

# セルオートマトンの保存量

京都大学 総合人間学部 武末 真二 (TAKESUE, Shinji)

## 1 はじめに

力学系の議論をする際に、まず考えるべきことは、系がどのような構造を持つかということであろう。あらわに見えている構造もあれば、隠れた構造もある。構造を理解することによってはじめて、その上に立った応用の議論が可能になる。離散力学系であるセルオートマトン (CA) においても、この研究会の大きなテーマであるソリトンセルオートマトンのように美しい構造を示すものがある。しかし、もちろんソリトンだけが CA の取りうる構造ではない。それ以外の構造についても調べておくことは意味のあることであろう。

ここでは CA の持つ保存量に着目してみよう。ソリトンセルオートマトンでは無限個の保存量が存在することがいえるが、保存量ということだけに注目してみれば、ソリトンとは無関係にその存在条件を導き出すことができる。以下では、CA がある形の保存量を持つための必要十分条件を導き、それをもとにいくつかの例について具体的に保存則を求める。また、そのような保存量を持つ CA の動力的特徴についても述べる。

## 2 保存量条件

この節ではまず簡単な形の CA について保存量条件を求め、後の節でその一般化を考えることにする。

次の形の 3 近傍の 1 次元 CA を考えよう。

$$x_i^{t+1} = g(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) \quad (1)$$

ここに、 $x_i^t \in X$  は時刻  $t \in \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}$  におけるセル  $i \in \mathbb{Z}$  の状態を表す。セルが取り得る状態の集合  $X$  は保存量条件を導くためには任意で良いが、この条件を用いて実際に保存量を求めるためには有限集合でなければならない。セル  $i$  の次の時刻における状態はセル  $i$  の近傍  $i-1 \sim i+1$  の現在の値によって決まり、状態の更新はすべてのセルで同時に行われる。したがって、3 変数の写像  $g: X^3 \rightarrow X$  を与えると時間発展のルールが 1 つ決まる。後で詳しく議論することになる 2 つの例を紹介しておこう。

例1:  $X = \{0, 1\}$  の場合を Elementary CA (ECA) と呼ぶ [1]。関数  $g$  は 3 変数のブール関数であり、 $(0, 0, 0)$  から  $(1, 1, 1)$  までの 8 個の値に対してそれぞれ 0 または 1 を割り振ることにより決まるので、ECA には  $2^8 = 256$  個のルールが属することになる。これらを Wolfram にしたがって

$$N_g = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 \sum_{z=0}^1 2^{4x+2y+z} g(x, y, z) \quad (2)$$

という番号を用いて、「ルール  $N_g$ 」と呼ぶことにしよう。(すなわち、「ルール 0」から「ルール 255」までがある。)

例2:  $X = \{0, 1\}^2$ ,  $x_i^t = (\sigma_i^t, \hat{\sigma}_i^t) \in X$  と分解したとき、時間発展則が  $f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  を用いて

$$\sigma_i^{t+1} = f(\sigma_{i-1}^t, \sigma_i^t, \sigma_{i+1}^t) \oplus \hat{\sigma}_i^t \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}_i^{t+1} = \sigma_i^t \quad (4)$$

と表せるものを Elementary Reversible CA (ERCA) と呼ぶ。ただし  $\oplus$  は  $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$ ,  $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$  なる 2 項演算 (ブール代数でいう排他的論理和) を表す。これが可逆 (reversible) であることは、式 (3), (4) から逆の時間発展が

$$\sigma_i^t = \hat{\sigma}_i^{t+1} \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}_i^t = f(\hat{\sigma}_{i-1}^{t+1}, \hat{\sigma}_i^{t+1}, \hat{\sigma}_{i+1}^{t+1}) \oplus \sigma_i^{t+1} \quad (6)$$

と書けることから明らかである。やはり 3 変数のブール関数  $f$  によりルールが決まるので、ERCA も ECA と同様 256 個のルールを持つ。これらを番号  $N_f$  (式 (2) の  $g$  に  $f$  を代入したもの) と「可逆」を表す “R” を用いて「ルール 0R」から「ルール 255R」までの名前と呼ぶことにしよう。

さて、周期  $N$  の周期境界条件 ( $x_{i+N}^t = x_i^t$ ) のもとでの 1 次元 CA (1) に対し、次の形の加法的な量を考えよう。

$$\Phi(\{x_i^t\}) = \sum_{i=0}^{N-1} F(x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+\alpha}^t) \quad (7)$$

ただし、 $\alpha \geq 0$  は与えられた整数、 $F: X^{\alpha+1} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\alpha+1$  変数の関数である。ルールが与えられたとき、任意の  $N$ 、任意の初期条件  $\{x_i^0\}$  に対して  $\Phi(\{x_i^{t+1}\}) = \Phi(\{x_i^t\})$  が任意の時刻  $t$  において成り立つとき、 $\Phi$  を加法的保存量、 $F$  をその密度関数と呼ぶ。

服部と著者は論文 [2] において加法的保存量についての以下の定理を証明した。

定理  $\Phi$  が加法的保存量となるための必要十分条件は、任意の  $x_0, x_1, \dots, x_{\alpha+2} \in X$  に対して次式が成り立つことである。

$$G(x_0, x_1, \dots, x_{\alpha+2}) - F(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha+1}) = J(x_0, x_1, \dots, x_{\alpha+1}) - J(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha+2}) \quad (8)$$

ただし、関数  $G: X^{\alpha+3} \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$G(x_0, x_1, \dots, x_{\alpha+2}) = F(g(x_0, x_1, x_2), \dots, g(x_\alpha, x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2})) \quad (9)$$

により定義され、関数  $J: X^{\alpha+2} \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$J(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha+2}) = - \sum_{i=1}^{\alpha+2} [G(P, \dots, P, x_1, \dots, x_i) - F(P, \dots, P, x_1, \dots, x_{i-1})] \quad (10)$$

である。ただし、 $P \in X$  は任意の固定値を表す。 $(i=1$  のとき、 $F(P, \dots, P, x_1, \dots, x_{i-1})$  は  $F(P, \dots, P)$  を表す。もしくは  $J$  には定数項の不定性があるので、 $0$  としても良い。)

式 (8) はいわゆる「連続の式」の離散版である。この定理はそれが保存則と等価であることを示し、さらに保存量の流れ  $J$  を保存量密度  $F$  と時間発展ルール  $g$  を用いて表す方法を与えるものである。

定理の証明は以下に示すように簡単にできる。次の補題を示せばよい。

補題 1  $a+1$  変数関数  $H: X^{a+1} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、恒等的に

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a}) = 0 \quad (11)$$

が成り立つならば、 $a$  変数関数  $K: X^a \rightarrow \mathbb{R}$

$$K(x_1, x_2, \dots, x_a) = - \sum_{i=1}^a H(P, \dots, P, x_1, \dots, x_i) \quad (12)$$

を用いて

$$H(x_0, x_1, \dots, x_a) = K(x_0, x_1, \dots, x_{a-1}) - K(x_1, x_2, \dots, x_a) \quad (13)$$

と書ける。またその逆も成立する。

証明: 式 (13)  $\Rightarrow$  式 (11) は自明なので、式 (11)  $\Rightarrow$  式 (13) を十分大きな  $N$  について証明すればよい。 $H(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a})$  の独立変数が  $x_0$  を含むとき、その値を  $P$  と置いたものを  $H(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a})|_{x_0=P}$  と書くことにすると

$$\sum_{i=0}^{N-1} [H(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a}) - H(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a})|_{x_0=P}] = 0 \quad (14)$$

が成り立つ。 $x_0$  を含んでいない項はキャンセルするので、これは

$$\sum_{i=-a}^0 [H(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a}) - H(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a})|_{x_0=P}] = 0 \quad (15)$$

と同じ。ここで、 $x_{-1} = x_{-2} = \dots = x_{-\alpha} = P$  とおくと、式 (12) の  $K$  の定義より、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-a}^0 [H(P, \dots, P, x_0, x_1, \dots, x_{i+a}) - H(P, \dots, P, x_1, \dots, x_{i+a})] \\ &= H(x_0, x_1, \dots, x_a) + K(x_1, \dots, x_a) - K(x_0, \dots, x_{a-1}) - H(P, \dots, P) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。ところで、式 (11) ですべての変数を  $P$  とおけば  $H(P, \dots, P) = 0$  であることがわかる。したがって、式 (13) が成立する。□

定理を証明するためには、

$$H(x_0, x_1, \dots, x_{\alpha+2}) = F(g(x_0, x_1, x_2), \dots, g(x_\alpha, x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2})) - F(x_1, \dots, x_{\alpha+1}) \quad (17)$$

