数理解析研究所講究録
1022巻 1997年 153-165

群の樹木への作用とグラフ積，曲面積への分解

新潟大教育　垣水 修（Osamu Kakimizu）

群の樹木（tree）への作用とその群のグラフ積への分解との関係を記述する理論は，Bass－Serre理論として知られ，群の性質を調べるうえで重要なものである。本講では，群のグラフ積の高次元化の一つである群の曲面積の概念を紹介し，グラフ積と曲面積との関係について解説する。また，群の樹木への作用に付随した無限遠における自己同型群を，$PSL_2(\mathbb{Z})$を例に解説し，それがとても興味深い群になることを述べる。

1．群のグラフ積

群のグラフ積は，群の自由積，融合積，HNN拡大などの概念を統一的にとらえ，一般化したものである。

<u>融合積</u>　群A, B, Cと単射準同形 $\alpha: C \to A$, $\beta: C \to B$ とが与えられたとき，その融合積をつぎで定ギする：

$$A *_C B = \left\langle A, B \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{rel}\,A,\ \mathrm{rel}\,B, \\ \alpha(g) = \beta(g)\ (\forall g \in C) \end{array} \right\rangle .$$

<u>HNN拡大</u>. 群 A, C と単射準同形 $\alpha : C \to A$, $\alpha' : C \to A$ が与えられたとき，そのHNN拡大をつぎで定ぎする：

$$A *_C = \left\langle A, t \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{rel}\, A, \\ t\alpha(g)t^{-1} = \alpha'(g) \quad (\forall g \in C) \end{array} \right\rangle .$$

一般のグラフ積は，graph of groups と呼ばれる群と単射準同形の system に対し，その"基本群"として与えられるものである．

<u>graph of groups</u> とは，つぎのデータからなる：

グラフ $\Gamma = (V, E)$ ここで，V：頂点の集合，E：辺の集合，

群の族 $\{G_v\}_{v \in V}$, $\{G_e\}_{e \in E}$,

単射準同形の族 各 $\underset{v}{\bullet}\xrightarrow{\;e\;}\underset{v'}{\bullet}$ に対し，ふたつの単射

$$G_v \xleftarrow{\alpha_{\bar{e}}} G_e \xrightarrow{\alpha_e} G_{v'} .$$

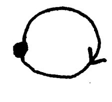
そして，

$$\text{群のグラフ積} = \pi_1(\text{graph of groups}).$$

例として融合積の場合は，

$$\bullet \longrightarrow \bullet \; , \quad A \xleftarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$$

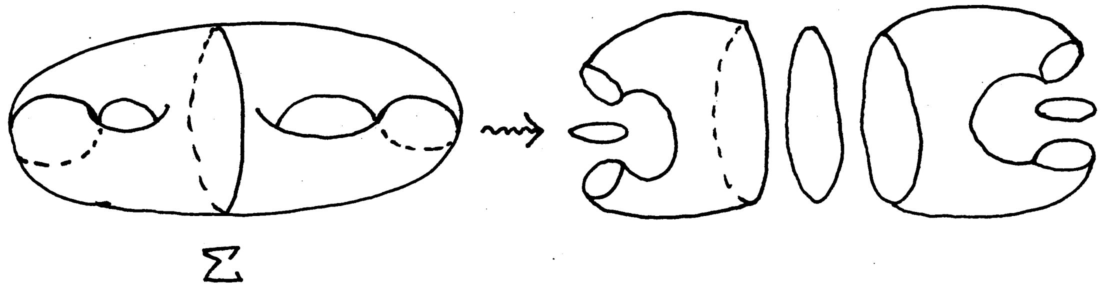
に対応し，HNN拡大の場合は，

 ,

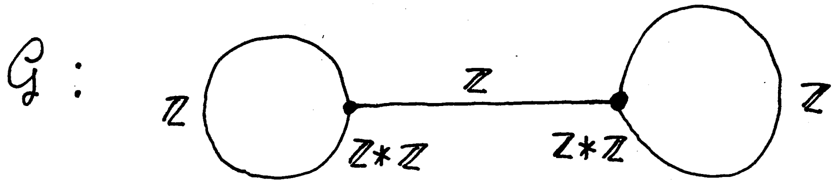
$$\begin{tikzcd} A & C \arrow[l, bend right, "\alpha'"'] \arrow[l, bend left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

