Q_0)^2 \rangle \, \langle (\Delta g(P_0))^2 \rangle \geq \frac{1}{4} [\langle g'(P_0) \rangle]^2 \tag{4}$$

が成立する。等号は、c を実定数とする非エルミートな作用素 $A_0 \equiv Q_0 + icg(P_0)$ の固有状態のとき達成される（固有値は複素数で、その実部と虚部の $1/c$ 倍はペアとなっている物理量のおおよその期待値を表す）。 座標の尺度変換により、$c=1$ としても議論は一般性を失わないので、以下では

$$A_0 \equiv Q_0 + ig(P_0) \tag{5}$$

とする。その固有値 α に属する固有ベクトル $|\alpha\rangle_{A_0}^{(m)}$（但し、$m$ は対応する運動量区間につけられたラベルであり、同じ固有値に異なった m の固有ベクトルが縮重していることがある）の位置表示および運動量表示での波動関数をそれぞれ

$$\phi_\alpha^{(m)}(q_0) \equiv {}_{Q_0}\langle q_0|\alpha\rangle_{A_0}^{(m)} \tag{6}$$

$$\Phi_\alpha^{(m)}(p_0) \equiv {}_{P_0}\langle p_0|\alpha\rangle_{A_0}^{(m)} \tag{7}$$

とすると、固有方程式より

$$\Phi_\alpha^{(m)}(p_0) = \begin{cases} (const) \cdot e^{-G(p_0) - i\alpha p_0} & (p_{m-1} \leq p \leq p_m) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{8}$$

（但し、$G(p)$ は $g(p)$ の原始関数。積分定数の非一性は固有関数の正規化によって回避できる。）となることが示せる。このフーリエ逆変換が $\phi_\alpha^m(q_0)$ となるが、上式より固有値 α の実部のシフトは単に位置のシフトを施すことに相当する。また、位置表示での波動関数は（そのサポートは無限に広がっているが）ほぼ固有値の実部の値の位置付近にほぼ局在した波束状の関数になっていることが示せる。[4]

コヒーレント状態の場合と同様に、この最小不確定状態についても、過剰完全性関係

$$\sum_m \int_{D_m} |\alpha\rangle_{A_0}^{(m)} \ {}_{A_0}^{(0)}\langle\alpha| \ \ w_m(Re\ \alpha) d^2\alpha = I_0 \tag{9}$$

（但し、D_m 2乗可積分な $\phi_\alpha^m(q_0)$ が存在する α の範囲）が成立する。ここで、関数 w_m は関連する連続群の不変測度に関連した関数であり、関数 $g(p)$ から具体的に求まる。[4]

3 自由度拡張による Q と $g(P)$ の可換化

本節では、具体的にテンソル積によって空間を拡張し、前節で定義したペアを可換化し、さらに前節で説明した最小不確定状態と合成系上の同時固有状態との具体的関係について述べる。

拡張のため付加する自由度に関する空間を

$$\mathcal{H}_{add.} \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \mathcal{H}_n \tag{10}$$

とし（すなわち、空間 $\mathcal{H}_0$ を合成系の空間

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{add.} = \bigotimes_{n=0}^{N} \mathcal{H}_n \tag{11}$$

に拡張する)、それぞれの自由度の位置作用素 Q_n と運動量作用素 P_n とさらに

$$B_n \equiv \frac{1}{2}\{Q_n, P_n\} \tag{12}$$

を定義する。これらの間の交換子は

$$[Q_k, P_j] = i\delta_{kj}\ I_k \tag{13}$$

$$[B_k, P_j] = i\delta_{kj}\ P_k \tag{14}$$

$$[B_k, Q_j] = -i\delta_{kj}\ Q_k \tag{15}$$

となる。但し、I_n は空間 $\mathcal{H}_n$ 上の恒等作用素であり、

$$I_{add.} \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} I_n \tag{16}$$

と定義しておく。。

さて、合成系の空間 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{add.}$ において、エルミート作用素

$$\tilde{Q} \equiv Q_0 \otimes I_{add.} + \sum_{n=1}^{N} (c_n P_0 + d_n I_0)^{-1} \otimes \bigotimes_{j=1}^{N} J_{nj} \tag{17}$$

$$\tilde{G} \equiv g(P_0) \otimes I_{add.} + \sum_{n=1}^{N} (c_n P_0 + d_n I_0)^{-1} \otimes \bigotimes_{j=1}^{N} K_{nj} \tag{18}$$

を定義する。但しここで、J_{nj} や K_{nj} は $\mathcal{H}_n$ 上で

$$J_{nj} \equiv \begin{cases} c_j B_j - (a_j d_j - b_j c_j) Q_j & \text{if } (j = n) \\ I_j & \text{(otherwise)} \end{cases} \tag{19}$$

$$K_{nj} \equiv \begin{cases} P_j & \text{if } (j = n) \\ I_j & \text{(otherwise)} \end{cases} \tag{20}$$

で定義される作用素である。

これらについて、上記の交換子に関する関係式から、

$$[\tilde{Q}, \tilde{G}] = 0 \tag{21}$$

を示すことができる。これらはいずれもエルミート作用素なので、この交換可能性は、拡張された合成系において直交系をなす同時固有状態の存在を意味する。すなわち

$$\tilde{Q}|\tilde{q}, \tilde{g}\rangle = \tilde{q}|\tilde{q}, \tilde{g}\rangle \tag{22}$$

$$\tilde{G}|\tilde{q}, \tilde{g}\rangle = \tilde{g}|\tilde{q}, \tilde{g}\rangle \tag{23}$$