として補題 1 を適用すればよいだけである。

ここで 2 点注意を述べる。1 つは、保存量密度  $F$  はただ 1 つには決まらないということである。任意の関数  $S: X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  により

$$F'(x_0, x_1, \dots, x_\alpha) = F(x_0, x_1, \dots, x_\alpha) + S(x_0, x_1, \dots, x_{\alpha-1}) - S(x_1, x_2, \dots, x_\alpha) \quad (18)$$

と定義すると

$$\Phi(\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{N-1} F(x_i, \dots, x_{i+\alpha}) = \sum_{i=0}^{N-1} F'(x_i, \dots, x_{i+\alpha}) \quad (19)$$

が成り立つので、 $F'$  も同じ加法的保存量の密度になる。このとき、 $F'$  に対応する保存量の流れ  $J'$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} & J'(x_0, \dots, x_{\alpha+1}) \\ &= J(x_0, \dots, x_{\alpha+1}) + S(P, \dots, P) - S(x_1, \dots, x_\alpha) - S(g(P, P, P), \dots, g(P, P, P)) \\ & \quad + S(g(x_0, x_1, x_2), \dots, g(x_{\alpha-1}, x_\alpha, x_{\alpha+1})) \end{aligned} \quad (20)$$

この任意性（表面項の自由度）を取り去って、 $F$  がただ 1 つに決まるようにするためには、例えば

$$F(P, x_1, x_2, \dots, x_\alpha) = 0 \quad (21)$$

といった条件をおけばよい。こうすると式 (10) の右辺は  $F$  の項が大部分消え、保存量条件 (8) は、

$$G(x_0, x_1, \dots, x_{\alpha+2}) - F(x_0, \dots, x_\alpha) = \sum_{i=0}^{\alpha+1} [G(P, \dots, P, x_1, \dots, x_{i+1}) - G(P, \dots, P, x_0, \dots, x_i)] \quad (22)$$

と多少簡単化される。

もう1つの注意は、密度関数自身が保存量となる場合があるということである。正確に言うと、表面項を適当に選ぶことによって

$$F'(x_i^{t+1}, x_{i+1}^{t+1}, \dots, x_{i+\alpha}^{t+1}) = F'(x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+\alpha}^t) \quad (23)$$

が成り立つようにできる場合がある。この場合、流れは当然恒等的に

$$J'(x_0, x_1, \dots, x_{\alpha+1}) = 0 \quad (24)$$

となる。このような保存量を局在保存量と呼ぼう。局在保存量が存在するとき、 $X^{\alpha+1}$  を  $F$  の値によって、

$$X^{\alpha+1} = \bigcup_a X_a, \quad X_a = \{(x_0, \dots, x_\alpha) \in X^{\alpha+1} | F(x_0, \dots, x_\alpha) = a\} \quad (25)$$

と分解すると、セル  $i \sim i + \alpha$  の値  $(x_i^t, \dots, x_{i+\alpha}^t)$  は、初期条件によって決まるある1つの  $X_a$  の中でしか変化しない。こうして加法的保存量は、式 (24) が成り立つ局在性のものと、そうでない伝播性のものとに分類される。

### 3 ECA, ERCA の保存量

前節の結果を用いて ECA と ERCA の加法的保存量を求めてみよう。

ECA にはルール 0 からルール 255 までの 256 個のルールが存在するが、左右反転

$$g(x, y, z) \Leftrightarrow g(z, y, x) \quad (26)$$

や 0 と 1 を入れ換える操作

$$g(x, y, z) \Leftrightarrow 1 - g(1 - x, 1 - y, 1 - z) \quad (27)$$

により移り変わるルールは同形なので、これらを同一視すると 88 個の同値類に分類される。したがって 88 個のルールについて考えればよい。

$\alpha$  を1つ固定すると、関数  $F(x_0, x_1, \dots, x_\alpha)$  の独立変数の取り得る値は  $2^{\alpha+1}$  通りしかない。そのうち表面項の自由度が  $2^\alpha$  である。前節の注意を考慮に入れて、( $P=0$  として)

$$F(0, x_1, x_2, \dots, x_\alpha) = 0 \quad (28)$$

の条件を課すと、 $F$  は  $2^\alpha$  個のパラメータ  $\{b_k\}_{1 \leq k \leq 2^\alpha}$  を用いて以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, \dots, x_\alpha) &= \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_\alpha) \in \{0, 1\}^\alpha \\ k = 1 + \sum_{l=1}^{\alpha} a_l 2^{l-1}}} b_k x_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_\alpha^{a_\alpha} \quad (29) \\ &= b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1 + b_3 x_0 x_2 + b_4 x_0 x_1 x_2 + b_5 x_0 x_3 + \dots \quad (30) \end{aligned}$$

この展開形の利点は、ある  $\alpha$  における展開が、それより小さい  $\alpha$  の展開をそのまま含むということにある。

ECA のルールが与えられたとき、この展開形を保存量条件 (8) に代入すると、パラメータ  $\{b_k\}_{1 \leq k \leq 2^\alpha}$  に対する線形同次の連立方程式が得られる。その独立解の個数を、このルールが持つ加法的保存量の個数と定義する。この数はもちろん  $\alpha$  に依存し、ある  $\alpha$  での加法的保存量は、 $\alpha' (< \alpha)$  の保存量を含んでいる。

このようにして得られた保存量の個数とその具体的な形については論文 [2] を参照されたい。そこに、 $\alpha=6$  までのルール毎の加法的保存量の個数と、 $\alpha=4$  のすべての解が掲載されている。加法的保存量はルールによってさまざまであり、1個も保存量を持たないルールもあれば、任意の  $F$  が保存量となるルールもある。保存量を持たないものも、 $\alpha=6$  で持たないというだけであって、より大きな  $\alpha$  では持つのかもしれない。

ECA については Wolfram[1] による分類が有名である。彼は ECA および類似の CA を、ルールが生成する時空間パターンによって次の4つのクラスに分類した。

クラス 1 一様な状態に収束する

クラス 2 領域に分かれ、各領域では周期的パターンに落ち着く

クラス 3 カオティック、もしくはフラクタルな非周期的パターンを生成

クラス 4 複雑な局在パターンを生成

$\alpha=6$  の加法的保存量を持つルールは実はすべてクラス 2 に属している。これは、大変雑な議論をすれば、次のように考えることができる。クラス 1 では、ほとんどどんな初期状態から始めても、時間がたてば一様な状態に収束する。したがって、保存量があったとしても、ほとんどの状態は一様な状態と同じ値を持つことになる。加法的保存量でそれを実

現するのは困難である。逆にクラス3は簡単なパターン（例えば1つのセルだけが1で、他のすべてのセルは0の状態）から始めてもフラクタル的な時空パターンを生成する。加法的保存量は、そのとき現れるすべての空間配位に対して同じ値を持つわけだから、これも難しい。クラス4は定義自身不明確なものだが、複雑な局在パターンの時間発展に対して、時刻  $t$  によらない同じ値を与えるようにするためには、 $\alpha$  は相当大きくなければならぬだろう。

次に ERCA の保存量について考える。この場合も左右反転と 0 と 1 を入れ換える操作により、256 個のルールを 88 個の同値類に分けることができる。ただし、ECA と違って後者は

$$f(x, y, z) \Leftrightarrow f(1-x, 1-y, 1-z) \quad (31)$$

で与えられるので、ルール番号の分かれ方は ECA の場合と異なる。

変数を  $x_i^t = (\sigma_i^t, \hat{\sigma}_i^t) \in \{0, 1\}^2$ 、保存量密度を  $F(x_0, \dots, x_\alpha) = F(\sigma_0, \hat{\sigma}_0; \dots; \sigma_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha)$  と書こう。ECA の場合と同様に  $P = (0, 0)$  として、

$$F(0, 0; \sigma_1, \hat{\sigma}_1; \dots; \sigma_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha) = 0 \quad (32)$$

の条件を課すと、 $F$  の一般形を

$$\begin{aligned} & F(\sigma_0, \hat{\sigma}_0; \sigma_1, \hat{\sigma}_1; \dots; \sigma_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha) \\ &= b_1 \sigma_0 + b_2 \hat{\sigma}_0 + b_3 \sigma_0 \hat{\sigma}_0 + b_4 \sigma_0 \sigma_1 + b_5 \hat{\sigma}_0 \sigma_1 + b_6 \sigma_0 \hat{\sigma}_0 \sigma_1 + b_7 \sigma_0 \hat{\sigma}_1 \\ & \quad + b_8 \hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 + b_9 \sigma_0 \hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 + b_{10} \sigma_0 \sigma_1 \hat{\sigma}_1 + b_{11} \hat{\sigma}_0 \sigma_1 \hat{\sigma}_1 + b_{12} \sigma_0 \hat{\sigma}_0 \sigma_1 \hat{\sigma}_1 \\ & \quad + b_{13} \sigma_0 \sigma_2 + b_{14} \hat{\sigma}_0 \sigma_2 + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{(a_0, \hat{a}_0, \dots, a_\alpha, \hat{a}_\alpha) \in \{0, 1\}^{2\alpha+2} \\ (a_0, \hat{a}_0) \neq (0, 0) \\ k = a_0 + 2\hat{a}_0 + 3 \sum_{i=1}^{\alpha} (a_i + 2\hat{a}_i) 4^{i-1}}} b_k \sigma_0^{a_0} \hat{\sigma}_0^{\hat{a}_0} \dots \sigma_\alpha^{a_\alpha} \hat{\sigma}_\alpha^{\hat{a}_\alpha} \end{aligned} \quad (34)$$