に対応している．

また，グラフ積が自然にあらわれる幾何的な例としては，曲面を互いに交わらない単純閉曲線で切りわけた場合の基本群の分解がある：



これに対応する群のグラフ $\mathcal{G}$ は，

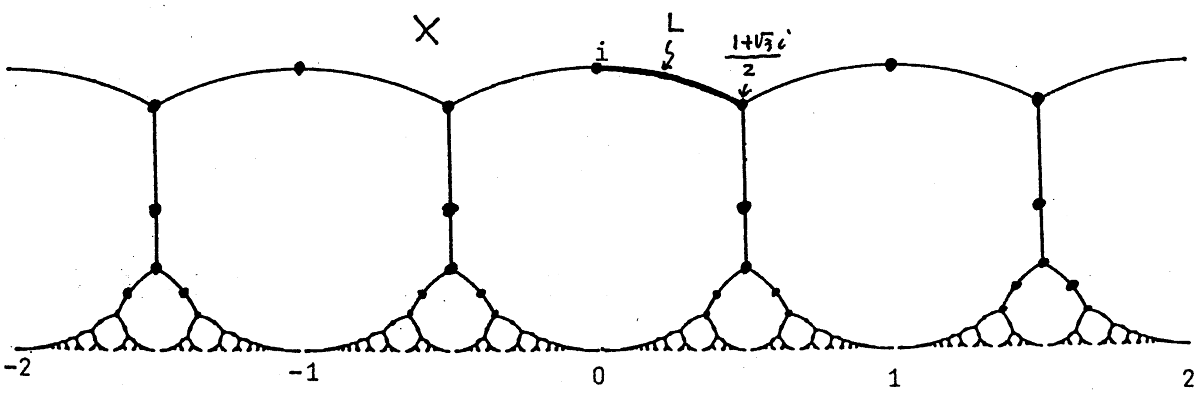


であり，そして　$\pi_1(\Sigma)=\mathcal{G}$ に対応するグラフ積，となっている。

さて，Bass-Serre 理論とは，群 G が tree に作用していればそれから G のグラフ積への分解が得られ，逆にどんなグラフ積への分解もある tree への作用に対応している，というものである（[1]，[7]）．ここでは代表的な例を一つあげておくことにする．

<u>$PSL_2(\mathbb{Z})$</u>.　$PSL_2(\mathbb{Z})$ は一次分数変換により上半平面 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$ に作用している．このとき，弧 $L=\{e^{i\theta}\mid \pi/3\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$ を考え，L を $PSL_2(\mathbb{Z})$ の作用で

移したもの全体の和集合を X とおく．すると，X は tree となることが示され，$PSL_2(\mathbb{Z})$ の tree X への作用が得られる．tree X をこの作用で割ったときのグラフは，L と同型なもの $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ になり，頂点と辺に対応する群は，L の端点 i と $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ および L の固定群である．これから $PSL_2(\mathbb{Z})$ の $\underset{\mathbb{Z}_2}{\bullet}\overset{\{1\}}{-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}\underset{\mathbb{Z}_3}{\bullet}$ に対応した分解 $PSL_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ が得られる．



2．グラフ積に分解できない群

本質的にグラフ積には分解できない群も存在する．そのような群の tree への作用に関する特徴づけとして，つぎの定理がある（[1]，[7]）．

<u>定理</u>．（Bass－Serre）．　G を有限生成群とするとき，つぎの条件は同値である：

(1) G は本質的にグラフ積に分解しない.

(2) $G \curvearrowright X$ を, G の tree X への inversion をもたない作用とする. このとき G の各元は X のある頂点を固定する.

(3) $G \curvearrowright X$ を, G の tree X への inversion をもたない作用とする. このとき G は X のある頂点を固定する.

最後の条件(3)は, Serre の性質 (FA) と呼ばれている. 本質的にグラフ積に分解しない群の例をあげておく:

- 有限群
- $SL_n(\mathbb{Z})$ $(n \geqq 3)$ (Serre [7])
- $\mathrm{Aut}(F_n)$ $(n \geqq 3)$ (Bogopolski [2])

ここで, F_n = ランク n の自由群.

3. Surface of groups

群のグラフ積の高次元化である群の曲面積 (surface product of groups) を定ぎするためには, まず graph of groups の高次元化である surface of groups を定ぎし, そして,

surface product of groups

$= \pi_1$ (surface of groups)

により定ぎする. そこでまず, surface of groups の定ぎを述べ, 例をあげよう.

