数理解析研究所講究録
1022巻 1997年 131-142

コンパクト測地的完備アファイン平坦 4元数多様体の基本群

熊本大学大学院理学研究科修士2年
鵜殿 哲郎 (Tetsuro Udono)

§0 序

Milnor と Auslander はアファイン多様体について,
『コンパクト測地的完備アファイン平坦多様体の基本群は,
その有限指数の部分群をとれば可解群になる』 と予想した。
すなわち Γ を基本群とするとき, 群の完全系列

$$1 \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow \Gamma \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

が存在して, F は有限群, Γ' が可解群となる。
このときの基本群 Γ を Virtually solvable という。
そこでこの予想に基づき, 2次元コンパクト測地的完備アファイン平坦4元数多様体の基本群に関して肯定的に解いた。

<u>定理</u> 2次元コンパクト測地的完備アファイン平坦4元数多様体の基本群 Γ は Virtually solvable である。

上に挙げた，Milnor と Auslander の予想は実 n 次元ユークリッド空間に作用するアファイン変換群に対し，$n \leqq 3$ においては肯定的に解かれており，特に1981年に Fried と Goldman が $n=3$ のときの結果を出しており，さらに本研究に当たり触発された結果としての，Fillmore と Scheuneman の2次元複素曲面の基本群が巾零群になっている事実がある。ここでいう定理の2次元とは4元数空間 $\mathbb{H}^n$ における $n=2$ のときの次元で，実空間 $\mathbb{R}^n$ の次元としては8次元を考えていることになる。

§1 n 次元アファイン多様体の基本群

Def 1.1 アファイン群 $Aff(n,\mathbb{R})$ とは平行移動からなるベクトル群 $\mathbb{R}^n$ と，回転，相似変換からなる正則行列全体 $GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ による半直積である。

(記号) $Aff(n,\mathbb{R}) := \mathbb{R}^n \rtimes GL(n,\mathbb{R})$

Def 1.2 アファイン変換 $f \in Aff(n,\mathbb{R})$ とは，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上に

$$f(x) = Ax + b \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ A \in GL(n,\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n)$$

として作用し，$f = (b, A)$ と書くとき，写像の合成。

を次のように定義する．

$$f\circ f' = (b, A)\circ(b', A') = (b+Ab', AA')$$

lemma 1.3　アファイン変換 $Aff(n, \mathbb{R})$ は写像の合成 $\circ$ を積とすると群になる．

ここで改めて $Aff(n, \mathbb{R})$ と書くとき，アファイン変換として作用すると同時に群の構造をもつアファイン群と定義する。

$Aff(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$ であるから $\mathbb{R}^n \lhd Aff(n, \mathbb{R})$

従って次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Aff(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{h} & GL(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & h(\Gamma) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

$Aff(n, \mathbb{R})$ の部分群として Γ をとると，Γ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上にアファイン変換として作用する．

ここで $\Delta = \mathbb{R}^n \cap \Gamma$ を translational part $h(\Gamma)$ を holonomy group と呼ぶ

Def 1.4　(i) 固有不連続：$\mathfrak{S}_\Gamma(A) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma A \cap A \neq \phi\}$ とするとき，すべてのコンパクト集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\mathfrak{S}_\Gamma(C)$ がコンパクトとなるようなものが存在する。さらにこのときの Γ が離散である。

(ii) 自由：ある $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $\gamma x=x \Rightarrow \gamma=e$

作用が固有不連続ならば商空間 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ が第2可算公理をみたす Hausdorff 空間となり，自由に作用するならば単位元以外に不動点をもたないことになる．さらに上の条件のもとで商空間 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から自然な射影によって引きおこされる多様体の構造をもつ．

Def 1.5 （離散）部分群 $\Gamma\subset Aff(n,\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}^n$ 上に固有不連続かつ自由に作用するとき商空間 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ を測地的完備アファイン平坦多様体という。

§2 n次元コンパクト測地的完備アファイン平坦4元数多様体の基本群

$\mathbb{H}$ を4元数体とし，その元は一意に

$$x=a\cdot 1+bi+cj+dk \quad (a,b,c,d\in\mathbb{R})$$

と表される。$1,i,j,k$ 間の積を $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$ $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$ と定義する．

このようにして，$\mathbb{H}$ は可換体ではなく基底として $\{1,i,j,k\}$ をとると，ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ と同一視することができる．そこで $\mathbb{H}^n$ を n 次元4元数空間という．