のように  $3 \times 4^\alpha$  個のパラメータ  $\{b_k\}$  によって表すことができる。これを保存量条件に代入し、 $\{b_k\}$  に関して解くことにより、各ルールにおける加法的保存量が求められる。論文 [2] では  $\alpha = 2$  までの加法的保存量の個数と  $F$  の関数形を求めたが、ここでは  $\alpha = 3$  までの加法的保存量の個数を表 1 に示す。

表 1 に示した保存量の大多数は前節の注意で述べた局在保存量である。局在保存量が存在する系は、空間的に互いに相互作用しないいくつかの部分に分かれる傾向がある。たとえばルール 73R は

$$F(\sigma_0, \hat{\sigma}_0; \sigma_1, \hat{\sigma}_1; \sigma_2, \hat{\sigma}_2) = (1 - \sigma_0)(1 - \hat{\sigma}_0)\sigma_1\hat{\sigma}_1(1 - \sigma_2)(1 - \hat{\sigma}_2) \quad (35)$$

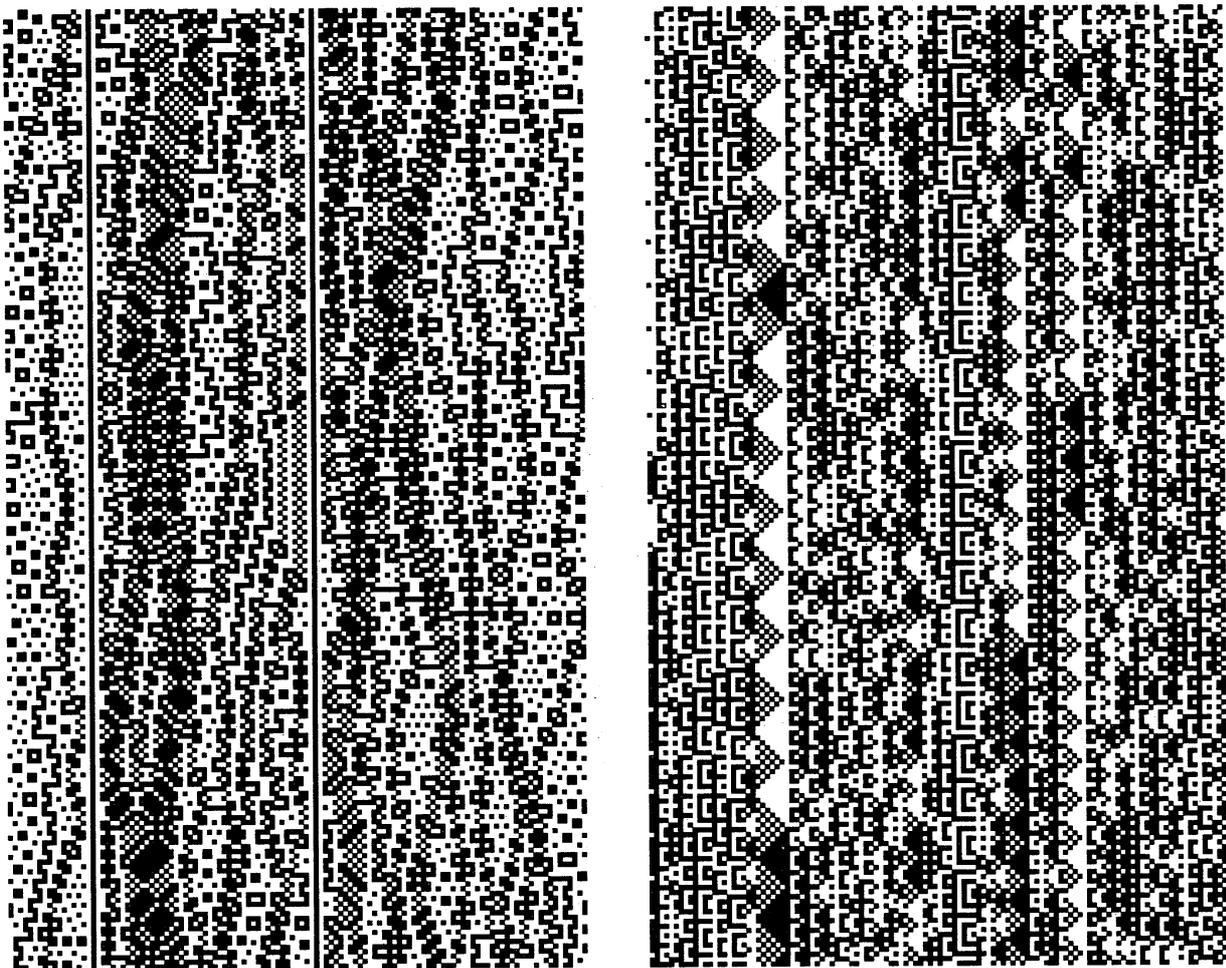
ルール				$\alpha$				ルール				$\alpha$			
Rule	Conj.	Refl.	C.R.	0	1	2	3	Rule	Conj.	Refl.	C.R.	0	1	2	3
0R	0R	0R	0R	2	7	26	100	59R	220R	115R	206R		1	2	6
1R	128R	1R	128R	1	5	16	50	60R	60R	102R	102R				
2R	64R	16R	8R	1	4	11	35	61R	188R	103R	230R				
3R	192R	17R	136R	1	3	8	24	62R	124R	118R	110R				
4R	32R	4R	32R	1	4	13	42	63R	252R	119R	238R				
5R	160R	5R	160R		2	7	19	73R	146R	73R	146R	1	2	2	
6R	96R	20R	40R		2	5	11	75R	210R	89R	154R				
7R	224R	21R	168R		1	3	6	77R	178R	77R	178R	1	3	3	
9R	144R	65R	130R		2	4	9	79R	242R	93R	186R				
10R	80R	80R	10R		2	3	9	90R	90R	90R	90R	2	4	8	
11R	208R	81R	138R		1	1	3	91R	218R	91R	218R	2	3	3	
12R	48R	68R	34R	1	2	4	10	94R	122R	94R	122R	1	1	1	
13R	176R	69R	162R					95R	250R	95R	250R	1	2	4	
14R	112R	84R	42R					105R	150R	105R	150R				
15R	240R	85R	170R					107R	214R	121R	158R				
18R	72R	18R	72R	1	3	6	15	109R	182R	109R	182R				
19R	200R	19R	200R	1	3	9	27	111R	246R	125R	190R				
22R	104R	22R	104R		2	3	4	123R	222R	123R	222R	2	2	2	
23R	232R	23R	232R		2	4	10	126R	126R	126R	126R	2	4	8	
24R	24R	66R	66R		1	2	4	127R	254R	127R	254R	2	4	8	
25R	152R	67R	194R					129R	129R	129R	129R	3	7	17	
26R	88R	82R	74R		1	1	1	131R	193R	145R	137R	1	2	4	
27R	216R	83R	202R		1	2	4	133R	161R	133R	161R				1
28R	56R	70R	98R					135R	225R	149R	169R				
29R	184R	71R	226R					139R	209R	209R	139R	1	1	2	
30R	120R	86R	106R					141R	177R	197R	163R				
31R	248R	87R	234R					143R	241R	213R	171R				
33R	132R	33R	132R	1	2	4	10	147R	201R	147R	201R	1	3	5	
35R	196R	49R	140R	1	2	4	10	151R	233R	151R	233R				
36R	36R	36R	36R		3	7	17	153R	153R	195R	195R				
37R	164R	37R	164R		1	3	4	155R	217R	211R	203R				
38R	100R	52R	44R		1	2	3	157R	185R	199R	227R				
39R	228R	53R	172R		1	2	3	159R	249R	215R	235R				
41R	148R	97R	134R					165R	165R	165R	165R			2	4
43R	212R	113R	142R					167R	229R	181R	173R				
45R	180R	101R	166R					175R	245R	245R	175R				1
46R	116R	116R	46R		1	2	5	179R	205R	179R	205R	2	7	19	
47R	244R	117R	174R					183R	237R	183R	237R				
50R	76R	50R	76R	1	3	8	20	187R	221R	243R	207R				
51R	204R	51R	204R	1	4	16	64	189R	189R	231R	231R			1	2
54R	108R	54R	108R		1	3	6	191R	253R	247R	239R			1	2
55R	236R	55R	236R		2	5	13	219R	219R	219R	219R	2	4	8	
57R	156R	99R	198R					223R	251R	223R	251R	2	3	7	
58R	92R	114R	78R					255R	255R	255R	255R	3	12	48	