<u>定ギ</u>. surface of groups $\mathcal{S}$ とは，つぎのデータからなる：

(1) コンパクトで連結な曲面 Σ の CW 分割 $S=(V,E,C)$ ここで各 edge と 2-cell はそれぞれ向きが与えられているものとする．

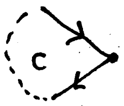
(2) 群の族 $\{G_v\}_{v\in V}$，$\{G_e\}_{e\in E}$，$\{G_c\}_{c\in C}$

(3) 各辺 $\overset{v}{\bullet}\xrightarrow{\ e\ }\overset{v'}{\bullet}$ に対し群の単射準同形

$$G_v \xleftarrow{\alpha_{\bar{e}}} G_e \xrightarrow{\alpha_e} G_{v'}$$ が与えられている．

(4) 各 2-cell c に対し，群の単射準同形

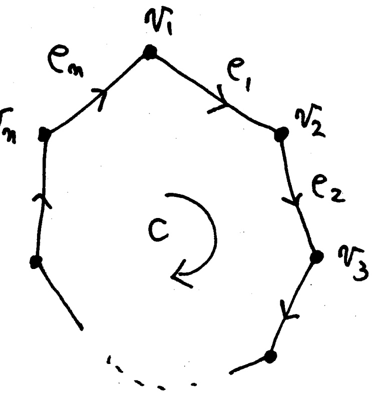
$$\beta_i : G_c \longrightarrow G_{e_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

と，各 corner 

v_i に対し，corner element と呼ばれる元 $g_i \in G_{v_i}$ が与えられて，つぎをみたす：

$$\alpha_{i+1}\beta_{i+1}(x) = g_i^{-1}\,\alpha_i\beta_i(x)\,g_i \qquad (\forall x \in G_c)$$

ここで，

C: 

,

$$\begin{tikzcd}
 & G_{e_i} \arrow[dr, "\alpha_i = \alpha_{e_i}"] & \\
G_c \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[dr, "\beta_{i+1}"'] & & G_{v_i} \\
 & G_{e_{i+1}} \arrow[ur, "\alpha_{i+1} = \alpha_{\bar{e}_{i+1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

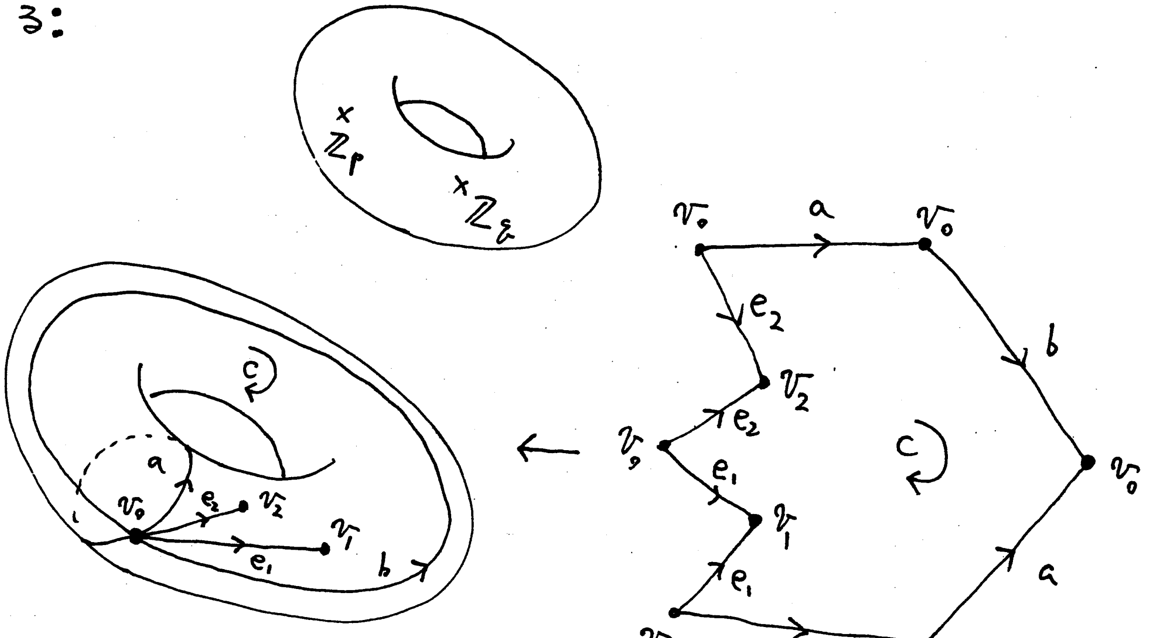
.

