

量子テレポーテーション過程の量子情報論的アプローチ

東京理科大学 井上 啓, 大矢雅則, 須鎗弘樹

1. はじめに

量子状態の伝送において, その情報を完全に伝達することは, 従来から不可能であると考えられてきた. なぜなら, 量子状態を観測するとその状態が壊れてしまい, 修復できなくなってしまうからである. ところが, 最近になって, EPR等の量子相関を利用し, 瞬時ではないが, 離れたところにその量子状態を再現する方法が Bennett等によって考案された [1]. この方法は, 量子テレポーテーションと呼ばれ, 量子状態自身を伝達する量子論的な通信路と電話などによって情報を送る古典的な通信路の2つを組み合わせることによって構成されている. この量子テレポーテーションが実現できる具体例はBennett等によって紹介されているが, 量子テレポーテーション過程の効率を厳密に議論するためには, 従来の古典理論とは異なる量子状態の伝達を直接扱える適切な数理表現が不可欠である. そこで, 今回, 量子情報理論の立場から, 量子テレポーテーション過程のチャネルの定式化を行い, その通信過程の効率を表す指標である量子相互エントロピー(Ohya) [6] を用いてこれらの特徴付けを行う.

2. 量子テレポーテーション過程

送信者をAlice, 受信者をBobとすると, 量子テレポーテーション過程は, 以下のよう4つのSTEPによって記述される[1]. これらのステップのうち, STEP1, 2, 4が量子論的な通信過程に相当する.

Step 1: ある相関を持った状態 (例, EPR pair)をAliceとBobの間に用意する.

Step 2: Alice は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上で観測をし, Bobは $\rho^{(3)}$ を受け取る.

Step 3: Bob は, どの観測を行ったかをAliceから古典的なチャネルを通して知らされる.

Step 4: Bob は, STEP3で得た情報を元に $\rho^{(1)}$ を再構成する.

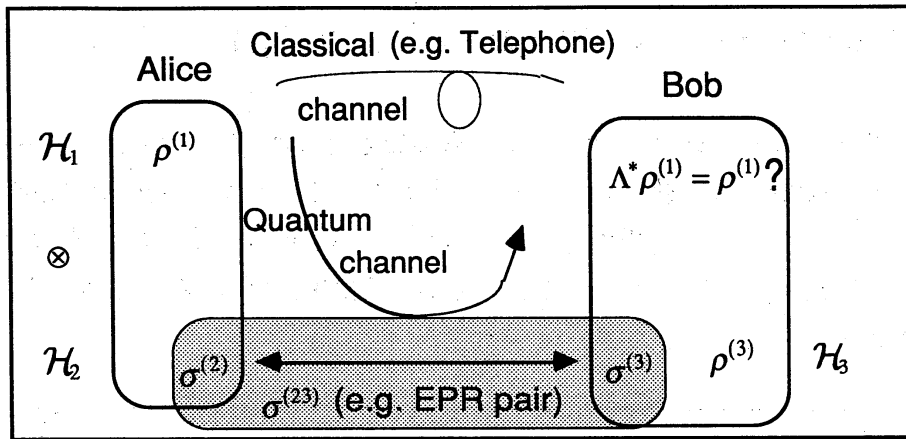


図1. 量子テレポーテーション過程概略

3. 量子チャネルと量子相互エントロピー[6,7]

量子情報理論において、入力系の状態はある密度作用素 ρ によって記述され、量子チャネル Λ^* を通して出力系に伝えられる。量子チャネル Λ^* は、数学的には入力空間から出力空間への状態変化を表す写像として記述される。入力の量子状態 ρ があるチャネル Λ^* のもとで、 $\Lambda^* \rho$ に変化するとき、量子相互エントロピーは、 ρ のもつ情報量のうち、どれだけが正確に伝わったかを表す量である。

いま、 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ を入力空間, 出力空間を表す Hilbert 空間とし、 $B(\mathcal{H}_k)$ を \mathcal{H}_k 上の有界線型作用素全体の集合、 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_k)$ を \mathcal{H}_k 上の状態全体の集合; $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_k) \equiv \{\rho \in B(\mathcal{H}_k); \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \text{tr} \rho = 1\}$ とする。このとき、量子チャネル Λ^* は、次式で与えられる。

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1) \ni \rho \rightarrow \Lambda^* \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$$

いま、 $\rho = \sum_k \lambda_k E_k$ を入力状態 ρ の Schatten 分解 (i.e., $E_i \perp E_j$ ($i \neq j$), $\dim E_k = 1$ ($\forall k \in N$)) とすると、量子相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は、入力状態と出力状態の合成状態 σ_E を用いて、次式で表される [6].

