数理解析研究所講究録
1026巻 1998年 195-203

GEOMETRIC AUTOMORPHIC FORMS AND SPHERICAL FUNCTIONS RELATED TO THEM, II

宮崎 琢也 (TAKUYA MIYAZAKI)

東京都立大 理 (Tokyo Metropolitan Univ.)

1. 松島・村上同型

算術的商多様体のコホモロジーを相対 Lie 代数コホモロジーであらわす松島・村上同型について始めに記しておく。G を有理数体上の半単純代数群、K を $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群、Γ を $G(\mathbb{Q})$ の数論的離散部分群とする。算術的商多様体 $V=\Gamma\backslash G(\mathbb{R})/K$ のコホモロジーについて

$$H^*(V,\mathbb{C})\simeq H^*(\Gamma,\mathbb{C})\simeq H^*_{ct}(G(\mathbb{R}),C^\infty(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})))$$

また係数を $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))^\infty:=L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))\cap C^\infty(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ に制限して考えると、しばしば、

$$H^*_{(2)}(V,\mathbb{C})\simeq\bigoplus_{\pi_\infty\in\widehat{G(\mathbb{R})}}\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{R})}(\pi_\infty,L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))^\infty_{disc.})\otimes H^*(\mathfrak{g},K;\pi_\infty)$$

が得られる。左辺は V の二乗可積分コホモロジー、つまり自身と d-微分が二乗可積分である、無限回微分可能な微分形式のなす複体のコホモロジー、である。それが、$G(\mathbb{R})$ の表現 π_∞ からつくられる $(\mathfrak{g},K)$-加群複体のコホモロジー (Γ によらない) と、π_∞ の $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))^\infty$ への実現 (こちらは Γ による) の情報をつかって表されている。このとき非自明な直和成分の個数とその次元の有限性や、$H^*(\mathfrak{g},K;\pi_\infty)\neq 0$ ならば π_∞ はある構成手順の知られた $G(\mathbb{R})$ のユニタリ表現と同型であることが知られている (導来函手加群 $A_\mathfrak{q}$ とよばれる)。ゆるやかに言って、$\pi_\infty\in\widehat{G(\mathbb{R})}$ を分類し、さらに表現の埋め込み $\mathcal{H}_{\pi_\infty}\hookrightarrow L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ をつくるのが保型形式の問題の一つである。特に、数論的商多様体の二乗可積分コホモロジーに上の意味で関与する導来函手加群は注目すべきものであろう。

注意：上の二番目の同型では、$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ の連続スペクトルの部分が、コホモロジーに寄与しない場合を想定したが、一般にはそうとは限らない。この辺は十分条件や具体例の構成などが、A. Borel を中心に、研究されている。連続スペクトルの表現の相対 Lie 代数コホモロジーが消えないときは、同型の左辺は無限次元になる。離散スペクトルのみを考えた右辺の方はそのまま有限次元であり、これは V 上の二乗可積分な調和形式の空間といつも同型であって、左辺に向かって単射が存在する [B-C]。

2. 球関数実現と関連する話題

保型 L 関数の積分表示などに用いられる保型形式の"意味のある"積分変換の変形の途中で、保型形式に関する局所的球関数実現を応用して計算が行われるのをしばしば見ることができる。保型形式を通常のようにアデール群 $G(\mathbb{A})$ の保型表現 $\pi \simeq \pi_\infty \otimes \bigotimes'_p \pi_p$ の元と思うとき、各 $p \leq \infty$ に対して $G(\mathbb{Q}_p)$-同変埋め込み

$$\pi_p \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{R_p}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\eta_p)$$

を考える。ここで、$(\eta_p, \mathcal{H}_{\eta_p})$ は $G(\mathbb{Q}_p)$ の閉部分群 R_p の (ユニタリ) 表現であり、行き先の $\mathrm{Ind}_{R_p}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\eta_p)$ は空間

$$\{f : G(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{H}_{\eta_p} \mid \text{“smooth”},\ f(rg) = \eta_p(r)f(g),\ r \in R_p\}$$