そこでベクトル空間$\mathbb{H}^n$に作用するn次元4元数アファイン群を定義する。

<u>Def 2.1</u> $\mathbb{H}$：4元数体，$\mathbb{H}^n$：n次元4元数空間とする．$GL(n,\mathbb{H})$を4元数正則行列全体のなす群とする。ここで$\mathbb{H}^n$への作用を$GL(n,\mathbb{H})$を左からスカラーなる$\mathbb{H}^* = GL(1,\mathbb{H})$を右から作用させる。これによって$\mathbb{H}^n$への直積$GL(n,\mathbb{H}) \times GL(1,\mathbb{H})$の作用を

$$(A, \lambda)x = Ax\lambda^{-1}$$

と定義する。

このとき$\mathbb{H}^n$を4n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^{4n}$と同一視するときDef 2.1 の作用は$\mathbb{R}$－線形である。しかし効果的でないので，$GL(n,\mathbb{H}) \times GL(1,\mathbb{H})$の中心　$\mathbb{R}^* = \{(\lambda \cdot I, \lambda)\}$　で割ると，$\mathbb{R}^{4n}$上に$\mathbb{R}$－線形かつ効果的に作用する。

(記号)　$GL(n,\mathbb{H}) \times GL(1,\mathbb{H}) / \mathbb{R}^* := GL(n,\mathbb{H}) \cdot GL(1,\mathbb{H})$

<u>Prop. 2.2</u> $GL(n,\mathbb{H}) \cdot GL(1,\mathbb{H})$　は$\mathbb{H}^n$に$\mathbb{R}$－線形かつ効果的に作用する。

$GL(n,\mathbb{R}) \cdot GL(1,\mathbb{H})$は$GL(4n,\mathbb{R})$の閉部分群となることがわかり，n次元4元数アファイン群を定義する．

Def 2.3 n次元4元数アファイン群

$$\mathrm{Aff}(n,\mathbb{H}) := \mathbb{H}^n \rtimes GL(n,\mathbb{H})\cdot GL(1,\mathbb{H})$$

$\mathrm{Aff}(n,\mathbb{H}) \subset \mathrm{Aff}(4n,\mathbb{R})$ は閉部分群として $\mathbb{H}^n$ 上に作用する。そこで（離散）部分群 $\Gamma \subset \mathrm{Aff}(n,\mathbb{H})$ が $\mathbb{H}^n$ 上に固有不連続かつ自由に作用するとき，商空間 $\mathbb{H}^n/\Gamma$ を測地的完備アファイン平坦4元数多様体という。

このコンパクト多様体 $\mathbb{H}^n/\Gamma$ の基本群 Γ が virtually solvable であることを次の3つの Step によって証明する。

(Step.1)　Γ が translational subgroup をもつ

(Step.2)　Step 1 でない $\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

(Step.3)　Step 1 $\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

(Step.1)　$\mathrm{Aff}(2,\mathbb{H}) \supset \Gamma$ として translational part $\Delta = \Gamma \cap \mathbb{H}^2 \cong \mathbb{Z}^k$ $(1 \leqq k \leqq 8)$ をもつ。

(Step.2)　ここでの考察は translational part をもたない Γ に関して Γ は virtually solvable であることをいう。

次の完全系列において $\Delta = \mathbb{H}^n \cap \Gamma = \{1\}$ ならば Γ は (Step.1) でなく，virtually solvable であることを証明したい。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{H}^n & \longrightarrow & A\mathbb{H}(n,\mathbb{H}) & \xrightarrow{h} & GL(n,\mathbb{H})\cdot GL(1,\mathbb{H}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \underset{\mathbb{H}^n\cap\Gamma}{\overset{\shortparallel}{\Delta}} & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{h} & h(\Gamma) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

証明の過程を示す。

$$\Gamma \xrightarrow{h} \begin{cases} \overset{(i)}{h(\Gamma)}: \text{discrete} \xrightarrow{p} \begin{cases} \overset{(i)-イ}{Ph(\Gamma)}: \text{discrete} \\ \overset{(i)-ロ}{Ph(\Gamma)}: \text{indiscrete} \end{cases} \\ \overset{(ii)}{h(\Gamma)}: \text{indiscrete} \end{cases}$$

(i) $h(\Gamma)$ が discrete の場合

$$\begin{array}{cccccc} \blacktriangle = h(\Gamma)\cap GL(1,\mathbb{H}) & & GL(1,\mathbb{H}) & = & \mathbb{H}^* & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ h(\Gamma) \subset & (& GL(n,\mathbb{H})\cdot GL(1,\mathbb{H}) & , & \mathbb{H}^n-\{0\} &) \\ p\downarrow & & p\downarrow & & \downarrow & \\ Ph(\Gamma) \subset & (& PGL(n,\mathbb{H}) & & \mathbb{H}P^{n-1} &) \end{array}$$

$\Delta = \mathbb{H}^n\cap\Gamma = \{1\} \Rightarrow \Gamma \cong h(\Gamma)$, $\blacktriangle = h(\Gamma)\cap GL(1,\mathbb{H}) = \{1\}$

$\Rightarrow h(\Gamma) \cong Ph(\Gamma)$ 後者は $\Gamma \ni \gamma$ の $\mathbb{H}^n$ への作用が自由であることから確められる。

以上により (i)-イ の case は Γ の cohomological dimension $\mathrm{ch}\,\Gamma \in \mathbb{N}$ によりおこらないことがわかった。

<u>Prop. 2.3</u> (i)-イの case はおこらない。すなわち $Ph(\Gamma)$ は discrete でない。

proof　$\mathbb{H}^n \approx \mathbb{R}^{4n}$ より $n=2$ のとき，$\mathbb{H}^2/\Gamma$ は closed aspherical mfd.