$$I(\rho; \Lambda^*) \equiv \sup_E \{S(\sigma_E, \rho \otimes \Lambda^* \rho); E = \{E_k\}\}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \sigma_E &\equiv \sum_k \lambda_k E_k \otimes \Lambda^* E_k, \\ S(\sigma_E, \sigma_0) &\equiv \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0). \end{aligned}$$

4. 量子テレポーテーション過程のチャネル表現 [5]

この節では、量子テレポーテーション過程を前節で説明した量子チャネルを用いて表現する。図2は、この量子テレポーテーション過程のチャネル表現の概略であり、量子テレポーテーション過程のチャネル $\Lambda^{*[k]}$ は、 $\gamma^*, \pi_k^*, a^*, u_k^*$ の4つの写像を使って $\Lambda^{*[k]} = u_k^* \circ a^* \circ \pi_k^* \circ \gamma^*$ として表現される。対応するSTEPにおけるチャネル表現は以下の通りである。

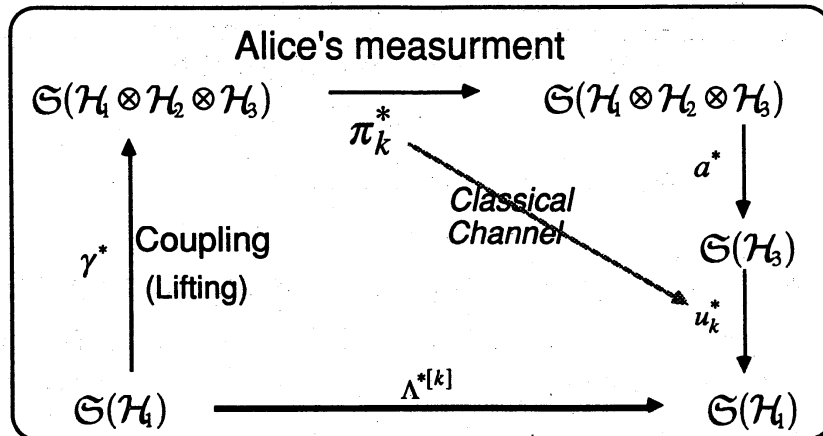


図2. 量子テレポーテーションのチャネル表現

Step 1: AliceとBobの間の相関: $\sigma^{(23)} \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$

Step 2: (1) Alice の $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上での観測 $\pi_k^* \circ \gamma^*(\rho^{(1)})$:

$$\gamma^*: \mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$$

$$\gamma^*(\rho^{(1)}) \equiv \rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)} \equiv \rho^{(123)}$$

$$\pi_k^*: \mathcal{G}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$$

$$\pi_k^* \circ \gamma^*(\rho^{(1)}) = \pi_k^*(\rho^{(123)}) \equiv \frac{(F_k^{(12)} \otimes I^{(3)}) \rho^{(123)} (F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})}{\text{tr}_{123} (F_k^{(12)} \otimes I^{(3)}) \rho^{(123)} (F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})}$$

ただし、 $F_k^{(12)}$ は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の射影作用素である。

(2) Bobの受け取った状態 $\rho^{(3)}$

$$a^*: \mathcal{G}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{H}_3)$$

$$\rho^{(3)} = a^* \circ \pi_k^*(\rho^{(123)}) \equiv \text{tr}_{12} \pi_k^*(\rho^{(123)})$$

Step 3: 古典的なチャネルを通して送られる情報 k

$$\begin{array}{c} \text{classical channel} \\ F_k^{(12)} \Leftrightarrow \pi_k \xrightarrow{\text{"k"}} u_k \Leftrightarrow U_k \end{array}$$

Step 4: $\rho^{(1)}$ の再構成 u_k^*

$$u_k^*: \mathcal{G}(\mathcal{H}_3) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{H}_4)$$

$$u_k^*(\rho^{(3)}) \equiv U_k \rho^{(3)} U_k^* = \rho^{(1)}$$

ただし, $U_k: \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_4$; Bobによるユニタリ変換

したがって, 量子テレポーテーション過程 $\Lambda^{*[k]}: \mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{H}_4)$ は,

$$\Lambda^{*[k]}(\rho^{(1)}) \equiv u_k^* \circ a^* \circ \pi_k^* \circ \gamma^*(\rho^{(1)}) = U_k \left[\text{tr}_{12} \pi_k^*(\rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)}) \right] U_k^*$$

で表現される. ここで, Step 2 (1) Alice の $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上での観測 $\pi_k^* \circ \gamma^*(\rho^{(1)})$ が, 非線形のチャネルとして表現されることから, 量子テレポーテーション過程のチャネルは, 一般には, 非線形であることが分かる.