（但し、$\tilde{q}$ と $\tilde{g}$ は実固有値）となるような同時固有ベクトル $\tilde{q}, \tilde{g}\rangle$ が存在し、もし $\tilde{q}$ か $\tilde{g}$ かのうち少なくとも片方でも異なれば互いに直交する。

さて、この同時固有ベクトルを、付加した空間 $\mathcal{H}_{add.}$ の自由度のみに関してあるベクトル（真空ベクトルの類似物）と内積を取ることによって、前節で説明した Q_0 と $g(P_0)$ の最小不確定状態が得られることを以下に示す。

まず、合成系の空間 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{add.}$ において、作用素

$$\tilde{A} \equiv \tilde{Q} + i\tilde{G} \tag{24}$$

を定義する。これはエルミート作用素ではないので、一般に複素固有値をもつが、上記の関係に注意すれば、上記の同時固有ベクトルを固有ベクトルとしてもち、

$$\tilde{A}|\tilde{q},\tilde{g}\rangle = (\tilde{q} + i\tilde{g})|\tilde{q},\tilde{g}\rangle \tag{25}$$

となる。ところで、$\tilde{Q}$ と $\tilde{G}$ の定義より

$$\tilde{A} = A_0 \otimes I_{add.} + \sum_{n=1}^{N}(c_n P_0 + d_n I_0)^{-1} \otimes \bigotimes_{j=1}^{N} F_{nj}^{\dagger} \tag{26}$$

但し

$$F_{nj} \equiv J_{nj} - iK_{nj} \tag{27}$$

と書ける。さて、いまこの定義で特に $j = n$ の場合には

$$F_{nn} = c_n B_n - (a_n d_n - b_n c_n)Q_n - iP_n \tag{28}$$

となるが、この固有値ゼロに属する固有ベクトル $|0\rangle_{F_{nn}}$ を用いて $\mathcal{H}_{add.}$ のベクトル

$$|0\rangle_F \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} |0\rangle_{F_{nn}} \tag{29}$$

を定義すれば、定義より

$$_F\langle 0|(\bigotimes_{j=i}^{N} F_{nj}^{\dagger})' = 0 \tag{30}$$

が言えるから、これと (25), (26) より

$$\begin{aligned}(A_0 \otimes I_{add.})\,(I_0 \otimes |0\rangle_F\ _F\langle 0|)|\tilde{q},\tilde{g}\rangle &= (I_0 \otimes |0\rangle_F\ _F\langle 0|)\tilde{A}|\tilde{q},\tilde{g}\rangle \\ &= (\tilde{q} + i\tilde{g})(I_0 \otimes |0\rangle_F\ _F\langle 0|)|\tilde{q},\tilde{g}\rangle\end{aligned} \tag{31}$$

となるが、これは $(I_0 \otimes |0\rangle_F\ _F\langle 0|)|\tilde{q},\tilde{g}\rangle$ が作用素 $(A_0 \otimes I_{add.})$ の固有値 $(\tilde{q}+i\tilde{g})$ に属する固有ベクトルになっていることを示しており、これから

$$(I_0 \otimes |0\rangle_F\ _F\langle 0|)\tilde{A}|\tilde{q},\tilde{g}\rangle = (const)|\tilde{q} + i\tilde{g}\rangle_{A_0} \otimes |0\rangle_F \tag{32}$$

が言える。すなわち、合成系上の同時固有ベクトルは、もとの空間 $\mathcal{H}_0$ における「位置」と「運動量の有理関数」の最小不確定状態と、付加した空間の真空状態の対応物 $|0\rangle_F\ _F\langle 0|$ に（付加した自由度のみに関して）射影をとることによって具体的に対応していることがわかった。

4 おわりに

以上の結果は、「位置」と「運動量の逆数」に関してすでに示した [3] のと同様の方法で、「位置」と「運動量の有理関数」の同時測定の作用素測度の問題に容易に応用できる。合成系の空間 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{add.}$ においては、$\tilde{Q}$ と $\tilde{G}$ は交換可能なので、単純測定となっているような同時測定の作用素測度が存在する。これは、もとの空間での Q_0 と $g(P_0)$ の同時測定の作用素測度が一般化測定でしかできないものをナイマルク拡張したものに書けることを示している。しかしながら、交換関係の相違を反映して、位置と運動量の場合に比べてかなり複雑な構成になっている。

文献

[1] A.S.Holevo(1982) *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland Publ.

[2] I.Daubachies(1992) *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM;
T.Paul and K.Seip(1992), "Wavelets and Quantum Mechanics" in *Wavelets and Their Applications*(Ruskai eds.), Jones and Barnett Publ., pp.303-321
坂口 (1996)「量子力学から見たウェーブレット」'量子情報と進化の力学'（大矢・小嶋編）, 牧野書店, pp.177-196

[3] 坂口 (1997)「合成系上の同時固有状態としてのコーシー・ウェーブレット」京都大学数理解析研究所講究録 982, pp. 137-147

[4] F.Sakaguchi(1994) "A Larger Class of Time-shift Invariant Localized Over-complete Eigenfunction Systems Which Contains Wavalets and Coherent States", *Proc. International Symposium on Information Theory and Its Applications '94, Sydney* Vol.1, pp.303-308