表 1: ERCA の加法的保存量。ERCA の各ルールに対し、与えられた  $\alpha$  での加法的保存量の数を示す。空欄は 0 を表す。「ルール」の欄における Conj. は左端のルールに対して  $0 \Leftrightarrow 1$  反転したルール、Refl. は左右反転したルール、C.R. は両方の操作を施したルールを表す。

で表される局在保存量を持つが、 $F(\sigma_i, \hat{\sigma}_i; \sigma_{i+1}, \hat{\sigma}_{i+1}; \sigma_{i+2}, \hat{\sigma}_{i+2}) = 1$ となるのは

$$(\sigma_i, \hat{\sigma}_i; \sigma_{i+1}, \hat{\sigma}_{i+1}; \sigma_{i+2}, \hat{\sigma}_{i+2}) = (0, 0, 1, 1, 0, 0) \quad (36)$$

の場合だけであり、それ以外はすべて  $F = 0$  となる。したがって、セル  $i \sim i+2$  が初期条件で式 (36) の値を取れば、他のセルの状態に関わりなくすべての時刻において同じ値となり、セル間の相互作用を阻む壁として機能する。このような壁と壁にはさまれた領域は、他の領域と無関係に時間発展する。(図 1(a) 参照)。



(a) ルール 73R

(b) ルール 24R

図 1: 局在保存量を持つルール。横軸はセル  $i$  の位置、縦軸は下向きに時刻  $t$  を表す。黒い点は  $\sigma_i^t = 1$  を表し、空白は  $\sigma_i^t = 0$  を表す。

図 1(b) はルール 24R の時間発展を示す。このルールでは

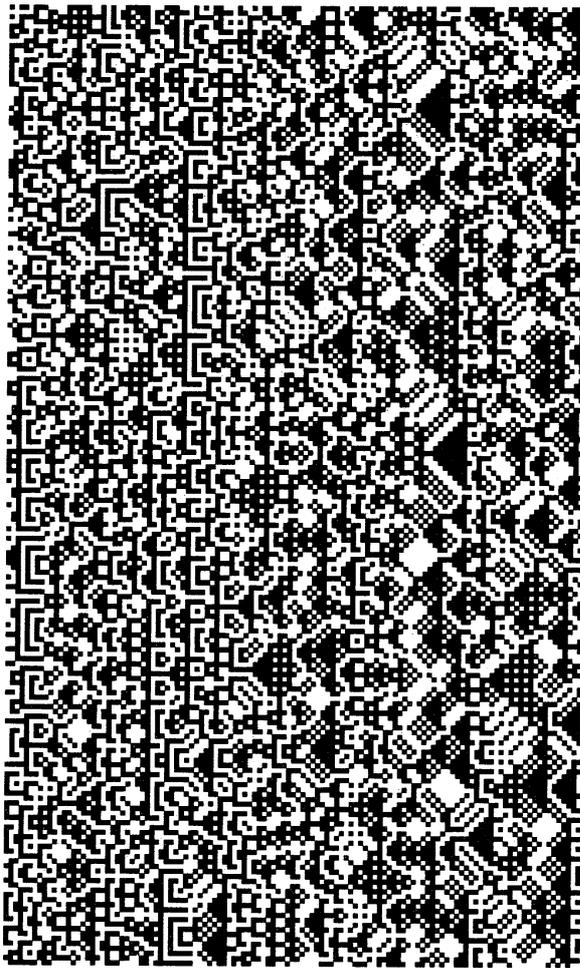
$$F(\sigma_0, \hat{\sigma}_0; \sigma_1, \hat{\sigma}_1) = (1 - \hat{\sigma}_0)\sigma_1 + (1 - \sigma_1)\hat{\sigma}_1 + \sigma_0(\hat{\sigma}_0 - \hat{\sigma}_1) \quad (37)$$

が局在保存量となるが、この場合は明確な壁のようなものはできていない。ルール 27R、59R など同様の性質を示す局在保存量を持っている。

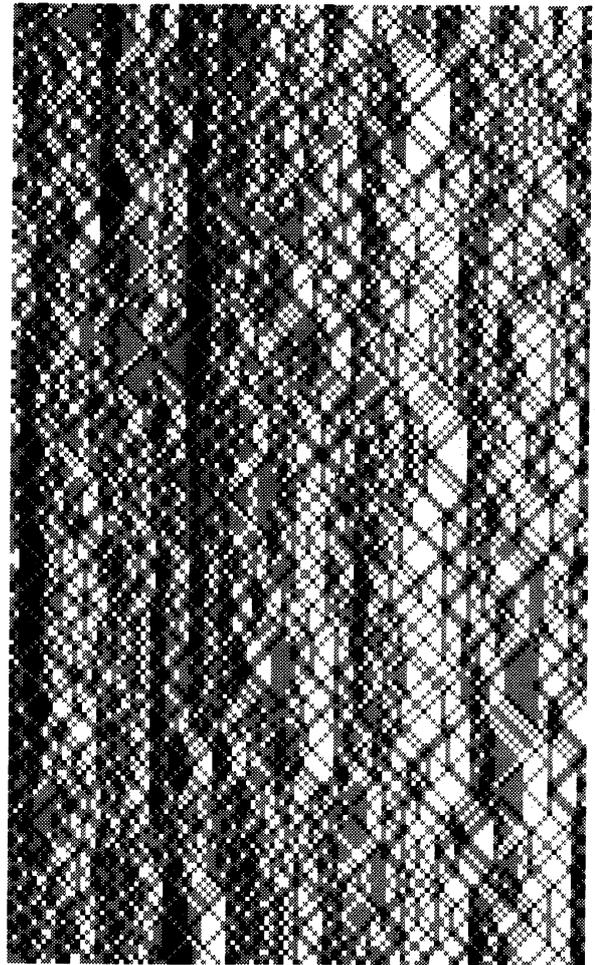
局在しない加法的保存量だけが存在するルールでは、保存量が粒子のように動き回り衝突散乱する過程が見られる。ルール 26R は密度関数

$$F(\sigma_0, \hat{\sigma}_0; \sigma_1, \hat{\sigma}_1) = (\sigma_0 - \hat{\sigma}_1)^2 + (\hat{\sigma}_0 - \sigma_1)^2 \quad (38)$$

で表される加法的保存量を持つが、その時間発展の様子を図 2 に示す。



(a) 力学変数の時間発展



(b) 保存量の時間発展

図 2: ルール 26R の時間発展。(a) は  $\{\sigma_i^t\}$  を、(b) は (a) に対応する式 (38) の保存量の時間発展を表す。黒い点は  $F(\sigma_i^t, \hat{\sigma}_i^t; \sigma_{i+1}^t, \hat{\sigma}_i^t) = 2$ 、灰色の点は 1、空白は 0 を表す。

このような ERCA のルールでは、加法的保存量をエネルギーとみなして、統計力学を構成することができる。Gibbs 流の統計力学の議論を行うための条件は、相空間体積の保存 (Liouville の定理) とエネルギー保存則の成立だが、前者は ERCA の可逆性から保証さ

れているからである。例えば分配関数は

$$Z = \sum_{\{\sigma_i, \hat{\sigma}_i\}} e^{-\beta \Phi(\{\sigma_i, \hat{\sigma}_i\})} \quad (39)$$

で与えられ、通常の手続きにしたがって、逆温度  $\beta$  と保存量の平均密度  $\Phi/N$  の間の関係が得られる。また境界条件を変えて、熱源を表すように、両端の変数の時間発展を確率的にすると、熱伝導のシミュレーションができる。こうしてCAを用いて統計力学の成立条件について問うことが可能になる。これらについては、文献[3, 4, 5]を参照されたい。

ここでは、統計力学的応用には踏み込まずに、保存量を粒子、もしくは準粒子とみなしたときの散乱の振る舞いについて述べる。ルール 91R と 123R の2個のルールについて考えよう。これらは、次の密度関数で与えられる  $\alpha = 1$  の加法的保存量を共通に持っている。

$$F(\sigma_0, \hat{\sigma}_0; \sigma_1, \hat{\sigma}_1) = 1 + \sigma_0 \hat{\sigma}_0 + \sigma_1 \hat{\sigma}_1 - [1 - 2(1 - \sigma_0)(1 - \hat{\sigma}_1)][1 - 2(1 - \hat{\sigma}_0)(1 - \sigma_1)] \quad (40)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_0 & \hat{\sigma}_1 \\ \sigma_0 & \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \text{for } \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_0 & \hat{\sigma}_1 \\ \sigma_0 & \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (41)$$

どちらのルールにも他の保存量が存在するのだが、今は無視しよう。上式の保存量を「エネルギー」と呼ぶことにする。無限系を考え、最もエネルギーの小さい基底状態を求めると、空間的に一様、時間的には周期3を持つ次の図のような時間発展を示す  $\Phi = 0$  の状態が得られる。(この図は  $\{\sigma_i^t\}$  を表し、位置  $i$  は右向き、時刻  $t$  は下向きに増大する。 $\hat{\sigma}_i^t = \sigma_i^{t-1}$  なので、これで時間発展が完全に表せていることに注意。)

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \end{array}$$

$\Phi = 1$  の状態は存在できず、最もエネルギーの低い励起状態は  $\Phi = 2$  になる。それには次の5種類のモードが存在する。(F  $\neq$  0 に関するセルの値は太字で表す)

```

. . 0 0 0 0 1 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 0 0 0 0 . .
. . 1 1 1 1 1 1 1 1 1 . .
. . 0 0 0 0 1 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 0 0 0 0 . .
. . 1 1 1 1 1 1 1 1 1 . .