に $G(\mathbb{R})$ の右移動作用を考えたもの。上の埋め込みをここでは π_p に関する (R_p, η_p) 球関数実現とよぶ。R_p が極大コンパクト部分群、巾単部分群、簡約型部分群などの場合がしばしば考えられている。一般的に言えば、それぞれの実現の下に光の当てられる保型形式の特徴を良く理解することが重要である。また、保型表現は局所的にみると、(a) 不分岐有限素点 (b) 分岐有限素点 (c) 無限素点、の要素を持っている。したがって、その一角を占めている無限素点での局所的表現について、基本的な球関数実現などを具体的につかんでおくことは、実際に意味があるだろう (もちろん他の部分も)。

(例) $G = GSp_4$ の時。$H = Res_{F/\mathbb{Q}}GL_2$, F は虚 2 次体とする。F に対応する 2 次形式を ν とすると、この ν による埋め込み $\iota_\nu : H \hookrightarrow G$ をつくることが出来る。ジーゲル尖点形式をこの埋め込みの像の上で H 上のある Eisenstein 級数と掛けて積分するとこれは"意味のある積分"になる [An]。尖点形式が Hecke 作用素の同時固有関数にとって

あれば、

$$\int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})} f(hg_\nu)E(\overline{\chi},h,s)dh = \int_{\mathbb{A}^\times} W^f_{\chi\cdot\nu}\left(\begin{pmatrix} t1_2 & \\ & 1_2 \end{pmatrix} g_\nu\right)|t|^{s-3/2}d^\times t$$
$$=\text{const.}\times\text{archimedean factor}\times\frac{L(f,s)}{L(\overline{\chi},s+1/2)}\times W^f_{\chi\cdot\nu}(g_\nu)$$

となる (χ は $\mathbb{A}_F^\times$ の量指標)。$L(f,s)$ は Hecke 作用素の固有値からきまる 4 次の Euler 因子をもつ L 関数 (spinor L 関数) [An] であり、

$$W^f_{\chi\cdot\nu}(g)=\int_{R(\mathbb{Q})\backslash R(\mathbb{A})} f(rg)\overline{\chi\cdot\nu(r)}dr$$

は大域的な $(R,\chi\cdot\nu)$ 球関数である (R は G の Siegel 巾単根基を含む部分群)。これを局所的な $(R_p,\chi_p\cdot\nu_p)$ 球関数の計算に帰着させる議論が存在する。上の等式は 4 次の L 関数 $L(f,s)$ の解析接続、関数等式を得るのに利用される。そもそもこれは Andrianov によって見つけられた道筋であるが、無限素点の表現に注目していえば、Andrianov の行ったのは、正則スカラー値 Siegel 保型形式の場合であった (ある正則離散系列)。正則なベクトル値 Siegel 保型形式の場合には荒川 [Ar] の研究があり、さらにこれに関して、菅野 [Su] によって、考える代数群を広げて、表現論的手法をもちいた研究がされている。講演の時は、正則でも反正則でもないような保型形式に対応する実無限素点の表現について調べ、例えば上の研究をこうしたものにも拡張する話をさせていただいた (5 節)。ここでは、巾単的な部分群を考えたが、簡約的部分群に関して球関数を定義し、代数群の L 関数に応用する理論がある。この球関数は村瀬・菅野によって、新谷関数と名付けられ、研究されている。実素点における研究はユニタリ群の場合に、L 関数への応用もこめると、都築によるものがある。他にもあると思うが、ここでは調べが足りず挙げられなかった。

3. 実無限素点における導来函手加群と球関数実現

導来函手加群については、例えば小林 [Ko], 1, 2 節, を参照。G の複素化 $G_{\mathbb{C}}$ に関するよい複素旗多様体 $G_{\mathbb{C}}/Q$ の中の開部分多様体 $G(\mathbb{R})/L$ とその上の直線束を考えて、$G(\mathbb{R})$ の表現を構成する。このとき $Q=L\ltimes U$ は良い性質を持つ放物型部分群で、Levi 部分群 L は実数体上定義されており、埋め込み $G(\mathbb{R})/L\hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/Q$ によって開部分多様体に複素構造が誘導されている。$G_{\mathbb{C}}/Q$ 上の直線束を開部分多様体に引き戻して、ある次数 s の Dolbeault コホモロジー $H^s_{\bar\partial}(G(\mathbb{R})/L,\mathbb{C}_\lambda)$ をとると、これが欲しい導来函手加群に同型