以下では, Bennett等の場合を例に取り上げ, そのチャネル表現を行う.

(例) 入力状態: $\rho^{(1)} = |\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$

$$\text{ただし, } |\Phi_1\rangle = a|\uparrow^{(1)}\rangle + b|\downarrow^{(1)}\rangle \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1, a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C})$$

STEP1: AliceとBobの間の相関:

$$\sigma^{(23)} = |\Psi^{(-)}\rangle\langle\Psi^{(-)}| : \text{EPR singlet state}$$

$$\text{ただし, } |\Psi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow^{(2)}\rangle \otimes |\downarrow^{(3)}\rangle - |\downarrow^{(2)}\rangle \otimes |\uparrow^{(3)}\rangle)$$

STEP2: (1) Alice の $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上での観測:

$$\gamma^*(\rho^{(1)}) \equiv \rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)} = |\Phi_1 \otimes \Psi^{(-)}\rangle\langle\Phi_1 \otimes \Psi^{(-)}|$$

Aliceの観測系:

$$F_1^{(12)} = |\Psi^{(-)}\rangle\langle\Psi^{(-)}|, \quad F_2^{(12)} = |\Psi^{(+)}\rangle\langle\Psi^{(+)}|$$

$$F_3^{(12)} = |\Phi^{(-)}\rangle\langle\Phi^{(-)}|, \quad F_4^{(12)} = |\Phi^{(+)}\rangle\langle\Phi^{(+)}|$$

$\{|\Psi^{(\pm)}\rangle, |\Phi^{(\pm)}\rangle\}$: Bell CONS of $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$|\Psi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow^{(1)}\rangle \otimes |\downarrow^{(2)}\rangle - |\downarrow^{(1)}\rangle \otimes |\uparrow^{(2)}\rangle)$$

$$|\Psi^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow^{(1)}\rangle \otimes |\downarrow^{(2)}\rangle + |\downarrow^{(1)}\rangle \otimes |\uparrow^{(2)}\rangle)$$

$$|\Phi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow^{(1)}\rangle \otimes |\uparrow^{(2)}\rangle - |\downarrow^{(1)}\rangle \otimes |\downarrow^{(2)}\rangle)$$

$$|\Phi^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow^{(1)}\rangle \otimes |\uparrow^{(2)}\rangle + |\downarrow^{(1)}\rangle \otimes |\downarrow^{(2)}\rangle)$$

(2) Bobの受け取った状態 $\rho^{(3)}$

$$\rho^{(3)} = a^* \circ \pi_1^*(\rho^{(123)}) = (a|\uparrow^{(3)}\rangle + b|\downarrow^{(3)}\rangle)(a\langle\uparrow^{(3)}| + b\langle\downarrow^{(3)}|)$$

$$\rho^{(3)} = a^* \circ \pi_2^*(\rho^{(123)}) = (a|\uparrow^{(3)}\rangle - b|\downarrow^{(3)}\rangle)(a\langle\uparrow^{(3)}| - b\langle\downarrow^{(3)}|)$$

$$\rho^{(3)} = a^* \circ \pi_3^*(\rho^{(123)}) = (a|\downarrow^{(3)}\rangle + b|\uparrow^{(3)}\rangle)(a\langle\downarrow^{(3)}| + b\langle\uparrow^{(3)}|)$$

$$\rho^{(3)} = a^* \circ \pi_4^*(\rho^{(123)}) = (a|\downarrow^{(3)}\rangle - b|\uparrow^{(3)}\rangle)(a\langle\downarrow^{(3)}| - b\langle\uparrow^{(3)}|)$$

STEP3

classical channel

$$F_k^{(12)} \Leftrightarrow \pi_k \xrightarrow{\text{"k"}} u_k \Leftrightarrow U_k$$

STEP4: Bobによる状態 $\rho^{(1)}$ の再構成

$$\Lambda^{*(k)}(\rho^{(1)}) = u_k^*(\rho^{(3)}) \equiv U_k \rho^{(3)} U_k^* = \rho^{(1)} \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$$U_1 \equiv |\uparrow^{(1)}\rangle\langle\uparrow^{(3)}| + |\downarrow^{(1)}\rangle\langle\downarrow^{(3)}|$$

$$U_2 \equiv |\uparrow^{(1)}\rangle\langle\uparrow^{(3)}| - |\downarrow^{(1)}\rangle\langle\downarrow^{(3)}|$$

$$U_3 \equiv |\uparrow^{(1)}\rangle\langle\downarrow^{(3)}| + |\downarrow^{(1)}\rangle\langle\uparrow^{(3)}|$$

$$U_4 \equiv |\uparrow^{(1)}\rangle\langle\downarrow^{(3)}| - |\downarrow^{(1)}\rangle\langle\uparrow^{(3)}|$$