```

モード S

```

. . 0 0 0 0 1 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 0 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 1 0 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 1 1 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 0 0 0 0 0 0 . .

```

モード A

```

. . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 . .
. . 1 1 1 1 1 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 1 1 1 1 . .
. . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 . .
. . 1 1 1 1 0 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 1 1 1 1 1 1 . .

```

モード B

```

. . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 1 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 0 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 1 1 0 0 0 . .

```

モード C

```

. . 0 0 0 0 1 0 0 0 0 . .
. . 1 1 1 1 1 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 0 1 1 1 1 . .
. . 0 0 0 0 0 1 0 0 0 . .
. . 1 1 1 1 1 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 0 0 1 1 1 . .

```

モード D

モード Sは周期3の静止したパターンを作る。モード A、Bでは、時間が3進むと左へ1だけシフトする。したがってエネルギーも  $-1/3$  の速度で移動する。同様に、モード C、Dは  $1/3$  の速度を持つ。ここまでは、両ルールに共通の性質である。

モード Sとその他のモード、モード A、Bとモード C、Dは衝突が可能である。2体衝突の振る舞いを調べてみると、これはルールによって異なる。例えば、モード Sとモード Aの衝突は次のようになる。

```

. . 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 . .
. . 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 . .
. . 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 . .
. . 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 . .

```

ルール 91R  
S:A → A:S

```

. . 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 . .
. . 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 . .
. . 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 . .
. . 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 . .

```

ルール 123R  
S:A → B:D

ルール 91R では、シフトを伴うだけで衝突後も衝突前と同じモードが現れるが、ルール 123R では、B と D という全く別のモードに変化してしまう。同様の現象が、C と A の衝突でも観測される。この場合は、モード C と A の距離によって、下図のように 2 種類の散乱が起こりうる。

<pre> . . . 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 . . . . . . 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 . . . . . . 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 . . . </pre>	<pre> . . . 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 . . . . . . 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 . . . </pre>
<p>ルール 91R C: A → A: C</p>	<p>ルール 123R C: A → A: C</p>

<pre> . . . 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 . . . . . . 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 . . . </pre>	<pre> . . . 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 . . . . . . 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 . . . . . . 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 . . . . . . 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 . . . </pre>
<p>ルール 91R C: A → A: C</p>	<p>ルール 123R C: A → S: D</p>

ルール 91R ではどちらの場合も衝突によるモードの変化がないのに対して、ルール 123R ではモードが変化する場合としない場合とがある。考えられるすべての 2 体衝突に対して、衝突の前後のモードを表 2 に示す。上で見られた性質は、実はすべての 2 体衝突に対して当てはまることがわかる。

ルール 91R が示すこの性質は、ソリトンが衝突において示す性質と似ている。では、ルール 91R はソリトンオートマトンなのだろうか？ 実は、3 体以上の多体衝突の挙動を調べると、そうではないということがわかる。例えば、モード D、C、B の 3 体衝突は次のようになる。

ルール 91R	ルール 123R
S : A → A : S	S : A → B : D
S : B → B : S	S : B → B : S
C : S → S : C	C : S → S : C
D : S → S : D	D : S → A : C
C : A → A : C	C : A → A : C または S : D
C : B → B : C	C : B → A : D または B : C
D : A → A : D	D : A → A : D または B : C
D : B → B : D	D : B → B : D または A : S

表 2: ルール 91R とルール 123R の 2 体衝突

..	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	..
..	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	..
..	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	..
..	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	..
..	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	..
..	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	..
..	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	..
..	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	..
..	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	..
..	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	..
..	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	..
..	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	..
..	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	..
..	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	..
..	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	..	

ルール 91R の 3 体衝突

$$D : C : B \rightarrow A : W$$

ここで、W と書いたモードは、保存量の値 4、時間が 6 進むと右へ 1 だけシフトする速度 1/6 のパターンであり、 $\Phi = 2$  のモードとは異なる新しいモードである。このように、ルール 91R では、2 体衝突の和に還元されない多体衝突が存在する。一方おもしろいことに、ルール 123R では、多体衝突は 2 体衝突の和に還元できる。このように、保存量を持つ系には、ソリトンとは違う動力的性質を示すものが存在している。

以上 ECA と ERCA の加法的保存量について見てきたが、この 2 つの例に限らず、X が有限であれば、保存量条件 (8) を用いて保存量を求めることが可能であることがおわかりいただけると思う。また、保存量に着目することにより、系の興味深い性質が見えてくる

ということも、納得していただけたのではないだろうか。

## 4 保存量条件の拡張

この節では、2節で求めた保存量条件を、いくつか違った方向に拡張することを考える。

### 4.1 近傍数

2節では3近傍のCAに対して条件を求めたが、これを任意の近傍数のCAに拡張することは直ちにできる。CAの時間発展則が

$$x_i^{t+1} = g(x_{i-b}^t, x_{i-b+1}^t, \dots, x_{i+c}^t) \quad (42)$$

で与えられるとしよう。近傍数は  $b+c+1$  である。さて

$$\Phi(\{x_i^t\}) = \sum_i F(x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+\alpha}^t) \quad (43)$$

が加法的保存量であることは、

$$G(x_0, x_1, \dots, x_{b+c+\alpha}) = F(g(x_0, \dots, x_{a+b}), \dots, g(x_\alpha, \dots, x_{b+c+\alpha})) \quad (44)$$

として、

$$\sum_{i=0}^{N-1} [G(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+b+c+\alpha}) - F(x_{i+b}, \dots, x_{i+b+\alpha})] = 0 \quad (45)$$

が成り立つことと等価であるから、補題1がそのまま使える。したがって、この場合の保存量条件は

$$G(x_0, x_1, \dots, x_{b+c+\alpha}) - F(x_b, \dots, x_{b+\alpha}) = J(x_0, \dots, x_{b+c+\alpha-1}) - J(x_1, \dots, x_{b+c+\alpha}) \quad (46)$$

で与えられる。ここで  $J(x_0, \dots, x_{b+c+\alpha-1})$  は次式で定義される。

$$J(x_0, \dots, x_{b+c+\alpha-1}) = - \sum_{i=1}^{b+c+\alpha} G(P, \dots, P, x_1, \dots, x_i) + \sum_{i=c+1}^{b+c+\alpha} F(P, \dots, P, x_1, \dots, x_{i-c}) \quad (47)$$

ただし、 $F(P, \dots, P)$  による定数項は適当に調整した。

この拡張を用いて得られた結果を1つ述べておこう。保存量条件はルールを与えれば密度関数  $F$  に対する条件になるが、逆に保存量の関数形を指定してルールに対する条件を与えるものともみなすことができる。そこで、 $X = \{0, 1\}$  は固定して近傍数を変化させたときに、1の数を保存する（すなわち  $F(x) = x$  が保存量密度となる）ルールの数がどのように変化するかを調べてみると、

近傍数	1 の数を保存するルール数	同値類の数	全ルール数
3 近傍 (ECA)	5	3	256
4 近傍	22	7	65536
5 近傍	428	129	4294967296

であることがわかった。

## 4.2 Staggered Invariants

加法的保存量はセルに関する和の形に書ける量であったが、位相因子を含む次の形の量に拡張することができる。

$$\Psi(\{x_i^t\}) = e^{2\pi i t/\tau} \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i l/\lambda} F(x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+\alpha}^t) \quad (48)$$

ただし  $N/\lambda \in \mathbb{N}$  とする。 $\lambda = \tau = 1$  の場合が加法的保存量であり、 $\lambda$  または  $\tau$  が 2 以上の整数の場合がその一般化であり、staggered invariants と呼ぶ。このような保存量は、流体系のシミュレーションに用いられる格子気体オートマトンのある種のモデルにも存在することが知られている [7]。

