数理解析研究所講究録
1016巻 1997年 68-76

代用電荷法における逆等角写像のポテンシャル論的スキーム

井上哲男　(神戸商船大学)

Potentially Theoretical Schemes of Inverse Conformal Mappings in The Charge Simulation Method

Tetsuo Inoue (Kobe Mercantile Marine College)

Abstract. Algotithms on computing inverse conformal mappings are proposed by the charge simulation method with a new scheme. The scheme is based on the potentially theoretical consideration. In this note we show that it has a mathematically superior characteristic called "duality" and presents numerical results of higher accuracy as compared to the customary method.

キーワード: 数値等角写像, 新しいスキーム, ポテンシャル論, 代用電荷法, 双対性

1. まえがき

代用電荷法は, 数値解析の手段として従来より偏微分方程式の近似解法に適用され多くの研究がなされて来た. 電気工学等への応用上も重要である. しかし, この方法に関しては, 最適の近似関数のスキーム等まだ未解決の問題が少なくない.

天野[(1)-(5)] は, 最近の一連の研究で, 代用電荷法に基づく数値等角写像の方法を提案し, 数値実験的方法によりその精度の高さを確認している. これは, Laplace 方程式の Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を用いて近似関数を求める方法である.

そこでは, 一般領域から標準領域へ写像する関数の内部および外部問題が考察され, 二重連結領域へも適用可能であることを示している.

このノートでは, 従来とは異なった新しいスキームによる「一般領域から一般領域へ」の数値等角写像に関する代用電荷法の Algorithm を最初に紹介する.

このスキームは従来の積分方程式に基づくものではなく, 最近その発展がめざましい重み付き極値多項式の漸近定理に基づくポテンシャル論的考察により導かれたものである.

このノートにおいて, このスキームが, 逆関数の近似関数を求める Algorithm にも同じ形で応用され得ること等の従来の方法にはない優れた数学的特性を持つことを示す.

さらにここで導入された新しいスキームによる数値実験で, 誤差に関して従来の方法では求め得れない高精度の数値結果が得られることを検証する.

積分方程式等による数値等角写像の方法については Henrici[(6)], Trefethen[(7)]に詳しい. 代用電荷法の基礎と電気工学に関する問題を中心とした応用と数値実験の結果は文献 (8) に詳しく述べられている.

2. 等角写像の逆関数を求める Algorithm

重み付き極値多項式に関する漸近定理[(12)–(14)]の応用として, 代用電荷法におけるポテンシャル論的スキームが一般領域から一般領域への内部数値等角写像に対して最近導かれた[(11)]. それをまず紹介する. そこではそのスキームを用いて, 与えられた関数の逆関数を求める Algorithm も提案されている.

G と G' は, 有界な領域でその境界をそれぞれ Jordan 曲線 γ と γ' としよう. 一般性を失うことなしに G と G' は, 0 と ∞ をその内部と外部に含むとすることができる.

$g(z)$ は, G を G' 上に等角に写像して, $z=0$ の近傍で

$$g(z) = dz + d_1 z^2 + \cdots, \quad d > 0 \tag{2.1}$$

が成立するとしよう. そのとき, 近似関数を求める Algorithm は次の様になる.

Algorithm 2.1. $g(z)$ の近似関数 $g_n(z)$ は, 次の様にして求め得る.

(2a) $\{z_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ (電荷点と言う) と拘束点 $\{\zeta_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ は, それぞれ G の外部と γ 上に適切に選ばれる.

(2b)

$$\alpha_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

が, 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 + \log|\zeta_{n,k}| + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log|1 - \frac{\zeta_{n,k}}{z_{n,i}}| \\
&= \log|g(\zeta_{n,k})| \quad (k = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -1, \tag{2.3}$$

の解であるとき, $\{z_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ における電荷を $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ とする.

(2c) 近似関数 $g_n(z)$ は, n が十分大きいとき次式によって表される.

$$g_n(z) = e^{\alpha_0} z \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{z}{z_{n,i}})^{\alpha_i}. \tag{2.4}$$

数値実験により, 電荷点と拘束点が適切に配置されていると

$$\alpha_0 \simeq \log d, \tag{2.5}$$

$$\alpha_i \simeq -\frac{1}{n} \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.6}$$

が成立することを検証することができる.

Algorithm 2.1 に基づき, 与えられた関数

$$w = g(z)$$

の逆関数

$$z = h(w)$$

を求めるための Algorithm は次の様になる.

Algorithm 2.2. $h(w)$ の近似関数 $h_n(w)$ は, 次の様にして求め得る.

(2d) $\{z_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ と $\{\zeta_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ を, それぞれ G の外部と γ 上に適切に選ぶ.

(2e) 領域 G' に対する電荷点と拘束点をそれぞれ

$$\{g(z_{n,i})\}_{i=1}^{n}, \ \ \{g(\zeta_{n,i})\}_{i=1}^{n}$$

とする.