5. 相互エントロピーによる量子テレポーテーション過程の効率について

この節では、入力状態がスピン1/2系の状態とN-stateで与えられる場合において、量子相互エントロピーによる量子テレポーテーション過程の通信効率を計算し、Bennett等のOriginal Settingが、どのような条件を満足するかを議論する[5]。

例 1:

入力状態: $\rho^{(1)} = \sum_{j=1}^2 \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$

ただし, $|\phi_j\rangle = a_j |\uparrow^{(1)}\rangle + b_j |\downarrow^{(1)}\rangle$, $|a_j|^2 + |b_j|^2 = 1$ ($j=1,2$).

Alice と Bob の間の相関: $\sigma^{(23)} = |\xi\rangle\langle\xi|$: entangled state

ただし, $|\xi\rangle = c |\uparrow^{(2)}\rangle \otimes |\downarrow^{(3)}\rangle + d |\downarrow^{(2)}\rangle \otimes |\uparrow^{(3)}\rangle$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$.

このとき, 出力状態 $\Lambda^{*(k)}\rho^{(1)}$ は,

$$\Lambda^{*(k)}\rho^{(1)} = \sum_{j=1}^2 c_j^{[k]} |\varphi_j^{[k]}\rangle\langle\varphi_j^{[k]}|$$

となる. ただし,

$$|\varphi_j^{[1]}\rangle = \frac{da_j |\uparrow^{(3)}\rangle - cb_j |\downarrow^{(3)}\rangle}{\sqrt{|da_j|^2 + |cb_j|^2}}, \quad c_j^{[1]} = \frac{\lambda_j (|da_j|^2 + |cb_j|^2)}{\sum_{l=1}^2 \lambda_l (|da_l|^2 + |cb_l|^2)}$$

$|\varphi_j^{[k]}\rangle, c_j^{[k]}$ ($k=2,3,4$) も同様.

いま, $\Lambda^{*(k)}\rho^{(1)}$ が以下のように Schatten 分解されれば,

$$\Lambda^{*(k)}\rho^{(1)} = \sum_{j=1}^2 \tilde{c}_j^{[k]} |\tilde{\varphi}_j^{[k]}\rangle\langle\tilde{\varphi}_j^{[k]}|$$

量子相互エントロピーが次式で求まる.

$$I(\rho^{(1)}; \Lambda^{*(k)}) = -\sum_{l=1}^2 \lambda_l \sum_{j=1}^2 \left| \langle \tilde{\varphi}_j^{[k]}, \varphi_l^{[k]} \rangle \right|^2 \log \tilde{c}_j^{[k]}$$

Original setting (Bennett et.al) においては, $c = \sqrt{\frac{1}{2}}, d = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ であるから,

$$\tilde{c}_l^{[k]} = c_l^{[k]} = \lambda_l, \quad \langle \tilde{\varphi}_l^{[k]}, \varphi_j^{[k]} \rangle = \delta_{lj} \quad (l, j=1,2).$$

したがって,

$$I(\rho^{(1)}; \Lambda^{*(k)}) = -\sum_{l=1}^2 \lambda_l \log \lambda_l = S(\rho^{(1)}).$$

さらに, この場合,

$$\begin{aligned}\pi_k^*(\rho^{(123)}) &= \frac{(F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})\rho^{(123)}(F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})}{\text{tr}_{123}(F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})\rho^{(123)}(F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})} \\ &= 4(F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})\rho^{(123)}(F_k^{(12)} \otimes I^{(3)})\end{aligned}$$

より、チャンネル Λ^{*k} は線形となることが分かる。

例2

入力状態: $\rho^{(1)} = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$

ただし、 $|\phi_j\rangle = \sum_{l=0}^{N-1} a_{jl}|l\rangle$ $\left(\sum_{i=0}^{N-1} |a_{ji}|^2 = 1 \quad (j=0,1,\dots,N-1), \{|l\rangle\}: \text{CONS} \right)$

AliceとBobの間の相関: $\sigma^{(23)} = |\xi\rangle\langle\xi|$: a pair of N-state particles in an entangled state

$$\text{ただし、} \quad |\xi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j |j\rangle \otimes |j\rangle, \quad \sum_{j=0}^{N-1} |\omega_j|^2 = 1.$$