な表現になっている (正確には Harish-Chandra 加群が)。これらの導来函手加群にはユニタリ内積を入れることができ、旗多様体上の直線束のパラメータ λ から無限小指標がきまる。さらに、群を G の極大コンパクト部分群 K に制限してこれらの加群を K の表現に分解した公式 (Blattner 公式) が知られている。この三つの性質はある範疇に属する表現のなかで、それぞれの導来函手加群を特徴付けるのに十分である。またこの稿で重要なのは、1 節で述べたように、算術的商多様体の二乗可積分コホモロジー (L^2 調和形式) の記述に現れるという性質であった。更に細かく、多様体の Hodge 型まで指定して、対応する導来函手加群を考えることも出来る (((p,q) 型 L^2 調和形式 $\leftrightarrow$ ある導来函手加群たち)。放物型部分群 Q は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト Cartan 部分代数の双対内のルート達を見ながら拾ってくればよい。$G = Sp_4$ の場合には、(i) Borel 部分群 (ii) $(L = U(2)) \ltimes$ 可換巾単 (iii) $(L = Sp(1) \times U(1)) \ltimes$ 非可換巾単 (iv) $(L = Sp(1) \times U(1)) \ltimes$ 可換巾単 (v) G、の 5 種類を考えれば良い。これらと適当な直線束を組み合わせて導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}$, または $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ が得られる。自明な無限小指標を持つ場合には、

(i) の場合、$H^3(V,\mathbb{C})$ の $H^{3,0}, H^{2,1}, H^{1,2}, H^{0,3}$ に、

(ii) の場合、$H^3(V,\mathbb{C})$ の $H^{3,0}, H^{0,3}$ ((i) で出たのと重複する) に、

(iii) の場合、$H^2(V,\mathbb{C})$ の $H^{2,0}, H^{0,2}$; $H^4(V,\mathbb{C})$ の $H^{3,1}, H^{1,3}$ に、

(iv) の場合、$H^2(V,\mathbb{C})$ の $H^{1,1}$; $H^4(V,\mathbb{C})$ の $H^{2,2}$ に、

(v) の場合、$H^{2i}(V,\mathbb{C})$ の $H^{i,i}$, $i = 0,1,2,3$, (これは自明表現) に、

対応するものが出てくる。V は複素 3 次元で、$H^1(V,\mathbb{C}) = H^5(V,\mathbb{C}) = 0$ になっていることに注意。あと $H^i(V,\mathbb{C})$ は混合 Hodge 構造をもっていることに注意。

さて、上のようにいくつもの導来函手加群が現れるわけだが、これの球関数実現はどうやってとらえたら良いのか。$T = T_{eK}(G(\mathbb{R})/K)$ を対称空間の接空間とする。$G(\mathbb{R})/K$ が複素構造を持つ場合が面白いのでそうする。すると、$T \otimes \mathbb{C} = T_+ \oplus T_-$ と分解し、例えば関数 ϕ の" 正則性" は、$X \cdot \phi = 0, \forall X \in T_-$ というふうに記述できるだろう。他の (p,q) 型調和形式についてもこのような考えをもって、正しい "微分して 0 になる方向" を探してやれば良い。ここで Wilfried Schmid によるある作用素の構成を紹介する。技術的には、この作用素を用いると $A_{\mathfrak{q}}$ の球関数実現を特徴づける微分方程式のシステムを作ることが出来る。$T_{\mathbb{C}}$ には Killing 形式から定まる定置 Hermite 内積が存在する。これに関する正規直交基底 $\{X_i\}$ を一組とって、作用素

$$\nabla\phi = \sum_i X_i \cdot \phi \otimes \overline{X_i}$$

を考える。ϕ は値を K の表現空間 V_τ にとっているとしよう。$T_{\mathbb{C}}$ には自然に K の表現が定まっていることを思い出すと、∇ は V_τ 値関数の空間から $V_\tau \otimes T_{\mathbb{C}}$ 値関数の空間への同変作用素を決めていることが分かる。複素構造分解 $T \otimes \mathbb{C} = T_+ \oplus T_-$ や $V_\tau \otimes T_{\mathbb{C}}$ の既約分解を考えてさらに射影作用素を合成すれば、"いろいろな方向" への同変作用素をつくることが出来る。K の表現全体の集合の中を、網の目をつたって渡ってゆく作用素がこのようにして得られるのであった。

