数理解析研究所講究録
1022 巻 1997 年 58-70

Pentagonal Curve の構成について

大渕 朗

徳島大学総合科学部

e-mail:ohbuchi@ias.tokushima-u.ac.jp

第 0 章 準備及び結果について

C を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線とする。記号として C 上の線形系 δ が $\dim\delta = r$ で $\deg\delta = d$ を満たす時に δ を g_d^r の様に書く事にする。代数曲線と線形系の組 $C = (C, g_d^1)$ について以下の用語は良く使われる。

定義 1. $C = (C, g_d^1)$ が d-gonal curve であるとは,C 上に base point free な g_d^1 が存在してかつ $e < d$ に対して C 上に g_e^1 が存在しない時とする。

2-gonal は hyperelliptic,3-gonal は trigonal,4-gonal は tetragonal と言い 5-gonal の事を pentagonal と呼ぶ。d-gonal curve (C, g_d^1) が与えられると g_d^1 は complete linear system となるのは明らかである。さてここで代数曲線と線形系の (d-gonal は必ずしも仮定しない) 組 $C = (C, g_d^1)$ について g_d^1 が完備である時に以下を考える。

定義 2. C を非特異代数曲線とする。この時フィルトレーション
$F_0 = \Gamma(C, \omega_C) \supset F_1 = \Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes -1}) \supset \cdots \supset F_n = \Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes -n}) \supset \cdots$
を考える。ここでそれぞれの inclusion $\Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes -i}) \supset \Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes -(i+1)})$ は $\Gamma(C, \mathcal{O}(g_d^1))$ の元 s を一つあらかじめ与えておいて, 部分空間

$$\Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes -(i+1)}) \cdot s \subset \Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes -i})$$

と $\Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes -(i+1)})$ を同一視して考えている。これらについて,

$$e_i = e_i(g_d^1) = \#\{j \in \mathbb{N}; \dim\, (F_{j-1}/F_j) \geq i\} - 1$$

と定義する。

この不変量 $e_1,\cdots,e_{d-1}$は scrollar invariants と呼ばれる ([KO]p.4588 参照)。これらは $e_1 \geq \cdots \geq e_{d-1} \geq 0$ 及び $e_1 + \cdots e_{d-1} = g - d + 1$ を満たす事は定義から容易である。又,α_i=dim$\Gamma(C, \mathcal{O}((i+1)g_d^1))-$ dim$\Gamma(C, \mathcal{O}(ig_d^1))$ $(i \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ により数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定義すると scrollar invariants$e_1,\cdots e_{d-1}$はこの数列を使って以下の様に言い換える事が可能である。

命題 1. e_i=min$\{j; \alpha_j \geq d-i+1\} - 1$ $(i = 1, \cdots d-1)$.

今 C は non-hyperelliptic であると仮定して $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ を canonical embedding とする。$D \in g_d^1$に対して

$$\overline{D} = \bigcap_{D \subset H} H = D$$

とおき D の linear span と呼ぶ。ここで H は $\mathbb{P}^{g-1}$の超平面である。$X = \bigcup_{D \in g_d^1} \overline{D} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ と置く。X に対して以下の事実が知られている ([ACGH]p.96 等を参照の事)。

定理 1(Harris). X は projective bundle $\mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(e_{d-1})) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$の$\pi_*(\mathcal{O}(H)) \cong \mathcal{O}(e_1) \oplus \cdots \mathcal{O}(e_{d-1})$ を満たす tautological sheaf $\mathcal{O}(H)$ により与えられる完備な線形系 $|H|$ で決まる写像の像である。

従ってこれから

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1) \oplus \cdots \mathcal{O}(e_{d-1})) \\ g_d^1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

となる可換図式が与えられる。この様な形で scrollar invariants を定式化する事も出来る。以下の定理は [KO]p.4588 による。

定理 2. 代数曲線と完備線形系の組 $C = (C, g_d^1)$ について $\mathcal{O}(g_d^1)^{\otimes e_{d-1}+2}$ が birationally very ample であれば

$$e_1 \leq e_2 + e_{d-1} + 2,$$
$$e_2 \leq e_3 + e_{d-1} + 2,$$
$$\cdots$$
$$e_{d-2} \leq 2e_{d-1} + 2$$

が成立する。

定理 3. 代数曲線と完備線形系の組 $C=(C,g_d^1)$ について d が素数であれば,$\mathcal{O}(D)^{\otimes e_{d-1}+2}$ は birationally very ample である。

次に e_0=$e_0(g_d^1)=0$ と決める。更に$\alpha \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ に対しても$\alpha = i \bmod d\mathbb{Z}$ $(0 \le i \le d-1)$ となる i を取って $e_\alpha = e_i$と決める。この時更に以下の定理を得る事も出来る。

定理 4. d が素数であれば $i,j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ に対し

$$e_{i+j} \le e_i + e_j + 2$$

が成立する。

更にこの定理の逆については以下の事実がある。

定理 5(Maroni). $e_1 \ge e_2 \ge 0$ で $e_1+e_2=g-2$ の時,
$e_1 \le 2e_2+2 \Leftrightarrow$ ある種数 g の trigonal curve(C,g_3^1) で $e_i(g_3^1)=e_i$となる物が存在する