(2f)

$$\beta_i \ \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

が連立 1 次方程式

$$\beta_0 + \log|g(\zeta_{n,k})| + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log|1 - \frac{g(\zeta_{n,k})}{g(z_{n,i})}|$$
$$= \log|\zeta_{n,k}| \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.7}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = -1, \tag{2.8}$$

の解であるとき, $\{g(z_{n,i})\}_{i=1}^{n}$ における電荷を $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}$とする.

(2g) 近似関数 $h_n(w)$ は, n が十分大きいとき次式で表せる.

$$h_n(w) = e^{\beta_0} w \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{w}{g(z_{n,i})})^{\beta_i}. \tag{2.9}$$

数値実験により, 電荷点と拘束点が適切に配置されていると

$$\beta_0 \simeq \log \frac{1}{d}, \tag{2.10}$$

$$\beta_i \simeq -\frac{1}{n} \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.11}$$

が成立することを検証することができる.

3. 新しいスキームの双対性

この節では新しいスキームが従来のものより優れた数学的特性をもつことを示す.

(3a)「逆等角写像と元の写像関数に対するスキームの双対性」

Algorithm 2.2 は Algorithm 2.1 より

$$g(z),\ \ g_n(z),\ \ \{z_{n,i}\}_{i=1}^{n},\ \ \{\zeta_{n,i}\}_{i=1}^{n},\ \ \{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$$

をそれぞれ

$$h(w),\ \ h_n(w),\ \ \{g(z_{n,i})\}_{i=1}^{n},\ \ \{g(\zeta_{n,i})\}_{i=1}^{n},\ \ \{\beta_i\}_{i=0}^{n}$$

と置き換えることにより導ける.

同じことが逆に対しても言えるのでこれを「逆等角写像と元の写像関数に対するスキームの双対性」と呼ぶことにする.

(3b)「逆等角写像と元の写像関数に対する近似関数の双対性」

(2.4), (2.9) が成立することを意味する.

4. 数値実験

この節では Algorithm 2.2 を適用した数値実験を行い近似関数の精度を検証する.

なおこの数値実験は *Runfortran f77* (PC98-486AV) によって単精度で行った.

Algorithm 2.2 を用いて次の様な数値実験を行った.

例 4.1. ここではケーベ関数

$$w = \frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} \tag{4.1}$$

や変換

$$\zeta = \frac{z}{2}$$

を用いて, 次の様な関数を作る.

$$w = g(z) = \frac{2z}{(z-2)^2} = \frac{z}{2} + \cdots . \tag{4.2}$$

この関数は, 単位円

$$\{z; |z| < 1\}$$

をある領域 G' に等角写像する.

領域 G' に対して, 電荷点と拘束点をそれぞれ

$$\{g(\rho e^{i\theta_k})\}_{k=1}^{n}$$

と

$$\{g(e^{i\theta_k})\}_{k=1}^{n}$$

とする. ただし,

$$\theta_k = \frac{2\pi(k-1)}{n}.$$

$n = 10, \rho = 1.5$ として連立 1 次方程式 (2.7), (2.8) を解くと次の様になる (電荷の分布を知るために全ての値を記す):

$$\beta_0 = +0.69139242E+00, \beta_1 = -0.99999934E-01,$$

$$\beta_2 = -0.10000011E+00, \beta_3 = -0.10000016E+00,$$

$$\beta_4 = -0.10000001E+00, \beta_5 = -0.10000004E+00$$

$$\beta_6 = -0.99999845E-01, \beta_7 = -0.99999862E-01,$$

$$\beta_8 = -0.10000044E+00, \beta_9 = -0.99999612E-01,$$

$$\beta_{10} = -0.10000000E+00.$$

上記の解は, 関係式 (2.10), (2.11)

$$\beta_0 \simeq \log 2 = 0.69314718..., \tag{4.3}$$

$$\beta_i \simeq -\frac{1}{10} \quad (i = 1, 2, \ldots, 10) \tag{4.4}$$

を高い精度で満足していることが解る.

上記の電荷 $\{\beta_i\}_{i=0}^{n}$ を用いて, 近似関数 (2.4) が表される. そのとき, 近似関数の誤差の精度を, 次式により評価する.

$$|h_n(g(\zeta_{n,i+1/2})) - \zeta_{n,i+1/2}|. \tag{4.5}$$

ただし, $\zeta_{n,i+1/2}$ は $\zeta_{n,i}$ と $\zeta_{n,i+1}$ の中間点である.

そのとき, 電荷点の数が僅か 10 であるにも拘らず次の様な高い精度の結果を得る (誤差の分布を知るために全ての値を記す):

$$\begin{aligned}
&9.9590516E-04, 9.9595624E-04, 9.9569559E-04,\\
&9.9622786E-04, 9.9630492E-04, 9.9581307E-04,\\
&9.9639445E-04, 9.9563598E-04, 9.9616241E-04,\\
&9.9625450E-04.
\end{aligned}$$

誤差の精度を

$$|h_n(g(\zeta_{n,i})) - \zeta_{n,i}| \tag{4.6}$$

によって評価しても同様の結果を得る.