導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ に対する Blattner 公式を見ると K の表現として、

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \simeq \bigoplus_{\mu \in \mathcal{C}(\lambda)} \tau_\mu^{\oplus [A_{\mathfrak{q}}(\lambda):\tau_\mu]}$$

という形をしている。ここで、$\Lambda(\lambda)$ を $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ に対して一つ決まるある K の表現がもつ支配的整最高ウエイト (dominant integral highest weight) とすると、$\mathcal{C}(\lambda)$ はコンパクト Cartan 部分代数の双対内の、$\Lambda(\lambda)$ を頂点とする錐のなかのウエイトのなす格子である。$\Lambda(\lambda)$ によってきまる $\tau_{\Lambda(\lambda)} \in \widehat{K}$ を $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の最小 K タイプ (the minimal K-type) とよぶ。$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ における $\tau_{\Lambda(\lambda)}$ の重複度が 1 であることも知られている。

ここで Schmid の作用素を適用してみよう。$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の 最小 K タイプに属する元は、$\mathcal{C}(\lambda)$ の" 反対の方向" に Schmid の作用素で動かしてやれば、表現空間をはみ出すので、0 になる。これが微分方程式系の構成方法である。

4. $G = Sp_4$ の時の具体的研究例

$G(\mathbb{R}) = Sp_4(\mathbb{R}) = \left\{ g \in SL_4(\mathbb{R}) \mid {}^t g J g = J = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ とする。N を $G(\mathbb{R})$ の Siegel 極大放物部分群 P の巾単部分群 (可換) とし、そのユニタリ指標 ν を

$$\nu\left(\begin{pmatrix} 1_2 & n(t) \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}\right) = e^{2\pi\sqrt{-1}(h_1 t_1 + h_3 t_3 + h_2 t_2)}, \quad n(t) = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix}$$

で定める。簡単のため $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $h_3 = 0$ としておく。P の Levi 部分群の $\widehat{N}$ への作用のもとで、ν を固定する部分群を $SO(\nu) \simeq SO(2)$ または $SO(1,1)$、 とし、その指標 χ をとる。これらに関して、$(R, \chi \cdot \nu)$ 球関数を考える ($R = SO(\nu) \ltimes N$)。まず Schmid の作用素はつぎで与えられる。$(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2}$ でパラメトライズされる支配的整最高ウエイトをもつ $U(2)_{\mathbb{C}}$ の表現 τ_{ℓ_1,ℓ_2} についてある基底 $\{v_j\}_{0 \le j \le d}$, $d = \ell_1 - \ell_2$, を固定して、$V_{\tau_{\ell_1,\ell_2}}$ 値球関数 $\phi(g) = \sum_j b_j(g) v_j$ を考える。分解 $G = RAK$ を用いると、動

径成分 $\phi(a)$, $a \in A = \{\text{diagonal }(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})\}$, に対する Schmid の作用素は次の 6 通り。

記号：$\mathcal{S} = \chi_0 \dfrac{h_1 a_1 h_2 a_2}{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D} = h_1 a_1^2 - h_2 a_2^2$, χ_0 は χ のある元における値で定数。

(a-1) $0 \leq j \leq d+2$ に対して、$P^{up}(R(\nabla^+)\phi)$ の各基底の係数は、

$$
\begin{aligned}
&j(j-1)\left(\partial_1 + 4\pi h_1 a_1^2 - 2(d+2-j)\frac{h_2 a_2^2}{\mathcal{D}} + j - 2 - \ell_1\right) b_{j-2}(a) \\
&-2j(d+2-j)\mathcal{S}\, b_{j-1}(a) \\
&+(d+1-j)(d+2-j)\left(\partial_2 + 4\pi h_2 a_2^2 + 2j\frac{h_1 a_1^2}{\mathcal{D}} - j - \ell_2\right) b_j(a)
\end{aligned}
$$