この事実は以下の様に一般化されている ([KO]p.4589 参照)。

定理 6(Kato,Ohbuchi). $e_1 \ge e_2 \ge e_3 \ge 0$ であり $e_1+e_2+e_3=g-3$ であるとする。この時に
1).$e_1 \le e_2+e_3+2$ かつ $e_2 \le e_3+2 \Rightarrow$ ある種数 g の tetragonal curve (C,g_4^1) で $e_i(g_4^1)=e_i$ かつ $\mathcal{O}(g_4^1)^{\otimes e_3+2}$ は birationally very ample となる物が存在する。
2).$e_1 \le e_2+e_3+2 \Leftrightarrow$ ある種数 g の tetragonal curve(C,g_4^1) で $e_i(g_4^1)=e_i$となる物が存在する。

定理 6. $e_1 \ge e_2 \ge e_3 \ge e_4 \ge 0$ であり $e_1+e_2+e_3+e_4=g-3$ であるとする。この時に $e_1 \le e_2+e_4+2, e_3+ \le e_4+2, e_3 \le 2e_4+2$ かつ $e_1 \le 2e_3+2 \Rightarrow$ ある種数 g の pentagonal curve(C,g_5^1) で $e_i(g_5^1)=e_i$となる物が存在する。

第 1 章 定理 4 の証明の概略

この節のみ,divisor D に対して

$$\Gamma(C,\mathcal{O}(D)) = \{f \in K; (f)+D \ge 0\} \text{ (但し } K \text{ は } C \text{ の有理函数体)}$$

と考えて議論をする事にする。(C,g_d^1) に対し$\Gamma(C,\mathcal{O}(g_d^1))=[1,x]$ と書く事が出来る。さて $e_1,\cdots,e_{d-1}$の定義と命題 1 に従って先ず $i=1,\cdots,e_{d-1}+1$ の時,

$$\Gamma(C,\mathcal{O}(ig_d^1)) = [1,x,\cdots,x^i]$$

であり, 更に $i=e_{d-1}+2,\cdots,e_{d-2}+1$ の時,

$$\Gamma(C,\mathcal{O}(ig_d^1))=[1,x,\cdots,x^i,y_1,\cdots,y_1x^{i-e_{d-1}-2}]$$

であり, 又 $i=e_{d-j}+2,\cdots,e_{d-(j+1)}+1$ の時 $(j=1,2,\cdots,d-2)$,

$$\Gamma(C,\mathcal{O}(ig_d^1))=[1,x,\cdots,x^i,y_1,\cdots,y_1x^{i-e_{d-1}-2},\cdots,y_j,\cdots,y_jx^{i-e_{d-j}-2}]$$

最後に $i\geq e_1+2$ の時,

$$\Gamma(C,\mathcal{O}(ig_d^1))=[1,x,\cdots,x^i,y_1,\cdots,y_1x^{i-e_{d-1}-2},\cdots,y_{d-1},\cdots,y_{d-1}x^{i-e_1-2}]$$

となる様に $\Gamma(C,\mathcal{O}(ig_d^1))$ の基底を与えられる。今,$s,j=0,\cdots,d-1$ に対して

$$e_{d-j}\leq e_{d-j+s}+e_{d-s}+2$$

である事を示せれば定理 4 が示せた事になる。 s=0 の時及び j=0 は各々明らかなので $1\leq s,j\leq d-1$ として良い。 そこで先ず $j\leq s$ の時を考える。 この時は e_{d-j+s}=e_{s-j} なので, 示すべき事は $e_{d-j}\leq e_{s-j}+e_{d-s}+2$ となる。$s-j$=0 の時は明らか。又 $s-j\geq 1$ の時は $d-1\geq d-j\geq d-j\geq s-j\geq 1$ となるので,$e_{d-1}\leq e_{d-j}\leq e_{s-j}\leq e_1$ となり, この場合も定理 4 の成立は明らかである。次に $j>s$ の時は $0\leq d-j+s\leq d-1$ となり $d-j+s=0$ の時は $e_{d-j}=e_{d-s}$ より不等式は明らか。従って $j\geq s+1$ で $1\leq d-j+s\leq d-1$ の場合のみ考えれば良い。ここで $j<2s$ の時は s の帰納法により $e_{d-j}\leq e_{d-j+s}+e_{d-s}+2$ である事が示せる。 実際 $s=1$ の時は定理 2 と定理 3 により不等式は得られて, $s-1$ 迄不等式が正しければ $d-(s-1)\leq d-j+s\leq d-1$ により帰納法の仮定を e_{d-j+s} に当てはめて不等式を得る。以上から $1\leq s,j\leq d-1$,$j\geq s+1$ で $1\leq d-j+s\leq d-1$ かつ $j\geq 2s$ と仮定して不等式を示す。 ここでもし $2s\leq j\leq d-1$ となる j で $e_{d-j}>e_{d-j+s}+e_{d-s}+2$ となる j が存在したとすると $s+1\leq k\leq j$ (i.e.$1\leq k-s\leq j-s$) に対して $\Gamma(C,\mathcal{O}((e_{d-(k-s)}+2)g_d^1))\subset\Gamma(C,\mathcal{O}((e_{d-(j-s)}+2)g_d^1))$ だから

$$\begin{aligned}\Gamma(C,\mathcal{O}((e_{d-(k-s)}+2)g_d^1))\Gamma(C,\mathcal{O}((e_{d-s}+2)g_d^1))\subset\\ \Gamma(C,\mathcal{O}((e_{d-(k-s)}+2+e_{d-s}+2)g_d^1))\subset\\ \Gamma(C,\mathcal{O}((e_{d-k}+2)g_d^1))\subset\Gamma(C,\mathcal{O}((e_{d-j}+1)g_d^1))\end{aligned}$$