例(1). triangle of groups (Stallings [8]).

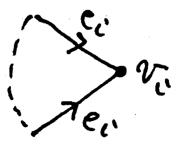
これは，群とその間の単射からなるつぎのような可換図式のことである．ここで corner element はすべて 1 とする：

$$\begin{tikzcd} & G_{12} & \\ G_1 \arrow[ur] \arrow[d] & G_0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[ul] \arrow[d] \\ G_{13} & G_3 \arrow[l] \arrow[r] & G_{23} \end{tikzcd}.$$

例(2). 2次元 orbifold はすべて適当に CW 分割をおこなうことにより，surface of groups と考えることができる：



$G_{v_1} = \mathbb{Z}_p = \langle x \rangle$, $G_{v_2} = \mathbb{Z}_q = \langle y \rangle$,

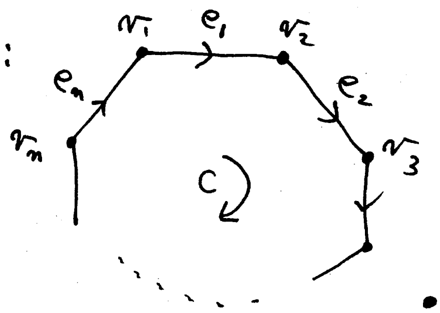
$g_{\gamma_1} = x \in \mathbb{Z}_p$, $g_{\gamma_2} = y \in \mathbb{Z}_q$ ここで，γ_i : 

.

4. Surface products of groups

$\mathcal{S}$ を surface of groups とし, T を $S=(V,E,C)$ の 1次元 skeleton の maximal tree とする。このとき $\mathcal{S}$ の曲面積 $\pi_1(\mathcal{S},T)$ をつぎのように定ギする：

$$\pi_1(\mathcal{S},T)=\left(\mathop{*}_{v\in V} G_v\right) * \mathrm{Free}(E) \Bigg/ \begin{array}{l} e=1 \ (\forall e\in T), \\ e\,\alpha_e(x)\,e^{-1}=\alpha_{\bar{e}}(x) \ (\forall x\in G_e) \\ \quad \text{for each } v \xrightarrow{e} v', \\ g_1e_1g_2e_2\cdots g_ne_n=1 \\ \quad \text{for each 2-cell } c : \\ \quad (g_i : \text{corner element}) \end{array}$$



ここで, Free(E) は, E から生成される自由群.

例(1). $G_v=\{1\}$ $(\forall v\in V)$ ならば,

$$\pi_1(\mathcal{S})\cong\pi_1(\Sigma).$$

(2). 一般には, 全射準同形 $\pi_1(\mathcal{S})\twoheadrightarrow\pi_1(\Sigma)$ がある.

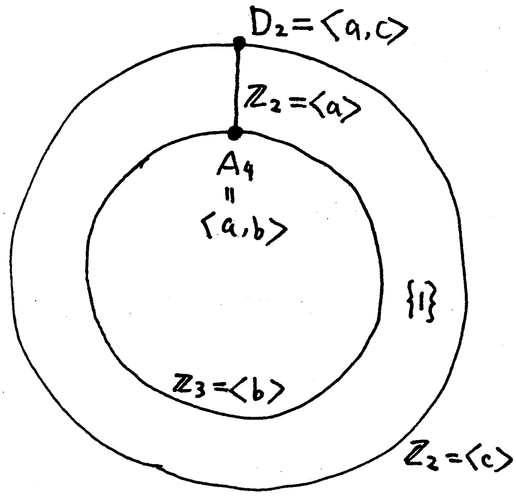
(3). もし $\mathcal{S}$ が 2次元 orbifold $\mathcal{O}$ に対応したものであるならば,

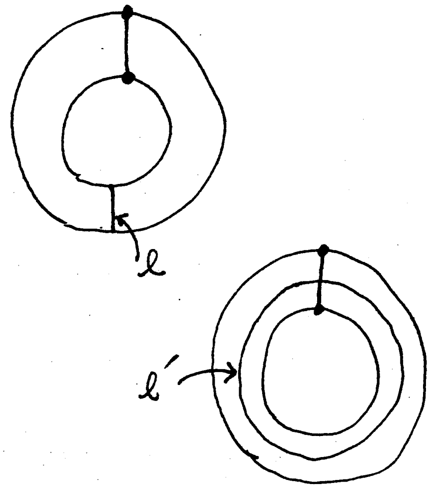
$$\pi_1(\mathcal{S})\cong\pi_1^{orb}(\mathcal{O}).$$