詳細は省略して結果のみ書くと、 $\Psi$  が保存量となるための条件は次のように書ける。

$$e^{\frac{2\pi i}{\tau}} G(x_0, \dots, x_{\alpha+2}) - F(x_1, \dots, x_{\alpha+1}) = J(x_0, \dots, x_{\alpha+1}) - e^{\frac{2\pi i}{\lambda}} J(x_1, \dots, x_{\alpha+2}) \quad (49)$$

ただし、

$$J(x_0, \dots, x_{\alpha+1}) = c_{\tau, \lambda} + \sum_{l=0}^{\alpha+1} e^{-\frac{2\pi i(l+1)}{\lambda}} \left[ F(P, \dots, P, x_0, \dots, x_{\alpha-1}) - e^{\frac{2\pi i}{\tau}} G(P, \dots, P, x_0, \dots, x_{\alpha+1-l}) \right] \quad (50)$$

ここで、 $c_{\tau, \lambda}$  は次式で定義される定数である。

$$c_{\tau, \lambda} = \begin{cases} 0 & \text{for } \lambda = 1 \\ \frac{e^{-\frac{2\pi i(\alpha+2)}{\lambda}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\lambda}}} \left[ e^{\frac{2\pi i}{\tau}} G(P, \dots, P) - F(P, \dots, P) \right] & \text{otherwise} \end{cases} \quad (51)$$

よってこの場合も連続の式が得られる。

この条件を用いて ECA や ERCA の staggered invariants を求めるのは 3 節の場合とほとんど同様にできる。ただ 1 つ注意すべきことは、 $\lambda = 1$  かつ  $\tau \neq 1$  の場合は、式 (29) や (34) の展開に定数項を含めておく必要があるという点である。導出の詳細と結果については文献 [6] を参照のこと。

### 4.3 2次元系

次のように補題1を2次元の場合に拡張することができる。関数  $H: X^{(a+1)(b+1)} \rightarrow \mathbb{R}$  を考えよう。 $i$  を水平方向のインデックス、 $j$  を垂直方向のインデックスとして、セル  $(i, j)$  の変数の値を  $x_{i,j}$  で表す。周期境界条件  $x_{i+N,j} = x_{i,j+M} = x_{i,j}$  のもとで

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} H(x_{i,j}, x_{i,j+1}, \dots, x_{i,j+b}; x_{i+1,j}, \dots, x_{i+1,j+b}; \dots; x_{i+a,j}, \dots, x_{i+a,j+b}) = 0 \quad (52)$$

が恒等的に成り立つための条件は次のように与えられる。

**補題 2** 関数  $H$  に対する条件 (52) は  $H$  が次のように書けることと等価である。

$$H(x_{i,j}, \dots, x_{i+a,j+b}) = \Delta_h J_h + \Delta_v J_v \quad (53)$$

ただし  $\Delta_h$  と  $\Delta_v$  は、それぞれ水平方向、垂直方向の差分演算を表す。また  $J_h$ 、 $J_v$  は次式で定義される関数である。

$$\begin{aligned} & J_h(x_{0,0}, \dots, x_{0,b}; x_{1,0}, \dots, x_{1,b}; \dots; x_{a-1,0}, \dots, x_{a-1,b}) \\ &= \sum_{i=0}^{a-1} H(P, \dots, P; x_{0,0}, \dots, x_{0,b}; \dots; x_{i,0}, \dots, x_{i,b}) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & J_v(x_{0,0}, \dots, x_{0,b-1}; x_{1,-b}, \dots, x_{1,b-1}; \dots; x_{a,-b}, \dots, x_{a,b-1}) \\ &= \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^{b-1} H(P, \dots, P; x_{0,0}, \dots, x_{0,j}; \dots; x_{i,j-b}, \dots, x_{i,j}) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{b-1} H(P, \dots, P; x_{1,j-b}, \dots, x_{1,j}; \dots; x_{i+1,j-b}, \dots, x_{i+1,j}) \end{aligned} \quad (55)$$

証明は1次元の場合と同様にできる。式 (53)  $\Rightarrow$  (52) は自明なので、式 (52)  $\Rightarrow$  (53) を示せばよい。まず、式 (52) より、

$$H(P, \dots, P) = 0 \quad (56)$$

が成り立つことに注意しておく。次に、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} H(x_{i,j}, \dots, x_{i+a,j+b}) - H(x_{i,j}, \dots, x_{i+a,j+b})|_{x_{0,0}=P} \\ &= \sum_{i=-a}^0 \sum_{j=-b}^0 H(x_{i,j}, \dots, x_{i+a,j+b}) - H(x_{i,j}, \dots, x_{i+a,j+b})|_{x_{0,0}=P} \end{aligned} \quad (57)$$

が得られるから、ここで “ $i < 0$ ” または “ $i = 0$  かつ  $j < 0$ ” ならば  $x_{i,j} = P$  とおくと、

$$0 = \sum_{i=-a}^0 \sum_{j=-b}^0 \{H(P, \dots, P, x_{0,0}, x_{0,1}, \dots, x_{0,j+b}; \dots; x_{i+a,j}, \dots, x_{i+a,j+b}) - H(P, \dots, P, x_{0,1}, \dots, x_{0,j+b}; \dots; x_{i+a,j}, \dots, x_{i+a,j+b})\} \quad (58)$$

ただし最後の項は  $j = -b$  のときには  $H(P, \dots, P; x_{1,-b}, \dots, x_{1,0}; \dots; x_{i+a,-b}, \dots, x_{i+a,0})$  を表すものとする。ここでインデックスを適当に付け替えて、式 (56) を用いると、

$$\begin{aligned} & H(x_{0,0}, \dots, x_{a,b}) \\ &= \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^{b-1} \{H(P, \dots, P, x_{0,1}, \dots, x_{0,j+1}; \dots; x_{i,j-b+1}, \dots, x_{i,j+1}) \\ &\quad - H(P, \dots, P, x_{0,0}, \dots, x_{0,j}; \dots; x_{i,j-b}, \dots, x_{i,j})\} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{b-1} \{H(P, \dots, P; x_{1,j-b+1}, \dots, x_{1,j+1}; \dots; x_{i+1,j-b+1}, \dots, x_{i+1,j+1}) \\ &\quad - H(P, \dots, P; x_{1,j-b}, \dots, x_{1,j}; \dots; x_{i+1,j-b}, \dots, x_{i+1,j})\} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{a-1} \{H(P, \dots, P; x_{1,0}, \dots, x_{1,b}; \dots; x_{i+1,0}, \dots, x_{i+1,b}) \\ &\quad - H(P, \dots, P; x_{0,0}, \dots, x_{0,b}; \dots; x_{i,0}, \dots, x_{i,b})\} \end{aligned} \quad (59)$$

$$= \Delta_h J_h + \Delta_v J_v \quad (60)$$

を得る。ただし、式 (57) の右辺の 2 個の 2 重和の部分が  $\Delta_v J_v$  であり、1 重の和の項が  $\Delta_h J_h$  を表す。これで補題 2 は証明された。

補題 2 を用いて保存量条件を書き下すことは読者に任せる。この条件を用いて、von Neumann 近傍 (図 3 参照) を持つ 2 状態 ( $X = \{0, 1\}$ ) の CA で、1 の数を保存するものはどのようなものがあるか調べてみたところ、すべて 1 次元の CA に還元できるものばかりであることがわかった。

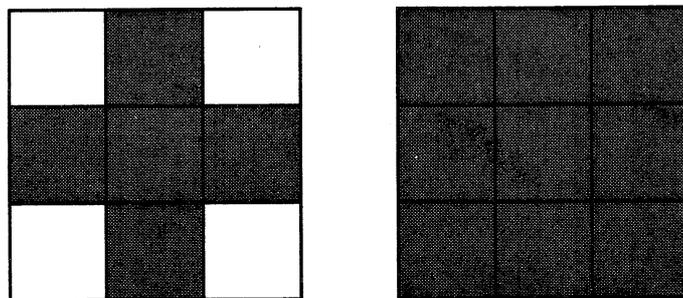


図 3: von Neumann 近傍 (左) と Moore 近傍 (右)

保存量を持つ2次元CAでよく知られているものに、Ising系のシミュレーションを決定論的に行うために考案された Creutz モデル [8] と Q2R[9] と呼ばれるモデルがある。これらのモデルでは正方格子を2つの副格子に分け、副格子ごとに状態更新を行うので、ここで考えているCAとは若干異なる。しかし、この場合も連続の式が導かれる。(詳細の説明は省略する。)