となる。 従ってある x の多項式 $a_i(x),b_{ij}(x)$ が存在して

$$\begin{aligned}y_sy_1&=a_1(x)+b_{1\,1}(x)y_1+\cdots+b_{1\,j-1}(x)y_{j-1}\\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\ y_sy_{j-s}&=a_{j-s}(x)+b_{j-s\,1}(x)y_1+\cdots+b_{j-s\,j-1}(x)y_{j-1}\end{aligned}$$

となる。故に

$$-\begin{pmatrix} a_1 + b_{1\,j-1}y_{j-1} + \cdots + b_{1\,j-s-1}y_{j-s-1} \\ \vdots \\ a_{j-s} + b_{j-s\,j-1}y_{j-1} + \cdots + b_{j-s\,j-s-1}y_{j-s-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1\,1} - y_s & & * \\ & \ddots & \\ * & & b_{j-s\,j-s} - y_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{j-s} \end{pmatrix} \cdots (A)$$

と書く事が出来る。ここで $*$ の部分は x の多項式のみが表れている所である。ここで

$$B = \begin{pmatrix} b_{1\,1} - y_s & & * \\ & \ddots & \\ * & & b_{j-s\,j-s} - y_s \end{pmatrix}$$

と置くと $\det(B) \neq 0$ である。何故ならば B は $j-s$ 次の正方行列なので $\det(B) = 0$ であれば y_sは $k(x)$ 上 $j-s$ 次の関係式を持つ事になるが拡大 $k(C)/k(x)$ は d 次であり d は素数, また $y_s \notin k(x)$ であるので $j-s \leq d-2$ であるから矛盾。従って $\det(B) \neq 0$ となる。仮定より $s \leq j-s$ であるから, 従って B の随伴行列$\tilde{B}$ に対して式 (A) の両辺に$\tilde{B}$を掛ける事で

$$\det(B)y_s = (\deg \leq j-s-1 \text{ の } y_s \text{の多項式})y_{j-1} + \cdots + (\deg \leq j-s-1 \text{ の } y_s \text{の多項式})y_{j-s-1}$$

となる。ここで$\lambda = \det(B)y_s$と置く。今$\lambda \in k(x)$ であれば関係式$\lambda = \det(B)y_s$ は $k(x)$ 上の $j-s-1$ 次の関係式となるから $j-s-1 \leq d-1-s+1 \leq d-1$ より矛盾。よって $\lambda \notin k(x)$ となる。これから $1, \lambda, \cdots, \lambda^{d-1}$ は拡大 $k(C)/k(x)$ の基底となる。従って $y_s = \mu_1(x) + \mu_2(x)\lambda + \cdots \mu_l(x)\lambda^l$ $(0 \leq l \leq d-1$ であって$\mu_1(x), \cdots, \mu_l(x) \in k(x),\ \mu_l(x) \neq 0)$ と書ける。よって y_sは $k(x)$ 上で $l(j-s)$ 次の関係式を持つ事になるので $d | l(j-s)$ となる。d は素数なのでこれは矛盾である。以上により定理 4 の証明を得た。

注意. 今の証明で定理 2 と定理 3 を使ったが定理 3 は容易であり, 又定理 2 も今の証明の $1 \leq s, j \leq d-1$,$j \geq s+1$ で $1 \leq d-j+s \leq d-1$ かつ $j \geq 2s$ である場合の部分の議論とほぼ同じ議論をそのまま使って証明する事が出来る。その為, ここでは詳細は省略する事にする。

第 2 章 定理 6 の証明の概略

Y_1, Y_2を $\mathbb{C}$ 上定義された種数g_1, g_2の代数曲線とする。又 $P_1 \in Y_1, P_2 \in Y_2$を取る。更に $D_1 \subset Y_1$,$D_2 \subset Y_2$をそれぞれ P_1, P_2の座標近傍として,$x_i : D_i \xrightarrow{\sim} D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ $(i = 1, 2)$ を $x_1(P_1) = 0$,$x_2(P_2) = 0$ である様な局所座標とする。先ず $Y_1 \times D \supset D_1 \times D$