5. 群のグラフ積と曲面積との関係

群のグラフ積と曲面積との関係を例をあげて説明しよう。群の曲面積としての表示から，いろいろなグラフ積としての表示を読みとることができる場合がある例である．

$PSL_2(\mathcal{O}_{-2})$ を考える．$\mathcal{O}_{-2}$ は2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ の整数全体のなす環を表わす．$PSL_2(\mathcal{O}_{-2})$ は，つぎのようなアニュラスをベースの曲面とする曲面積への分解をもつ．

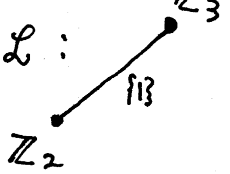




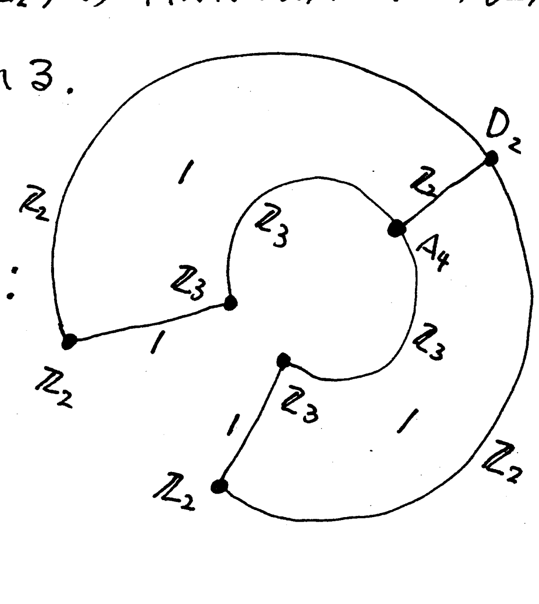
このアニュラスを arc ℓ および circle ℓ' で切断することにより，それに対応して，$PSL_2(\mathcal{O}_{-2})$ の HNN 拡大としての表示と，融合積としての表示が得られる．

ℓ で切断すると；

$\ell \rightsquigarrow \mathcal{L}$:



$\mathcal{P}$:



$$\pi_1(\mathcal{L}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3,$$

$$\pi_1(\mathcal{D}) \cong D_2 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} A_4,$$

したがって，

$$PSL_2(\mathcal{O}_{-2}) \cong \pi_1(\mathcal{D}) \underset{\pi_1(\mathcal{L})}{*} \cong \left(D_2 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} A_4\right) \underset{(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3)}{*}.$$

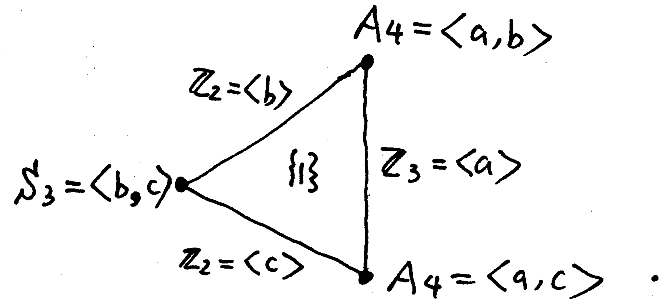
同様に ℓ' で切断したときは，

$$PSL_2(\mathcal{O}_{-2}) \cong \left(D_2 *_{\mathbb{Z}_2}\right) *_{(\mathbb{Z}_2 *_{\{1\}})} \left(A_4 \underset{\mathbb{Z}_3}{*}\right).$$

6. グラフ積に分解しない群と曲面積

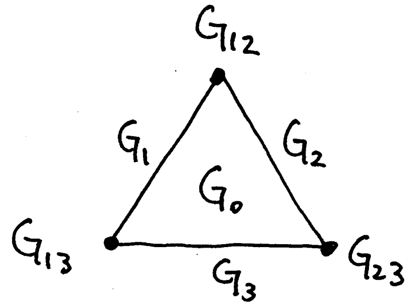
グラフ積には本質的に分解しないような群も曲面積として表わすことができる場合がある．例えば，$PSL_2(\mathcal{O}_{-3})$ は，グラフ積に分解しないことがしられているが，つぎのような曲面積に表わせる：

$PSL_2(\mathcal{O}_{-3})$:



この例を一般化することにより，つぎの定理が示せる．これは，曲面積をもちいて，グラフ積には分解しない群を，いろいろ作ることができることを示している．

定理. 群の三角形 $\mathcal{T}$ はつぎの(1),(2)の条件をみたすものとする：



(1) 各 G_{ij} は $G_i \cup G_j$ から生成されるものとする.