3次元以上のCAにおいても、同様の補題が一般的に成り立つものと予想される。

## 5 保存量を持つCAと計算

最後に少し毛色の変った問題を考えよう。セルオートマトンにおける計算の問題である。

セルオートマトンにおける計算に関しては、von Neumann 以来の歴史があり、万能 Turing 機械や自己増殖機械の構成が有名である。これは、論理ゲートをCAの中に作り、それらを組み合わせることで実現される。ここでは、そのような von Neumann 型の計算ではなく、CAの並列過程自身が何らかの大域的な情報処理を表現しているような場合について考える。CAの素子は局所的に比較的単純な作業を行っているに過ぎないが、そういうものに大域的な情報が扱えるだろうかという問題である。このような計算過程は「創発計算」[10]という名で呼ばれることがある。

そのような計算過程の中で、次に述べる密度分類課題と呼ばれるものについて考えよう。周期  $N$  の周期境界条件の下での1次元、2状態 ( $X = \{0, 1\}$ ) のCAを考え、初期状態における1の密度を  $\rho = \sum_i x_i^0$  とする。また  $0 < \rho_c < 1$  なる定数  $\rho_c$  (閾値) を選び、CAに対し次の要請をおく。

- $\rho < \rho_c$  ならば、 $M$  ステップ以内にすべてのセルの値が0の定常状態に収束する。
- $\rho > \rho_c$  ならば、 $M$  ステップ以内にすべてのセルの値が1の定常状態に収束する。

$M$  は周期  $N$  に依存してよい。また、 $\rho = \rho_c$  の場合の動作については特に指定しない。これが密度分類課題である。

例えば、この課題を近似的に解くCAとして次のようなGKLルール[11]と呼ばれるものが知られている。

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} \text{majority}\{x_{i-3}^t, x_{i-1}^t, x_i^t\} & \text{if } x_i^t = 0 \\ \text{majority}\{x_i^t, x_{i+1}^t, x_{i+3}^t\} & \text{if } x_i^t = 1 \end{cases} \quad (61)$$

ここで  $\text{majority}\{a, b, c\}$  は「多数決」を表し、 $\{a, b, c\}$  が1を2個以上含めば1、0を2個以上含めば0となる関数である。このルールは閾値  $\rho_c = 1/2$  でかなりよく分類を行うが、 $\rho \simeq \rho_c$  の場合には間違えることも多い。

Mitchell[12]らは、遺伝的アルゴリズムを用いてこの課題を解くCAの探索を行い、興味深い振る舞いをするルールを発見したが、完全にこの課題を解くCAは見つからなかった。実は「密度分類課題を完全に解く1次元CAは存在しない」ことが証明されているのである[13]。

ところが最近、すべてのセルが0またはすべてのセルが1という出力条件を緩和することにより[14]、もしくは2種類のCAを用いることによって[15]、いかなる初期条件に対しても密度分類を行うCAが得られることが報告された。どちらも本質的には同じであり、ECAのルール184を用いる。このルールは、(i)1の個数を保存するルールであり、しかも(ii)0と1を可能な限り交互に並べようとする。したがって、ある時刻( $M = \lfloor N/2 \rfloor$ )以降に00というブロックが検出されたならば  $\rho < 1/2$  であることを示し、11というブロックが検出されたならば  $\rho > 1/2$  を示す。こうして閾値  $\rho_c = 1/2$  の密度分類が達成される。あるいは、時刻  $M$  においてルール232という多数決のルールに切り替えることにより、元の出力条件を満たすようにすることも可能である。

ルール184の性質(i)は加法的保存則であり、この「計算」過程において本質的な役割を果たしている。では、このような計算過程はCAにおいてどれくらい一般的に見られるものであろうか。あるいは、このような計算を行うための条件とは何だろうか。

この問題を考えるために、まずルール184と同様の性質を示すCAを探してみよう。性質(i)に着目して1の個数を保存するCAを選び出し、それらが密度分類を行うかどうかを調べる。ECAの範囲では、1の個数を保存するルールは184以外は恒等変換とシフトだけであり、これらが分類を行わないことは明らかである。そこで、4近傍のルール

$$x_i^{t+1} = g(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, x_{i+2}^t) \quad (62)$$

について考える。4.1節の表にあるように、4近傍のルールで1の数を保存するものは(対称性の変換で移り変わるものを同一視すると)7個しかない。そのうちの3個はECAに現れるものと同じなので、新しいルールは4個だけになる。Wolframのやり方を拡張して各ルールに

$$\sum_{x,y,z,w} 2^{8x+4y+2z+w} g(x,y,z,w) \quad (63)$$

という番号を付けると、各同値類を代表する最も番号の若いルールは43944、48268、48770、51448である。

これらのルールが  $\rho$  に関して分類を行うかどうかを調べた結果は、次のようになった。

ルール 43944	閾値 $\rho_c = 1/3$ で分類
ルール 48268	2個の閾値 $\rho_{c1} = 1/2$ 、 $\rho_{c2} = 2/3$ で分類
ルール 48770	2個の閾値 $\rho_{c1} = 1/3$ 、 $\rho_{c2} = 2/3$ で分類
ルール 51448	分類しない

この結果は、ブロックパターンに対する preimages を調べることにより証明できる。例えばルール 43944 では、次の3つの命題が成立する。

1.  $t > 0$  において  $(x_i^t, x_{i+1}^t, x_{i+2}^t) = (0, 0, 0)$  ならば、 $(x_{i-1}^{t-1}, x_i^{t-1}, x_{i+1}^{t-1}) = (0, 0, 0)$  でなければならない。
2.  $t > 0$  で  $(x_i^t, x_{i+1}^t) = (1, 1)$  ならば、 $(x_{i+2}^{t-1}, x_{i+3}^{t-1}) = (1, 1)$  である。
3.  $t > 0$  で  $(x_i^t, x_{i+1}^t, x_{i+2}^t) = (1, 0, 1)$  ならば、 $(x_{i-1}^{t-1}, x_i^{t-1}, x_{i+1}^{t-1}) = (1, 0, 1)$  または  $(x_{i-1}^{t-1}, x_i^{t-1}, x_{i+1}^{t-1}) = (0, 1, 1)$  のいずれかが成り立つ。

これらは、ルール表を見ながら可能なパターンを一つ一つ調べることによって証明される。そしてこれらの命題から、もし  $(x_i^t, x_{i+1}^t, x_{i+2}^t) = (0, 0, 0)$  であれば、このパターンは初期値からずっと速度1で右へシフトを続けてきたのであり、 $(x_i^t, x_{i+1}^t, x_{i+2}^t)$  が2個以上の1を含むならば、そのようなブロックは初期値からずっと速さ2で左へシフトを続けてきたのだということがわかる。したがって、もし  $t > [N/3]$  でこの2種類のブロックが共存していたとするならば、過去においてそれらが2個以上の連続したセルにおいて交わりを持っていたことになり矛盾する。したがって、 $t > [N/3]$  では  $(0, 0, 0)$  と2個以上の1を含む連続した3個のセルからなるブロックとは共存できないことになる。こうして閾値  $\rho_c = 1/3$  の密度分類が実現される。(図4(a),(b))

閾値が2個あるルールに対しても同様の解析ができる。ただし、この場合は初期条件において存在したパターン同士の競合ではなく、いったん別のパターンを作り出す点が違っている。(図4(c)-(f))

$\rho = \rho_c$  の場合、これらのルールでは、どんな初期条件からの時間発展も、シフトによる違いを除いて同一のパターンに収束する。このことは、1の個数以外の保存量が存在しないことを強力に示唆している。一方、密度分類を行わないルール 51448 には、 $\sum_i (1-x_i)x_{i+1}x_{i+2}$  という別の保存量が存在しており、このことが密度分類の実行を阻害していると考えられる。保存量条件を用いる方法では、 $\alpha$  というパラメータを与えて議論しなければならず、それより大きなパラメータ値を持つ保存量に関しては何も言うことができなかったが、密度分類を行うようなルールに対しては、任意の  $\alpha$  の加法的保存量および staggered invariants の不在を証明できる可能性がある。

逆に加法的保存量が1個だけのルールであれば、それは1の個数に限定する必要はない。論文 [6] の表にあるように、 $\alpha = 6$  で加法的保存量および staggered invariants を1個しか持たない ECA は、ルール 11、14、35、43、56、142、184 の7個であるが、これらはすべてそのルールに付随する保存量の密度を分類することがわかる。図5にルール11の場合