と $Y_2 \times D \supset D_2 \times D$ に対してそれぞれ $D_1 \times D \supset F_1 = \{(q,t) \in D_1 \times D \| x_1(q)| \le |t|\}$,$D_2 \times D \supset F_2 = \{(q,t) \in D_1 \times D \| x_2(q)| \le |t|\}$ となる部分集合を取って $\mathcal{Y}_1 = Y_1 \times D \setminus F_1$,$\mathcal{Y}_2 = Y_2 \times D \setminus F_2$とする。$U_1 = D_1 \times D \setminus F_1$,$U_2 = D_2 \times D \setminus F_2$として U_1, U_2はそれぞれ $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$の開集合である。$Z = D \times D$ と書く。ここで$\iota_1 : U_1 \hookrightarrow Z$ を $\iota_1(q,t) = (x_1(q), \frac{t}{x_1(q)})$, $\iota_2 : U_2 \hookrightarrow Z$ を$\iota_2(q,t) = (\frac{t}{x_1(q)}, x_2(q))$ とする。この写像により $U_1 \subset Z$,$Z \supset U_2$とみなして, この同一視により $\mathcal{X} = \mathcal{Y}_1 \cup Z \cup \mathcal{Y}_2$と定義する。$p_1 : \mathcal{Y}_1 \to D$ を $p_1(q,t) = t$,$p_2 : \mathcal{Y}_2 \to D$ を $p_2(q,t) = t$ 又 $p_Z : Z \to D$ を $q_Z(t_1,t_2) = t_1 t_2$ とする。ι_1,ι_2の定義に従って p_1,p_2及び p_Zは $\mathcal{X}$ 上で定義されて $p : \mathcal{X} \to D$ を定義する。$p^{-1}(t) = X_t$ と書くと $t \neq 0$ なら X_tは種数 $g_1 + g_2$の代数曲線であり $t = 0$ の時は X_0は 2 個のそれぞれ Y_1,Y_2に同型な既約成分からなりその既約成分は $Y_1 \ni P_1 = P_2 \in Y_2$に於いてのみ transversal に交わる。以上の族は $P_1 \in D_1 \subset Y_1$,$P_2 \in D_2 \subset Y_2$と局所座標 $x_1 : D_1 \xrightarrow{\sim} D(x_1(P_1) = 0)$,$x_2 : D_2 \xrightarrow{\sim} D(x_2(P_2) = 0)$ が与えられれば必ず構成出来る事に注意しておく。$\Gamma(Y_2, \mathcal{O}(dP_2)) \ge 2$ さて $\mathcal{L}_1 \in \mathrm{Pic}^d(Y_1)$ と $\mathcal{L}_2 \in \mathrm{Pic}^d(Y_2)$ が$\Gamma(Y_1, \mathcal{L}_1) \ge 2$ $\Gamma(Y_2, \mathcal{L}_2) \ge 2$ を満たすとする。又 $V_1 \subset \Gamma(Y_1, \mathcal{L}_1)$ $V_2 \subset \Gamma(Y_2, \mathcal{L}_2)$ が $\mathrm{dim} V_1 = \mathrm{dim} V_2 = 2$ を満たす部分空間とする。$a_1 < b_1$を V_1の P_1-order sequencs とし,$a_2 < b_2$を V_2の P_2-order sequencs とする。今

$$a_1 + b_2 = d,\ a_2 + b_1 = d$$

であると仮定する。σ_1, τ_1を V_1の基底で $\mathrm{ord}_{P_1}\sigma_1 = a_1$,$\mathrm{ord}_{P_1}\tau_1 = b_1$を満たす物として, σ_2, τ_2を V_2の基底で $\mathrm{ord}_{P_2}\sigma_2 = a_2$,$\mathrm{ord}_{P_2}\tau_2 = b_2$を満たす物とする。$\frac{\tau_1}{\sigma_1} = x_1^{b_1 - a_1}$で $x_1(P_1) = 0$ となる局所座標 $x_1 : D_1 \xrightarrow{\sim} D$($D_1$は P_1 の座標近傍),$\frac{\tau_2}{\sigma_2} = x_2^{b_2 - a_2}$ で $x_2(P_2) = 0$ となる局所座標 $x_2 : D_2 \xrightarrow{\sim} D$($D_2$は P_2の座標近傍) をとる。更に

$$e_1 = \frac{\tau_1}{x_1^{a_1}} = \frac{\sigma_1}{x_1^{b_1}}, e_2 = \frac{\tau_2}{x_2^{a_2}} = \frac{\sigma_2}{x_2^{b_2}}$$

はそれぞれD_1,D_2上でいたる所0にならないと仮定して差し支えない。これらから上記の条件を満たす$p : \mathcal{X} \to D$を構成出来る。$q_1 : \mathcal{Y}_1 \to Y_1$と $q_2 : \mathcal{Y}_2 \to Y_2$を $q_1(q,t) = q$,$q_2(q,t) = q$ として $\mathcal{Y}_1$上で $q_1^*(\mathcal{L}_1)$, $\mathcal{Y}_2$上で $q_1^*(\mathcal{L}_1)$ それと Z 上で $\mathcal{O}$ を考える。$q_1^*(\mathcal{L}_1)|U_1 = \mathcal{O}e_1$, $q_2^*(\mathcal{L}_2)|U_2 = \mathcal{O}e_2$であるので $U_1 \subset Z \supset U_2$ と見なして際に $U_1 \cap U_2$上に $q_1^*(\mathcal{L}_1)|U_1 \cap U_2 = \mathcal{O}e_1$,$q_2^*(\mathcal{L}_2)|U_1 \cap U_2 = \mathcal{O}e_2$それに $\mathcal{O}_Z|U_1 \cap U_2 = \mathcal{O}$ が考えられるが,$U_1 \cap U_2$上で $(z_1, z_2) \in Z$ として

e_2と $1 \in \mathcal{O}_Z|U_1 \cap U_2 = \mathcal{O}$ を同一視して, e_1と $z_2^d \in \mathcal{O}_Z|U_1 \cap U_2 = \mathcal{O}$ を同一視

即ち,$e_1 = z_2^d e_2$の関係式により得られる $\mathcal{X}$ 上の可逆層を $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{Y_1}$とし,

e_1と $1 \in \mathcal{O}_Z|U_1 \cap U_2 = \mathcal{O}$ を同一視して, e_2と $z_1^d \in \mathcal{O}_Z|U_1 \cap U_2 = \mathcal{O}$ を同一視

即ち,$e_2 = z_1^d e_1$の関係式により得られる $\mathcal{X}$ 上の可逆層を $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{Y_2}$ とする。この時以下の事実を得る。

補題. $\mathcal{M}_1|\mathcal{X} \setminus X_0 \cong \mathcal{M}_2|\mathcal{X} \setminus X_0$。従って $\mathcal{M}_1|X_t \cong \mathcal{M}_2|X_t$但し $0 \neq t \in D$。

この事実により $t \neq 0$ の時に $\mathcal{L}_t = \mathcal{M}_1|X_t = \mathcal{M}_2|X_t$ と $\mathcal{L}_t$を定義出来る。更に次の事実も成立する。