(a-2) $1 \leq j \leq d+1$ に対して、$P^{even}(R(\nabla^+)\phi)$ の各基底の係数は、

$$
\begin{aligned}
&(j-1)\left(\partial_1 + 4\pi h_1 a_1^2 - (d-2j+2)\frac{h_2 a_2^2}{\mathcal{D}} + j - 2 - \ell_1\right) b_{j-2}(a) \\
&-(d+2-2j)\mathcal{S}\, b_{j-1}(a) \\
&-(d+1-j)\left(\partial_2 + 4\pi h_2 a_2^2 - (d-2j+2)\frac{h_1 a_1^2}{\mathcal{D}} - j - \ell_2\right) b_j(a)
\end{aligned}
$$

(a-3) $2 \leq j \leq d$ に対して、$P^{down}(R(\nabla^+)\phi)$ の各基底の係数は、

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_1 + 4\pi h_1 a_1^2 + 2(j-1)\frac{h_2 a_2^2}{\mathcal{D}} + j - 2 - \ell_1\right) b_{j-2}(a) \\
&+2\mathcal{S}\, b_{j-1}(a) \\
&+\left(\partial_2 + 4\pi h_2 a_2^2 - 2(d-j+1)\frac{h_1 a_1^2}{\mathcal{D}} - j - \ell_2\right) b_j(a)
\end{aligned}
$$

(b-1) $0 \leq j \leq d+2$ に対して、$P^{up}(R(\nabla^-)\phi)$ の各基底の係数は、

$$
\begin{aligned}
&j(j-1)\left(\partial_2 - 4\pi h_2 a_2^2 + 2(d+2-j)\frac{h_1 a_1^2}{\mathcal{D}} + j - 2 + \ell_2\right) b_{j-2}(a) \\
&+2j(d+2-j)\mathcal{S}\, b_{j-1}(a) \\
&+(d+1-j)(d+2-j)\left(\partial_1 - 4\pi h_1 a_1^2 - 2j\frac{h_2 a_2^2}{\mathcal{D}} - j + \ell_1\right) b_j(a)
\end{aligned}
$$

(b-2) $1 \leq j \leq d+1$ に対して、$P^{even}(R(\nabla^-)\phi)$ の各基底の係数は、

$$
\begin{aligned}
&(j-1)\left(\partial_2 - 4\pi h_2 a_2^2 + (d-2j+2)\frac{h_1 a_1^2}{\mathcal{D}} + j - 2 + \ell_2\right) b_{j-2}(a) \\
&+(d+2-2j)\mathcal{S}\, b_{j-1}(a) \\
&-(d+1-j)\left(\partial_1 - 4\pi h_1 a_1^2 + (d-2j+2)\frac{h_2 a_2^2}{\mathcal{D}} - j + \ell_1\right) b_j(a)
\end{aligned}
$$

(b-3) $2 \leq j \leq d$ に対して、$P^{down}(R(\nabla^-)\phi)$ の各基底の係数は、

$$\begin{aligned}&\left(\partial_2 - 4\pi h_2 a_2^2 - 2(j-1)\frac{h_1 a_1^2}{\mathcal{D}} + j - 2 + \ell_2\right) b_{j-2}(a)\\ &-2\mathcal{S}\ b_{j-1}(a)\\ &+\left(\partial_1 - 4\pi h_1 a_1^2 + 2(d-j+1)\frac{h_2 a_2^2}{\mathcal{D}} - j + \ell_1\right) b_j(a)\end{aligned}$$

上で、$P^{???}$ は、$V_{\tau_{\ell_1,\ell_2}} \otimes T_\pm$ の既約直和因子への射影作用素である ($T_+ \simeq V_{\tau_{2,0}}$, $T_- \simeq V_{\tau_{0,-2}}$)。導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ を 2 節の例のようにとる。一般の λ には不正確な言い方になってしまうが、2 節の例の (i) ～ (iv) のようなそれぞれの場合に現れる導来函手加群を (2, 1) 型などのように Hodge 型で呼ぶことにする (実際、錐 $\mathcal{C}(\lambda)$ のかたちなど自明な無限小指標の場合とそっくりなので)。このとき各型の導来函手加群の最小 K タイプに属する元に対して微分方程式系は以下の通り。