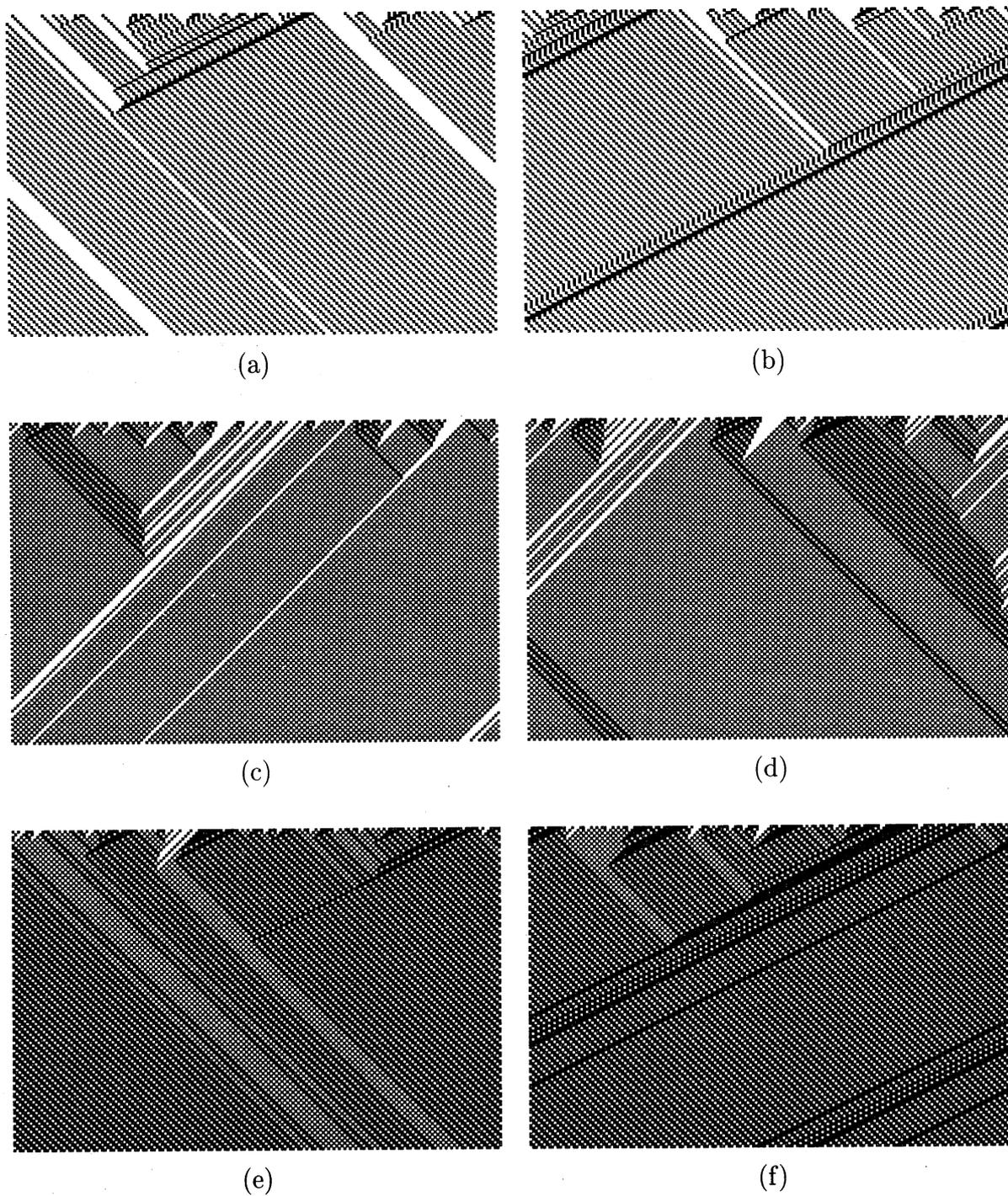


図 4: 密度分類を行う CA。(a)、(b) はルール 43944、(c)-(f) はルール 48268 の時間発展。系の大きさはいずれも  $N = 180$ 。1 の数は (a) 57、(b) 63、(c) 87、(d) 93、(e) 116、(f) 124。

を示す。このルールは

$$\Phi^{11}(\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i(1-x_{i+1})(1-x_{i+2}+x_{i+2}x_{i+3}) \quad (64)$$

という保存量を1個だけ持ち、 $\rho^{11} = \Phi^{11}/N$ の値が  $\rho_c^{11} = 1/4$ より小さい場合と大きい場合で異なる終状態に達する。

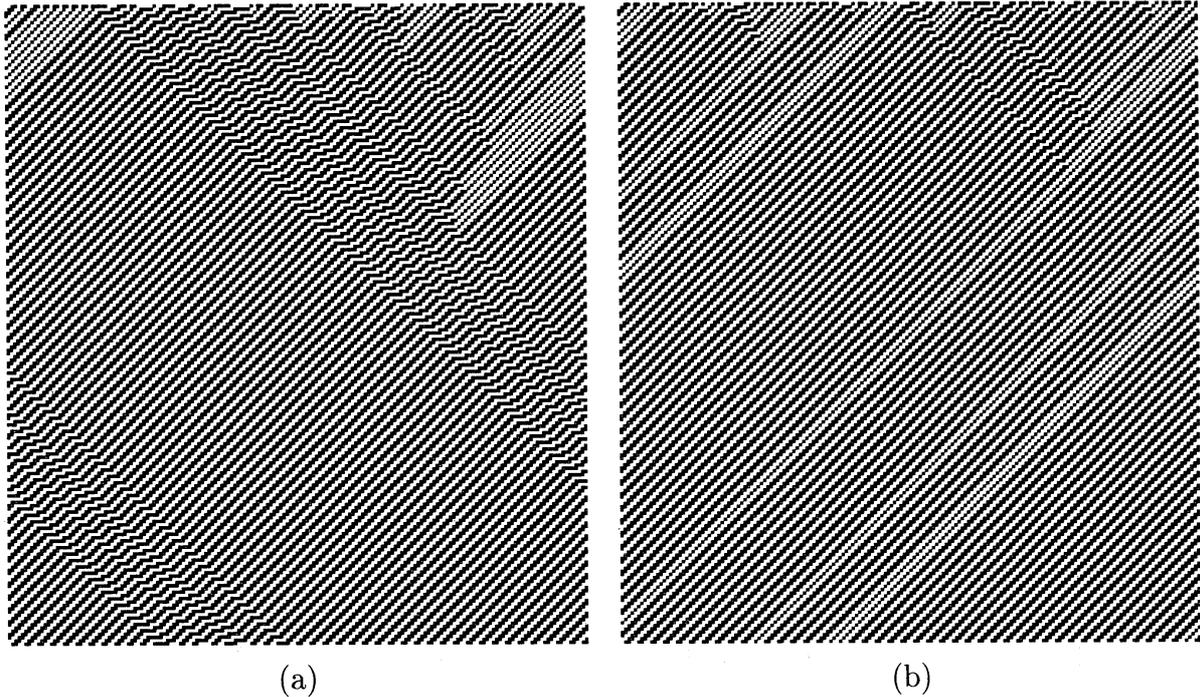


図 5: ルール 11 の時間発展。N = 180。保存量の密度はそれぞれ (a)  $\rho^{11} = 42/180$ 、(b)  $\rho^{11} = 46/180$ 。

以上から、密度分類課題を解く CA と加法的保存量を1種類しか持たない不可逆な CA との間に密接な関係があるということが分かった。一般的な証明は無いが、調べた範囲内では後者は常に前者になっている。必要条件なのか、十分条件なのかといったことや、保存量の形に対して制限があるのかどうか、閾値はどのようにして決まるか、保存量や閾値を与えてルールを設計する方法はあるか、2次元以上ではどうなるのか等の問題は今後の課題である。

## 参考文献

- [1] S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity: Collected Papers* (Addison-Wesley, 1994).

- [2] T. Hattori and S. Takesue, *Physica D* **49** (1991) 295–322.
- [3] S. Takesue, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 2499–2502.
- [4] S. Takesue, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 252–255.
- [5] S. Takesue, *Physica D* **103** (1997) 190–200.
- [6] S. Takesue, *Complex Systems* **9** (1995) 149–168.
- [7] G. Zanetti, *Phys. Rev.* **A40** (1989) 1539–1548.
- [8] M. Creutz, *Ann. Phys. (N.Y.)* **167** (1986) 62.
- [9] G.Y. Vichniac, *Physica D* **10** (1984) 96.
- [10] *Emergent Computation: Self-Organizing, Collective, and Cooperative Phenomena in Natural and Artificial Computing Networks*, edited by S. Forrest (MIT Press, Cambridge, 1991).
- [11] P. Gacs, G. L. Kurdyumov, and L. A. Levin, *Problemy Peredachi Informatsii* **14** (1978) 92–98.
- [12] M. Mitchell, J. P. Crutchfield, and P. T. Hraber, *Physica D* **75** (1994) 361–391.
- [13] M. Land and R. K. Belew, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 5148.
- [14] M. S. Capcarrere, M. Sipper, and M. Tomassini, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4969–4971.
- [15] H. Fuk s, *Phys. Rev.* **E55** (1997) R2081–R2084.