補題. $p_*(\mathcal{M}_1^{\otimes l})$ と $p_*(\mathcal{M}_2^{\otimes l})$ は $l \in \mathbb{N}$ に対して locally free sheaf である。

一般に共に次数が d で次元 n の Y_1上の線形系 W_1と Y_2上の線形系 W_2とを与えた時に X_0での $P_1 = P_2$につき P_1での W_1-order sequence を $a_0^1 < \cdots a_{n-1}^1$, P_2での W_2-order sequence を $a_0^2 < \cdots a_{n-1}^2$とする。$L = \{(Y_1, W_1),\ (Y_2, W_2)\}$ と書き, この記号の下で以下を定義する ([EH]p.348 参照)。

定義 3. $a_0^1 + a_{n-1}^2 \geq d, a_1^1 + a_{n-2}^2 \geq d, \cdots, a_{n-1}^1 + a_0^2 \geq d$ が成り立つ時に L は crude limit linear series であると言う。又 $a_0^1 + a_{n-1}^2 = d, a_1^1 + a_{n-2}^2 = d, \cdots, a_{n-1}^1 + a_0^2 = d$ が成り立つ時に L は limit linear series であると言う。

$$V_1(l) = p_*(\mathcal{M}_1^{\otimes l}) \otimes k(0)$$
$$V_2(l) = p_*(\mathcal{M}_2^{\otimes l}) \otimes k(0)$$

と置く。自然に $V_1(l) \subset \Gamma(Y_1, \mathcal{L}_1^{\otimes l})$ であり,$V_2(l) \subset \Gamma(Y_2, \mathcal{L}_2^{\otimes l})$ であるとみなす事ができるので ([EH]p.348 参照), $L(l) = \{(Y_1, V_1(l)),\ (Y_2, V_2(l))\}$ とする。次の事実は [EH]p.348 参照。

補題. 勝手な $l \in \mathbb{N}$ に対して $L(l)$ は crude limit linear series になる。

さて次に Pardini の結果 ([P] 参照) からの引用を行なう。先ず Y を代数多様体,G を位数が素数 p の巡回群として $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ を G の charactor group とする。今,$\chi \in G^* \setminus \{0\}$ に対して invertible sheaf $\mathcal{L}_\chi \in \mathrm{Pic}(Y)$ を対応させて更に $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y$ と置いておく。又$\psi \in G^* \setminus \{0\}$ に対して Cartier divisor D_ψを対応させておく。ここで$\chi, \chi' \in G^*, \psi \in G^* \setminus \{0\}$ に対して $\xi = \psi^{i_\chi}, \chi' = \psi^{i_{\chi'}}$ $(i_\chi, i_{\chi'} = 0, \cdots, p-1)$ として

$$\epsilon_{\chi,\,\chi'}^{\psi} = \begin{cases} 0 & i_\chi + i'_\chi < p \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

により$\epsilon^{\psi}_{\chi,\ \chi'}$を与える。又標準的な同型

$$\Gamma(Y, \mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\chi'} \otimes \mathcal{L}^{-1}_{\chi\chi'}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{-1}_\chi \otimes \mathcal{L}^{-1}_{\chi'}, \mathcal{L}^{-1}_{\chi\chi'})$$

により$\Gamma(Y, \mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\chi'} \otimes \mathcal{L}^{-1}_{\chi\chi'})$ の元を写像 $\mathcal{L}^{-1}_\chi \otimes \mathcal{L}^{-1}_{\chi'} \to \mathcal{L}^{-1}_{\chi\chi'}$と見なす事が出来る。

補題. $\mathcal{O}_Y$-加群 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \mathcal{O}_Y \oplus \bigoplus_{\chi\in G^*\setminus\{0\}} \mathcal{L}^{-1}_\chi$$

により定義する。

さて以上に加えて条件

$$\mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\chi'} \cong \mathcal{L}_{\chi\chi'} \otimes \mathcal{O}(\sum_{\psi\in G^*\setminus\{0\}} \epsilon^{\psi}_{\chi,\ \chi'} D_\psi)$$

を仮定する。この時に $\sum_{\psi\in G^*\setminus\{0\}} \epsilon^{\psi}_{\chi,\ \chi'} D_\psi$を定義する section により準同型写像 $\mathcal{L}^{-1}_\chi \otimes \mathcal{L}^{-1}_{\chi'} \to \mathcal{L}^{-1}_{\chi\chi'}$が決るからこれによって $\mathcal{O}_Y$ -加群としての準同型写像

$$\mu : S^2\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

が決る。以上より次の命題が成立する ([P]p.199 Proposition 2.1 参照)。

定理 8(Pardini). $\mathcal{O}_Y$-加群としての準同型写像$\mu : S^2\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ 上に $\mathcal{O}_Y$-algebra 構造を導入して自然な写像

$$f : \mathrm{Spec}\ (\mathcal{A}) \to Y$$

は p 次の巡回被覆を与えて f は $\bigcup_{\psi\in G^*\setminus\{0\}} D_\psi$上で分岐する。又全ての$\psi, \psi' \in G^* \setminus \{0\}$ に対して $D_\psi \cap D'_\psi = \emptyset$ で $D_\psi \subset Y$ が非特異部分多様体であれば Spec $(\mathcal{A})$ は正規になる。