5. まとめ

このノートは代用電荷法による数値等角写像を求めるための Algoritthm とそのスキームの数学的特性に関する総合報告である.

このノートの特徴を要約すれば次の様になる.

(5a) Algorithm は従来の様な積分方程式に基づくものではなく, 最近その発展がめざましい重み付き極値多項式の漸近定理に基づくポテンシャル論的考察により導かれたものである.

(5b) スキームは「双対性」をもつこと, 逆関数の近似関数を求める Algorithm にも同じ形で応用され得ること等の従来の方法にはない優れた数学的特性を持つ.

(5c) ここで導入された新しいスキームによる数値実験で, 誤差に関して従来の方法より高精度の数値結果が得られる.

このノートは新しい Algorithm とそのスキームの数学的特性を紹介することが主目的の総合報告である. Algorithm を導いた理論的説明や倍精度による詳しい数値実験の結果は機会を改めて報告する.

参考文献

(1) 天野 要: 代用電荷法に基づく双方向な数値等角写像の方法, 情報処理学会論文誌, vol.31 no.5, 1623-1632 (1990).

(2) 天野 要, 日野 究: 数値等角写像における代用電荷法と積分方程式の比較, 情報処理学会論文誌, vol.33 no.4, 428-437 (1992).

(3) 天野 要: 代用電荷法による等角写像のための 2 つの定式化の比較, 情報処理学会論文誌, vol.35 no.7, 1248-1257 (1994).

(4) K. Amano: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, J. Comput. App. Math., vol.53 no.35, 353-370 (1994).

(5) 天野 要: 代用電荷法による数値等角写像の不変性, 応用数学研究集会報告集, 71/1-4 (1994).

(6) P. Henrici P: Applied and Computational Complex Analysis 3, John Wiley & Sons, New York, 1986.

(7) L.N. Trefethen(ed.): Numerical Conformal Mapping, North-Holland, Amsterdam, 1986.

(8) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京 (1988).

(9) 井上哲男: 数値等角写像に対する代用電荷法のポテンシアル論的考察, 電気関係学会関西支部連合大会, (1995), G300.

(10) 井上哲男: 数値等角写像における新しいスキームによる数値実験, 日本数学会春期総合分科会アブストラクト, (1996).

(11) T. Inoue: Algorithm for Computing An Inverse Function of A Conformal Mapping by Fundamental Solution Metod, Trans. Inform. Process. Soc. Japan, accepted for publication (to appear).

(12) T. Inoue: Asymptotic behavior of extremal weighted polynomials, Tome 35(58), no.1, 29-34 (1993) (Mathémat., L'acad. Répu. Soc. Rouman).

(13) T. Inoue: Fundamental properties of weighted polynomials, Tome 36, no.1, 33-35 (1994) (Mathémat., L'acad. Répu. Soc. Rouman).

(14) T. Inoue: Applications of asymptotic theorem on weighted extremal polynomials, 日本応用数理学会論文誌, vol.4, no.2, 151-155 (1994).

(15) T. Inoue and K. Amano, A numerical conformal mapping from a standard domain to a general one by charge simulation method, *Conference Japan Indust. Appl. Math. Soc.* in 1996.

(16) M. Katsurada, Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with an analytic boundary, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math.* 37 (1990), 635-657.

(17) M. Katsurada and H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method 1, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math.* 36 (1988), 507-518.

(18) M. Katsurada and H. Okamoto, On the collocation points of the fundamental solution method for the potential problem, *Comp. Math. Appl.,* 31 (1996), 123-137.

(19) S. Murasima, *Charge Simulation Method and its Application,* (in Japanese), Morikita Syuppan, Tokyo, 1983.

(20) K. Murota, On "invariance" of schemes in the fundamental solution method, (in Japanese), *Trans. Inform. Process. Soc. Japan,* 3 (1993), 533-535.

(21) K. Murota, Comparison of conventional and "invariant" schemes of fundamental solutions method for annular domains, *Japan J. Indust. Appl. Math.,* 12 (1995), 61-85.

(22) M. Mori, *Numerical Analysis and Complex Functions,* (in Japanese),

Chikuma, Tokyo, (1975).

(23) K. Nishida, Mathematical and numerical analysis of charge simulation method in 2-dimensional elliptic domains, (in Japanese), *Trans. Japan Soc. Ind. App. Math.,* 5 (1995), 185-198.

(24) H. Okamoto and Y. Katsurada, Rapid calculation of potential problems, (in Japanese), *J. of App. Math. Sci.,* 2 (1992), 2-22.

(25) M. Sugihara, Approximations of harmonic functions, (in Japanese), *Koukyuroku 676, Research Inst. Math. Sci. Kyouto Univ.,* (1988), 251-261.

(26) S. Yotsutani, The distribution of charge points in charge simulation method, (in Japanese), *Koukyuroku 703, Research Inst. Math. Sci. Kyouto Univ.,* (1989), 172-186.