(i-1) (3,0) 型; 最小 K タイプ (ℓ_1, ℓ_2), $\ell_1 > 2$, $\ell_2 > 2$, $\ell_1 \geq \ell_2$;

$$P^{up}(R(\nabla^+)\phi) = 0, \quad P^{even}(R(\nabla^+)\phi) = 0, \quad P^{down}(R(\nabla^+)\phi) = 0$$

これは解空間の次元が 1 のホロノミック微分方程式系を定める。

(i-2) (2,1) 型; 最小 K タイプ (ℓ_1, ℓ_2), $\ell_1 > 2$, $\ell_2 < 0$, $\ell_1 \geq -\ell_2$;

$$P^{even}(R(\nabla^+)\phi) = 0, \quad P^{down}(R(\nabla^+)\phi) = 0, \quad P^{down}(R(\nabla^-)\phi) = 0$$

これは解空間の次元が 4 のホロノミック微分方程式系を定める。

(iii) (2,0), (3,1) 型; 最小 K タイプ $(\ell, 1)$, $\ell \geq 2$;

$$\begin{aligned}&P^{up}(R(\nabla^+)\phi) = 0, \quad P^{even}(R(\nabla^+)\phi) = 0,\\ &P^{down}(R(\nabla^+)\phi) = 0, \quad P^{down}(R(\nabla^-)\phi) = 0\end{aligned}$$

これは解空間の次元が 1 のホロノミック微分方程式系を定める。

(iv) (1,1), (2,2) 型; 最小 K タイプ $(\ell, -\ell)$, $\ell > 1$;

$$\begin{aligned}&P^{even}(R(\nabla^+)\phi) = 0, \quad P^{down}(R(\nabla^+)\phi) = 0,\\ &P^{even}(R(\nabla^-)\phi) = 0, \quad P^{down}(R(\nabla^-)\phi) = 0\end{aligned}$$

これは解空間の次元が 2 のホロノミック微分方程式系を定める。

∇^+ と ∇^- を入れ換えれば、複素共役の分がでる。可積分であることや、方程式系のランクは、直接上の連立微分方程式系を扱うことによって得られる。

方程式系の解について述べる。(i) は古典的な正則 Siegel 保型形式の Fourier 展開に現れる関数であり、すなわち a_1, a_2 の多項式と指数関数の積で解が書けることが想像されるし、実際解いてみるとそうなる。(ii) の場合は、[M] を参照。

(iii) (2,0), (3,1) 型。この場合、解空間は一次元であって、非自明な解が存在するためには、$\chi_0\sqrt{h_1h_2} = \pm d\sqrt{-1}$ が必要である。このとき、

$$b_j(a_1,a_2) = C \times (\sqrt{-1})^j \times (\sqrt{h_1}a_1)^{\ell-j}(\sqrt{h_2}a_2)^{j+1}e^{-2\pi(h_1a_1^2+h_2a_2^2)}$$

が解である。ここで、C は j によらない定数。実際、(i) の (3,0) 型と比較すると χ_0 に関する制約がきつくなっていることが異なる点である。

(iv) (1,1), (2,2) 型。この場合、非自明な解が存在するためには、$\chi_0 = 0$ が必要である。このとき、解空間は二次元あるが、まず $b_{2j-1}(a_1,a_2) = 0$, $j = 1,\cdots,\ell$, であって、偶数番目の関数については、解空間の一次元分は

$$\begin{aligned} b_0(a_1,a_2) =& C_0 \times (\sqrt{h_1}a_1)^{\ell+1}(\sqrt{h_2}a_2)^{\ell+1} \\ & \times \{2\pi(h_1a_1^2 - h_2a_2^2)\}^{-\frac{\ell+1}{2}} W_{\frac{\ell}{2},\,\frac{\ell}{2}}(4\pi(h_1a_1^2 - h_2a_2^2)) \end{aligned}$$