ここで $d = 5$ の場合を考える。自然数 $0 \le e_4 \le e_3 \le e_2 \le e_1$ と g を与えて

$$\begin{aligned} &e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = g - 4 \\ &e_1 \le e_2 + e_4 + 2 \\ &e_2 \le e_3 + e_4 + 2 \\ &e_3 \le 2e_4 + 2 \\ &e_1 \le 2e_3 + 2 \end{aligned}$$

が満たされたとする。この時に種数 g の代数曲線 C と C 上の base point free で次数 5 の pencilg^1_5の組 (C, g^1_5) を $e_i(g^1_5) = e_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ である様に構成する事を考える。以下 2 つの場合に分けて構成を行なう。

Case 1:$e_1+e_4=e_2+e_3$の時
先ず $d_1,d_2,d_3,d_4\in\mathbb{N}$ を

$$\begin{aligned}
&2e_1+2-e_2=d_2+d_4\\
&e_1+e_2+2-e_3=d_3+d_4\\
&e_1+e_3+2-e_4=d_2+d_4\\
&e_1+e_4+4=d_1+d_2+d_3+d_4\\
&2e_2+2-e_4=d_3+d_4\\
&e_2+e_3+4=d_1+d_2+d_3+d_4\\
&e_2+e_4+2-e_1=d_1+d_3\\
&2e_3+2-e_1=d_1+d_2\\
&e_3+e_4+2-e_2=d_1+d_2\\
&2e_4+2-e_3=d_1+d_3
\end{aligned}$$

となる様に取る。ここで$\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(d_i))\ni s_i\ (i=1,2,3,4)$ を $D_i=(s_i)_0\ (i=1,2,3,4)$ が reduced かつ D_1,D_2,D_3,D_4はお互いに共通部分を持たない様に取り

$$\mathcal{L}_i=\mathcal{O}(e_i+2)\ (i=1,2,3,4)$$

とすると先程の連立方程式の解の与え方より

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1^{\otimes 2}\otimes\mathcal{L}_2^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_2)\otimes\mathcal{O}(d_4)\\
&\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2\otimes\mathcal{L}_3^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_3)\otimes\mathcal{O}(d_4)\\
&\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_3\otimes\mathcal{L}_4^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_2)\otimes\mathcal{O}(d_4)\\
&\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_4\cong\mathcal{O}(d_1)\otimes\mathcal{O}(d_2)\otimes\mathcal{O}(d_3)\otimes\mathcal{O}(d_4)\\
&\mathcal{L}_2^{\otimes 2}\otimes\mathcal{L}_4^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_3)\otimes\mathcal{O}(d_4)\\
&\mathcal{L}_2\otimes\mathcal{L}_3\cong\mathcal{O}(d_1)\otimes\mathcal{O}(d_2)\otimes\mathcal{O}(d_3)\otimes\mathcal{O}(d_4)\\
&\mathcal{L}_2\otimes\mathcal{L}_4\otimes\mathcal{L}_1^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_1)\otimes\mathcal{O}(d_3)\\
&\mathcal{L}_2^{\otimes 2}\otimes\mathcal{L}_1^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_1)\otimes\mathcal{O}(d_2)\\
&\mathcal{L}_3\otimes\mathcal{L}_4\otimes\mathcal{L}_2^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_1)\otimes\mathcal{O}(d_3)\\
&\mathcal{L}_4^{\otimes 2}\otimes\mathcal{L}_3^{\otimes -1}\cong\mathcal{O}(d_1)\otimes\mathcal{O}(d_3)
\end{aligned}$$

となる。これより Pardini の定理に従って s_1,s_2,s_3,s_4が $\mathcal{A}=\mathcal{L}_1^{-1}\oplus\mathcal{L}_2^{-1}\oplus\mathcal{L}_3^{-1}\oplus\mathcal{L}_4^{-1}$ 上に $\mathcal{O}$-algebra の構造を導入して構造射$\pi:\mathrm{Spec}\ (\mathcal{A})\to\mathbb{P}^1$は次数 5 の巡回被覆を与えてかつ Spec $(\mathcal{A})$ は正規となる。$g_5^1=\pi^*(\mathcal{O}(1))$ と置くと g_5^1は定義より base point free で完備な次数 5 の pencil となる。今$\pi_*(\mathcal{O}_C)=\mathcal{A}$ である事より特に$\pi_*(\mathcal{O}_C(lg_5^1))=\mathcal{A}\otimes\mathcal{O}(l)$ である。従って特に各々の $i\ (i=1,2,3,4)$ に対して自然な inclusion $\mathcal{O}\hookrightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{O}(e_i+2)$ は section$\eta_i\in\Gamma(C,\mathcal{O}_C((e_i+2)g_5^1))$ を定義して $\mathcal{A}$ 上の演算の与えかたにより$\eta_1^5=\pi^*(s_1s_2^3s_3^2s_4^4),\eta_2^5=\pi^*(s_1^2s_2s_3^4s_4^3),\eta_3^5=\pi^*(s_1^3s_2^4s_3s_4^2),\eta_4^5=\pi^*(s_1^4s_2^2s_3^3s_4)$ を得る。