従って $\mathrm{ch}\Gamma = \dim \mathbb{R}^8 = 8$

$$\begin{array}{ccc} Ph(\Gamma) \subset & (PGL(2,\mathbb{H}) & , \ \mathbb{H}P^1) \\ & \wr\wr & \\ & (PO(5,1) & , \ S^4) \end{array}$$

ここに $PO(5,1)$ は共形変換群と呼ばれ5次元実ハイパーボリック空間 $\mathbb{H}^5_{\mathbb{R}}$ に作用するアイソメトリック群 $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^5_{\mathbb{R}})$ となっている。

従って $\mathbb{H}^5_{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}^5$ であるから，

$$\mathbb{H}^5_{\mathbb{R}}/Ph(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{ch}(Ph(\Gamma)) = \mathrm{ch}(h(\Gamma)) = \mathrm{ch}\Gamma \leqq 5$$

これは $\mathrm{ch}\Gamma = 8$ に矛盾する。∎

Prop. 2.4　(i)－ロ の時，Γ は virtually solvable である．

lemma 2.5　G：Lie 群，R：連結な閉正規可解部分群

$\pi : G \to G/R$ を自然な射影，$H \subset G$：閉部分群かつ H の identity component H^0 が可解群，$U = \overline{\pi(H)}$ とするとき，

U の identity component U^0 が可解群

$GL(2,\mathbb{H}) \times GL(1,\mathbb{H})$ の中心を $\Delta\mathbb{R}^* = \{(\lambda \cdot I, \lambda)\} = \{(t,t)\}$ とおくとき

$GL(2,\mathbb{H}) \cdot GL(1,\mathbb{H}) = GL(2,\mathbb{H}) \times GL(1,\mathbb{H}) / \Delta\mathbb{R}^*$

$$GL(2,\mathbb{H}) \cdot GL(1,\mathbb{H}) \rhd \frac{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*}{\Delta\mathbb{R}^*} = \boxed{\mathbb{R}^*} \qquad \text{と書く}$$

$$\begin{tikzcd} & & SO(3) \arrow[d] \\ \boxed{\mathbb{R}^*} \arrow[r] & GL(2,\mathbb{H})\cdot GL(1,\mathbb{H}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & PGL(2,\mathbb{H})\times SO(3) \arrow[d, "q"] \\ & & PGL(2,\mathbb{H}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} h(\Gamma) \arrow[r, "\pi"] & \pi h(\Gamma) \arrow[d, "q"] \\ & Ph(\Gamma) = q\pi h(\Gamma) \end{tikzcd}$$

<u>lemma 2.5</u> $Ph(\Gamma)$: indiscrete $\Rightarrow \pi h(\Gamma)$: indiscrete

<u>lemma 2.6</u> $\overline{\pi h(\Gamma)}^{\circ}$ は可解群

<u>lemma 2.7</u> $\pi h(\Gamma) \subset N_{PGL(2,\mathbb{H})\times SO(3)}\left(\overline{\pi h(\Gamma)}^{\circ}\right)$ （正規化群）

<u>Def 2.8</u> Lie 群 G が amenable $\Leftrightarrow$

$G = $ (solvable gr.) $\rtimes$ (compact gr. $\times$ abelian gr.)

ここで Milnor の Lemma により G : Lie 群に対し，G が amenable

$\Leftrightarrow$ G の離散部分群は Virtually polycyclic

$\Rightarrow$ 〃 Virtually solvable

<u>lemma 2.9</u> $PGL(2,\mathbb{H})_\infty = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ は amenable Lie 群である。

<u>lemma 2.10</u> $N_{PGL(2,\mathbb{H})\times SO(3)}\left(\overline{\pi h(\Gamma)}^{\circ}\right) \subset PGL(2,\mathbb{H})_\infty \times SO(3)$

<u>lemma 2.11</u> $\pi h(\Gamma) \subset PGL(2,\mathbb{H})_\infty \times SO(3)$

proof of prop $\pi h(\Gamma) \subset PGL(2,\mathbb{H})_\infty \times SO(3)$: amenable (lemma 2.11)