(2) 各 G_{ij} は，有限生成で，グラフ積へは本質的に分解しないものとする.

このとき，$\pi_1(\mathcal{T})$ は，グラフ積には本質的に分解しない。

7. 群の樹木への作用に付随した無限遠における自己同型群

1節であげた $G=PSL_2(\mathbb{Z})$ の tree $X\subset\mathbb{H}$ への作用について考える。

$\mathcal{K}=X$ の finite subtree 全体,

$\mathcal{K}^*=\{X-K \mid K\in\mathcal{K}\}$

とおき，さらに，

$$\mathcal{A}=\{f: X-K \xrightarrow{\cong} X-K' \text{ simplicial automorphism}\}$$

とする. $\mathcal{A}$ の元の間の同値関係 "$\sim$" をつぎのように定める：

$$\begin{array}{l} f: X-K\cong X-K' \\ g: X-L\cong X-L' \end{array} \quad f\sim g \iff \begin{array}{l} K\cup L\subset {}^{\exists}M\in\mathcal{K}, \\ f|X-M = g|X-M . \end{array}$$

このとき，$\mathcal{A}/\sim$ は，Xの無限遠における自己同型のなす群と呼ぶべきものである．さらに，群の作用 $G \curvearrowright X$ に付随した無限遠における自己同型のなす群 $\tilde{G}$ をつぎで定ぎする；

$$\tilde{G} = \left\{ f \in \mathcal{A}/\sim \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K \in \mathcal{K},\ X - K = \underbrace{Y_1 \cup \cdots \cup Y_m}_{\text{components}} \\ \exists\, g_1, \cdots, g_m \in G\ ; \\ \qquad f|Y_i = g_i|Y_i \quad (1 \leq i \leq m) \end{array} \right\}.$$

このように定ぎした群 $\tilde{G}$ は，つぎの定理に示すようにたいへん興味深い群である（Brown[3], McKenzie and Thompson[6]）.

<u>定理.</u> $\tilde{G}$ は，Thompson が構成した有限表示無限単純群に同型であり，さらにつぎのような曲面積として表わせる；

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{S}_7 & & \\
 & \tilde{S}_3 \times \tilde{S}_2 \arrow[ur] \arrow[ddl] & & \tilde{S}_5 \arrow[ul] \arrow[ddr] & \\
 & & \tilde{S}_3 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & & \\
\tilde{S}_5 & & \tilde{S}_4 \arrow[ll] \arrow[rr] & & \tilde{S}_6
\end{tikzcd}.$$

群 $\tilde{G}$ はつぎのような性質をもっている.

(1) $\tilde{G}$ は群のグラフ積に分解しない.

(2) 性質 (FP_∞) をもつ; $\mathbb{Z}$ の有限生成自由 $\mathbb{Z}\tilde{G}$-加群による resolution が存在する.

(3) $\mathbb{Q}$-acyclic : $H_i(\tilde{G};\mathbb{Q})=0\ (\forall i>0)$.

REFERENCES

[1] H.Bass: Some remarks on group actions on trees, Comm. Alg. 4 (1976), 1091-1126

[2] O.V.Bogopolski: Arboreal decomposability of the group of automorphisms of a free group,Algebra i Logica 26 (1987) 131-149

[3] K.S.Brown: The geometry of finitely presented infinite simple groups, in: ed. G.Baumslag and C.F.Miller III; Algorisms and Classificationin Combinatorial Group Theory, Springer, 1992

[4] J.M.Corson: Complexes of groups, Proc. London Math. Soc. 65 (1992) 199-224

[5] A.Haefliger: Complex of groups and orbihedra, in: ed. by E.Ghys, A.Haefliger, A.Verjovsky; Group Theory from a Geometrical Viewpoint, Would Scientific, 1991

[6] R.McKengie and .J.Thompson: An elementary construction of unsolvable word problems in group theory in: ed. W.W.Boone, F.B.Cannonito and R.C.Lyndon: Word Problems, Noth-Holland, 1973

[7] J.-P.Serre: Trees, Springer Verlag, 1980

[8] J.R.Stallings: Non-positively curved triangles of groups in: ed. by E.Ghys, A.Haefliger, A.Verjovsky; Group Theory from a Geometrical Viewpoint, Would Scientific, 1991