従って $(\pi^*(s_i))_0 = 5E_i\ (i=1,2,3,4)$ と書いて $(\eta_1)_0 = E_1+3E_2+2E_3+4E_4, (\eta_2)_0 = 2E_1+E_2+4E_3+3E_4, (\eta_3)_0 = 3E_1+4E_2+E_3+2E_4, (\eta_4)_0 = 4E_1+2E_2+3E_3+E_4$ となる。従って $\Gamma(C,\mathcal{O}((l-1)g_5^1))\otimes\Gamma(C,\mathcal{O}(g_5^1))\to\Gamma(C,\mathcal{O}(lg_5^1))$ が全射にならないのが $l=e_4+2, e_3+2, e_2+2, e_1+2$ の時のみであり $\eta_4,\eta_3,\eta_2,\eta_1$ がその cokernel の基底を与えているのは作り方より明らかである。故に $P\in E_1$ の時の $\Gamma(C,\mathcal{O}(lg_5^1))$-order sequence は $1\le l\le e_4+1$ の時,$0,5,10,15,\cdots$ であり $e_4+2\le l\le e_3+1$ の時にこの列に $4,9,14,\cdots$ が加わり $e_3+2\le l\le e_2+1$ の時にこれらの列に更に $3,8,13,\cdots$ が加わり $e_2+2\le l\le e_1+1$ でこれらの列に $2,7,12,\cdots$ が加わり,最後に $e_1+2\le l$ の時に以上の列に $1,6,11,\cdots$ が加わる。$P\in E_2,E_3,E_4$ の時も同様の事実が成立する。

Case 2:一般の時

C 上には次数 5 の固定点を持たない一次元完備な pencilg_5^1 が存在して $\mathcal{O}(g_5^1)\cong\mathcal{O}(5P_1)$ である様な点 $P_1\in C$ があるとする。例えば **Case 1** で構成した C 等はこの条件を満たす。又 E を楕円曲線として勝手な点 $P_2\in E$ を取る。上記の記号法で $Y_1=C, Y_2=E, \mathcal{L}_1=\mathcal{O}(5P_1)$, $\mathcal{L}_2=\mathcal{O}(5P_2), V_1=\Gamma(Y_1,\mathcal{L}_1)$ とし, $V_2\subset\Gamma(Y_2,\mathcal{L}_2)$ を P_2 での V_2-order sequence が $0<5$ となる様な部分空間とする。$\{\sigma_1,\tau_1\}$ を $\mathrm{ord}_{P_1}(\sigma_1)=0, \mathrm{ord}_{P_1}(\tau_1)=5$ である様な V_1 の基底とし, $\{\sigma_2,\tau_2\}$ を $\mathrm{ord}_{P_2}(\sigma_2)=0, \mathrm{ord}_{P_2}(\tau_2)=5$ である様な V_2 の基底とする。この節の最初で構成した $p:\mathcal{X}\to D$, $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ 又 $V_1(l), V_2(l)$ 等がこれらから構成出来る。明らかに $P=P_2$ での $V_2(l)$-order sequencs は $0<1<\cdots<5l-2<5l$ の部分列である。さてこの $p:\mathcal{X}\to D$ に対して $0\neq t\in D$ を取って $X_t=p^{-1}(t), \mathcal{L}_t=\mathcal{M}_1|_{X_t}=\mathcal{M}_2|_{X_t}$ を考える。$\mathcal{L}_t$ は X_t 上で次数 5 の可逆層だが作り方から $\dim\Gamma(X_t,\mathcal{L}_t)=2$ で base point free である。これから得られる完備な pencil を $g_5^1(t)$ と書いて $e_{i,t}=e_i(g_5^1(t))\ (i=0,1,2,3,4)$ と定める。ここで次の補題を得る。証明は省略する。

補題. $e_1\le e_{1,t}, e_2\le e_{2,t}, e_3\le e_{3,t}, e_4\le e_{4,t}$ である。

これから $i\ (1\le i\le 4)$ で $e_{i,t}=e_i+1$ かつ $e_{j,t}=e_j (j\neq i)$ となる値が取れるのでこの値を $i(P_1,P_2,Y_1,Y_2)$ の様に書くことにする。ここで以下の成立は容易であるので証明は省略する。

定理 9. $P_1\in C=Y_1$ に於ける $\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes l})$-order sequence について, もし $l\le e_i+1$ では vanishing order 1 が現われず $l\ge e_i+2$ で vanishing order 1 が現われるとすると $i=i(P_1,P_2,Y_1,Y_2)$ である。従って $i(P_1,P_2,Y_1,Y_2)$ の値は P_1,Y_1 にのみ依存して決まる。又 $l\le e_i+1$ で $\dim V_1(l)=\dim\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes l})$, $l\ge e_i+2$ で $\dim V_1(l)=\dim\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes l})-1$ である。

上の補題に従って $i(P_1,P_2,Y_1,Y_2)$ を $i(P_1,Y_1)$ あるいは $i(P_1)$ と書く事にする。次に

$$(Y_1, \mathcal{L}_1) = (C, \mathcal{L})$$

と C 上の

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(5P_1) \cong \mathcal{O}(5P)$$

かつ $i(P) = i(P_1)$ である点 P, P_1 についてそれぞれ以下の条件を考える事にする。

条件 A. もし $\eta \in \Gamma(C, \mathcal{L}^{\otimes e_i+2})$ が $\mathrm{ord}_{P_1}(\eta) = 1, \eta(P) = 0$ を満たすなら必ず $\mathrm{ord}_P(\eta) = 1$ である。

明らかに $(C, \mathcal{L})$ を **Case 1** で構成した $(C, \mathcal{L})$ とし,$P, P_1 \in E_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とするとこの $(C, \mathcal{L}, P, P_1)$ は今の条件 **A** を満たす。更に以下の事実が成立する (証明は省略)。