πによる引き戻し : $h(\Gamma) \subset \{[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}]\} \cdot GL(1,\mathbb{H}) = G$: amenable

hによる引き戻し : $\Gamma \subset \mathbb{H}^2 \rtimes G$: amenable

従って Def 2.8 により Γは virtually solvable ∎

(ii) $h(\Gamma)$ が indiscrete の場合

Prop 2.12 $h(\Gamma)$: indiscrete の場合 Γ は virtually solvable

proof lemma 2.5 を適用すると, $\overline{h(\Gamma)}^\circ \lhd h(\Gamma)$ が可解群となり

(i)-イの case と同様に

$$h(\Gamma) \subset N_{GL(2,\mathbb{H})\cdot GL(1,\mathbb{H})}(\overline{h(\Gamma)}^\circ) \subset [\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}] \cdot GL(1,\mathbb{H})$$
$$\text{or } Sp(2) \cdot GL(1,\mathbb{H})$$

hの引き戻しにより

$$\Gamma \subset \mathbb{H}^2 \rtimes \{[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}] \cdot GL(1,\mathbb{H})\} \text{ or } Sp(2) \cdot GL(1,\mathbb{H})$$

$[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}]$, $Sp(2)$ は amenable Lie群であるから, この場合も Γは virtually solvable である。∎

(step. 3) : (step. 1) $\Rightarrow$ Γは virtually solvable である.

(step. 1) の条件はΓが translational part をもつ場合すなわち $\Delta = \mathbb{H}^2 \cap \Gamma \cong \mathbb{Z}^k$ (自由アーベル群) $1 \leq k \leq 8$ によりΔは $\mathbb{Z}^k$で生成される。

群の完全系列 $1 \to \Delta \to \Gamma \to h(\Gamma) \to 1$ に対し $\Delta \cong \mathbb{Z}^k$ とすると $h(\Gamma)$ は共役の基で

$$h(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \right\} \quad A \in GL(k, \mathbb{R}) \quad C \in GL(4n-k, \mathbb{R})$$

Lemma A　準同型写像 $\rho : h(\Gamma) \to Aff(4n-k, \mathbb{R})$

$$= \mathbb{R}^{4n-k} \rtimes GL(4n-k, \mathbb{R})$$

に対して次の (i) ～ (iii) の性質をもつ

(i) $\ker \rho$: finite

(ii) $\rho(h(\Gamma))$ の $\mathbb{R}^{4n-k}$ 上への作用は固有不連続

(iii) $\mathbb{R}^{4n-k}/\rho(h(\Gamma))$: compact

この Lemma A において $n = 2$ のとき $ch(h(\Gamma)) = 8-k$, $h(\Gamma) \simeq \rho(h(\Gamma))$ もし, $8-k \leqq 3$ すなわち $k \geqq 5$ の時 $\rho(h(\Gamma))$ は virtually solvable (Fried-Goldman の結果より) また, $h(\Gamma) \simeq \rho(h(\Gamma)) \subset PGL(2, \mathbb{H})$ で $h(\Gamma)$ が discrete $\Rightarrow$ $ch(h(\Gamma)) \leqq 5$ 従って $8-k \leqq 5 \Leftrightarrow k \geqq 3$ よって $k = 3, 4$ について考察すればよい.

Prop. 2.13　$k=3$ のとき すなわち $\{t_1, t_2, t_3\}$ を Δ の生成元とする。

(i) $\{t_1, t_2, t_3\}$ が $\mathbb{H}$-従属 $\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

(ii) $\{t_1, t_2\}$: $\mathbb{H}$-線形従属, $\{t_1, t_3\}$: $\mathbb{H}$-線形独立 とする

$\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

Prop. 2.14　$k=4$ のとき すなわち $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ を Δ の生成元とする.

(i) $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ が $\mathbb{H}$-線形従属 $\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

(ii) $\{t_1, t_2, t_3\}$ が $\mathbb{H}$-線形従属 $\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

(iii) $\{t_1, t_2\}$: $\mathbb{H}$-線形従属, $\{t_3, t_4\}$: $\mathbb{H}$-線形従属
$\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

(iv) (i)〜(iii) 以外の場合 $\Rightarrow$ Γ は virtually solvable

以上により §0 での定理：2次元コンパクト測地的完備アファイン平坦4元数多様体の基本群 Γ は virtually solvable であることがわかった。

参考文献

[1] Milnor, On fundamental groups of Complete affinely flat manifold, Advances in Math 25 (1977), 178-187.

[2] M.S. Rashunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Ergebnisse der Math. 68, Springer-Verlag.

[3] Fried and W. Goldman, Three dimensional affine crystallographic groups, Adv. in Math. 47 (1983), 1-49

[4] J. Wolf, Space of constant curvature McGraw-Hill Inc., 1967

[5] Filmore and J. Scheuneman Fundamental groups of compact complete locally affine surfaces, Pacific J. Math 44 (1973), 487-491