このとき、出力状態 $\Lambda^{*[nm]}\rho^{(1)}$ は、

$$\Lambda^{*[nm]}\rho^{(1)} = \sum_{j=0}^{N-1} p_j^{[nm]} |d_j^{[nm]}\rangle\langle d_j^{[nm]}|$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}|d_j^{[nm]}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nl} a_{jl} w_{\{(l+m) \bmod N\}} |(l+m) \bmod N\rangle \\ &\quad \sqrt{\sum_{s=0}^{N-1} |a_{js}|^2 |w_{\{(s+m) \bmod N\}}|^2}, \\ p_j^{[nm]} &= \frac{\lambda_j \left(\sum_{l=0}^{N-1} |a_{jl}|^2 |w_{\{(s+m) \bmod N\}}|^2 \right)}{\sum_{t=0}^{N-1} \lambda_t \left(\sum_{s=0}^{N-1} |a_{ts}|^2 |w_{\{(s+m) \bmod N\}}|^2 \right)}\end{aligned}$$

いま、 $\Lambda^{*[nm]}\rho^{(1)}$ が以下のように Schatten 分解されれば、例1と同様に

$$\Lambda^{*[nm]}\rho^{(1)} = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_j^{[nm]} |\tilde{d}_j^{[nm]}\rangle\langle\tilde{d}_j^{[nm]}|$$

量子相互エントロピーが次式で求まる。

$$I(\rho^{(1)}; \Lambda^{*[nm]}) = - \sum_{l=0}^{N-1} \lambda_l \sum_{j=0}^{N-1} \left| \langle \tilde{d}_j^{[nm]}, d_l^{[nm]} \rangle \right|^2 \log \tilde{p}_j^{[nm]}$$

Original setting (Bennett et.al) においては, $\omega_j = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ($j=0,1,\dots,N-1$) であるから,

$$\tilde{p}_i^{[nm]} = p_i^{[nm]} = \lambda_i, \quad \langle \tilde{d}_i^{[nm]}, d_j^{[nm]} \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \dots, N-1).$$

したがって,

$$I(\rho^{(1)}; \Lambda^{*(k)}) = -\sum_{l=0}^{N-1} \lambda_l \log \lambda_l = S(\rho^{(1)}).$$

さらに, この場合,

$$\begin{aligned} \pi_{nm}^*(\rho^{(123)}) &\equiv \frac{(F_{nm}^{(12)} \otimes I^{(3)}) \rho^{(123)} (F_{nm}^{(12)} \otimes I^{(3)})}{\text{tr}_{123} (F_{nm}^{(12)} \otimes I^{(3)}) \rho^{(123)} (F_{nm}^{(12)} \otimes I^{(3)})} \\ &= N (F_{nm}^{(12)} \otimes I^{(3)}) \rho^{(123)} (F_{nm}^{(12)} \otimes I^{(3)}) \end{aligned}$$

より, チャネル $\Lambda^{*[nm]}$ は線形となることが分かる.

6. 結果と考察

量子テレポーテーション過程のチャネルの定式化を行うことにより, Original Setting (Bennett et al) は, 線形なチャネルとして表現されるが, 一般の量子テレポーテーション過程は, それらを含む非線形なチャネルであることが分かった. また, Original Setting (Bennett et al) における量子相互エントロピーの値は入力量子状態のエントロピーと一致し, 量子相互エントロピーが量子テレポーテーション過程の情報伝達の効率を表す尺度となることを示せた. 今後は, これらの結果から, 量子テレポーテーションの成り立つ条件を探っていきたい.

7. 参考文献

- [1] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 1895-1899.
- [2] C.H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J.A. Smolin, W.K. Wootters, Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 722-725.
- [3] A.K. Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 661-663.
- [4] R.S. Ingarden, A. Kossakowski, M. Ohya, Information Dynamics and Open Systems, (Kluwer, 1997).

- [5] K. Inoue, M. Ohya and H. Suyari Characterization of Quantum Teleportation Processes by Nonlinear Quantum Channel and Quantum Mutual Entropy, preprint.
- [6] M. Ohya, On compound state and mutual information in quantum information theory, *IEEE Trans. Information Theory* 29 (1983) 770-774.
- [7] M. Ohya, Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes, *Rep. Math. Phys.* 27 (1989) 19-47.
- [8] M. Ohya and D. Petz, Quantum Entropy and its Use (Springer-Verlag, 1993).
- [9] C.E. Shannon, Mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.* 27 (1948) 379-423.