補題. 一般の **Case 2** の仮定を満たす $(C, \mathcal{L})$ と $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(5P_1) \cong \mathcal{O}(5P), i = i(P) = i(P_1)$ である $P, P_1 \in C$ が条件 **A** を満たすとし, 更に $i = 1$ または $e_i + 1 < e_{i-1}$ であるとする。この時,D の $F \not\ni 0$ である有限個の点からなる閉集合 $F \supset D$ が存在して全ての $0 \neq t \in D \setminus F$ である t について $P \in X_t$ での $\mathcal{L}_t^{\otimes l}$-order sequence に vanishing order 1 は $l \leq e_i + 2$ には現われず,$l \geq e_i + 3$ では必ず現われる。

補題. 一般の **Case 2** の仮定を満たす $(C, \mathcal{L})$ と $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(5P_1) \cong \mathcal{O}(5P) \cong \mathcal{O}(5Q), i = i(P) = i(Q) = i(P_1)$ である $P, Q, P_1 \in C$ がどの 2 個についても条件 **A** を満たすとし, 更に $i = 1$ または $e_i + 1 < e_{i-1}$ であるとする。この時,D の $F \not\ni 0$ である有限個の点からなる閉集合 $F \supset D$ が存在して全ての $0 \neq t \in D \setminus F$ である t について $P, Q \in X_t$ は $\mathcal{L}_t \cong \mathcal{O}(5P) \cong \mathcal{O}(5Q)$ かつ $i(P) = i(Q)$ であって条件 **A** を満たす。

これから以下の事実を得る事が出来る。

定理 10. 自然数 α が存在して, 一般の **Case 2** の仮定を満たす $(C, \mathcal{L})$ と $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(5P_1) \cong \cdots \cong \mathcal{O}(5P_\alpha)$, $i = i(P_1) = \cdots = i(P_\alpha)$ である $P_1, \cdots, P_\alpha \in C$ が存在してどの 2 点も条件 **A** を満たすとし, 更に $i = 1$ または $e_i(\mathcal{L}) + \alpha \leq e_{i-1}(\mathcal{L})$ であるとすると, 種数 $g + \alpha$ の代数曲線 X と base point free で $\dim \Gamma(X, \mathcal{O}(h_5^1)) = 2$ である X 上の完備な pencil h_5^1 が存在して $e_j(h_5^1) = e_j(g_5^1)$ $(j \neq i), e_i(h_5^1) = e_i(g_5^1) + \alpha$ を満たす。

これらから定理 **6** を得るのは容易である。

証明の概略終わり

参考文献

[AC] E.Arbarello, M.Cornalba: Footnotes to a paper of B.Segre, *Math.Ann.* **256** (1981)

341-362

[ACGH] E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths, J.Harris: Geometry of Algebraic curves I,*Springer-Verlag*, 1985.

[C1] M.Coppens: The Weierstrass gap sequence of the total ramification points of trigonal curve of $\mathbb{P}^1$, *Indag. Math.*, **47** (1985) 245-270.

[C2] M.Coppens: The Weierstrass gap sequence of the ordinary ramification points of trigonal curve of $\mathbb{P}^1$; Existence of a kind of Weierstrass gap sequence, *J. Pure Appl. Algebra*, **43** (1986) 11–25

[C3] M. Coppens: Some remarks on the schemes W_d^r,*Annali di Matematica pura ed applicata (IV)* **157** (1990) 183-197

[CMK] M.Coppens,C.Keem,G.Martens:The primitive length of general k-gonal curves, *Indag. Math.*, **5(2)** (1994), 145-159.

[EH] D.Eisenbud-J.Harris: Limit linear series: Basic Theory, *Invent. Math.*, **85** (1986) 337-371.

[FK] H.M.Farkas, I.Kra: Riemann surfaces, *Springer-Verlag*, 1980.

[F] J.D.Fay: Theta Functions on Riemann Surfaces, *Lecture Note in Mathematics 332, Springer-Verlag*, 1973.

[FL] W. Fulton and R. Lazarsfeld: On the connectedness of degeneracy loci and special divisors,*Acta Math.*, **146** (1981) 271-283

[G] M.Green: Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, *J. Diff. Geom.*, **19**, (1984) 125-171.

[GH] P.Griffiths, J.Harris: Principles of Algebraic Geometry, *Wiley Interscience*, 1978.

[H] R.Hartshorne: Algebraic Geometry, *Springer-Verlag*, 1974.

[K] C.Keem: On the variety of special linear systems on an algebraic curve, *Math. Ann.*, **288** (1990), 309-322.

[KKO] T. Kato, C. Keem and A. Ohbuchi: On triple coverings of irrational curves, to appear in Tsukuba J. Math.

[KO] T.Kato, A.Ohbuchi: Very ampleness of multiple of tetragonal linear systems,*Comm. in Algebra*, **21(12)** (1993), 4587-4597.

[Ma] A.Maroni: Le serie lineari speciali sulle curve trigonali, *Ann. di Mat.*, **25** (1946) 341-353.

[Muk1] S.Mukai: Curves, K3surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10, *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Hornor of Masayoshi Nagata. Kinokuniya, Tokyo*, (1987) 357-377.

[Muk2] S.Mukai: Curves and symmetric spaces, *Proc. Japan Acad.*, **68**, Ser.A (1992) 7-10.

[Mum] D.Mumford: Prym varieties I, *Contribution to Analysis. Acad. Press*, (1974) 325-355.

[N] M.Nagata: On self intersection number of a section on a ruled surface, *Nagoya Math. J.*, **85**, (1970) 191-196.

[P] R.Pardini: Abelian covers in algebraic geometry, *J. reine angew. Math.*, **417** (1991) 191-213.

[S] F.-O.Schreyer: Syzygies of Canonical Curves and Special Linear Series, *Math. Ann.*, **275** (1986) 105-137.