から、帰納的に方程式系を用いて得られる関数 $b_{2j}(a_1,a_2)$, $j = 0,\cdots\ell$, で作られる。動径座標 a_1, a_2 が無限大に大きくなるにつれて、急減少する可能性のある解はこの一次元分に限られる。このとき急減少性のためには、$h_1 > 0$, $h_2 < 0$ も必要である。方程式系を簡約化して行くとき、$b_j(a_1,a_2) = (\sqrt{h_1}a_1)^{\ell+1}(\sqrt{h_2}a_2)^{\ell+1}c_j(a_1,a_2)$, $0 \le j \le 2\ell$, とおき、さらに変数を $x = 2\pi(h_1a_1^2 + h_2a_2^2)$, $y = 2\pi(h_1a_1^2 - h_2a_2^2)$ ととると、$c_j(a_1,a_2)$ は y のみの関数になっていることが導かれることにも注意しておく。この性質 (一変数性) は、N の指標 ν に対して $h_1 = h_2 = 0$, $h_3 \neq 0$ であるものをとり、動径座標を適当にとりかえて出来る球関数に対する方程式系にも共通して確認できる。

5. Andrianov の L 関数への応用、(2,1) 型の導来函手加群について

2節で例としてあげた Andrianov の L 関数への応用について結果を記しておく。f を Siegel 尖点形式で Hecke 作用素の同時固有関数になっているもので、無限素点が (2,1)

型の導来函手加群を生成するものとする。簡単のため $(h_1, h_2) = (1, h)$, $h > 0$, とし、$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-4h})$ とする。このとき、

$$\int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}} W^{f}_{\chi\cdot\nu}\left(\begin{pmatrix} t1_2 & \\ & 1_2 \end{pmatrix} g_\nu\right)|t|^{s-3/2}d^{\times}t$$
$$= \frac{L(f,s)}{L(\overline{\chi}, s+1/2)} \times \frac{\Gamma(s+(\ell_1-1)/2+\ell_2/2)\Gamma(s+(\ell_1-1)/2-\ell_2/2)}{(2\pi\sqrt{4h})^{s+(\ell_1+\ell_2+1)/2}\Gamma(s+(\ell_1-\ell_2+1)/2)}$$
$$\times\, e^{\pi\sqrt{4h}}(2\pi\sqrt{4h})^{(\ell_2+3)/2}W_{(\ell_2-1)/2,\ \ell_2/2}(2\pi\sqrt{4h})^{-1} \times W^{f}_{\chi\cdot\nu}(g_\nu)$$

である ($g_\nu = \mathrm{diagonal}\,(\sqrt{4h}, 2, 2, \sqrt{4h})$)。これを 2 節の例に用いると、

$$\zeta(f,s) = (2\pi)^{-2s}\Gamma(s+(\ell_1-1)/2+\ell_2/2)\Gamma(s+(\ell_1-1)/2-\ell_2/2)L(f,s)$$

とおくとき、$\zeta(f,s)$ は、s に関して整関数で、関数等式

$$\zeta(f,s) = (-1)^{\ell_2}\zeta(f, 1-s)$$

を満たすことがわかる。

References

[An] A.N. Andrianov, *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2*, Uspekhi Math. Nauk **29** (1974), 43-110.

[Ar] T. Arakawa, *Vector valued Siegel's modular forms of degree two and the associated Andrianov L-functions*, Manuscripta Math. **44** (1983), 155-185.

[B-C] A. Borel and W. Casselman, *L^2-cohomology of locally symmetric manifolds of finite volume*, Duke Math. J. **50** (1983), 625-647.

[B-W] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Annals of Math. Studies 94*, Princeton Univ. Press, 1980.

[K] T. Kobayashi, 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現論, 数学 **46** (1994), 124-143.

[M] T. Miyazaki, *The generalized Whittaker functions for several admissible representations of $Sp(2,\mathbb{R})$*, Proc. of the Japan Acad. **73** (1997), 130-133.

[S] W. Schmid, *On realization of the discrete series of a semisimple Lie group*, Rice University Studies **56** (1970), 99-108.

[Su] T. Sugano, *On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **31** (1984), 521-568.

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji-shi, Tokyo 192-0364, Japan

E-mail address: miyazaki@math.metro-u.ac.jp