数理解析研究所講究録
1026 巻 1998 年 170-179

ある種の完備離散付値体のミルナー K 群の構造について

東京大学数理科学研究科 博士課程 中村 仁也 (Jinya Nakamura)

§1. 序文

Kを完備離散付値体とすると, その乗法群 $K^\times$には次のようなフィルター付けを定義できる.

$$K^\times \supset \mathcal{O}_K^\times \supset 1+\mathfrak{m}_K \supset 1+\mathfrak{m}_K^2 \supset 1+\mathfrak{m}_K^3 \supset \cdots$$

ここで $\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{m}_K$はそれぞれKの整数環, 極大イデアルとした. FをKの剰余体とするとこのフィルター付けの部分商は

$$\begin{aligned}
K^\times/\mathcal{O}_K^\times &\cong \mathbb{Z}\\
\mathcal{O}_K^\times/(1+\mathfrak{m}_K) &\cong F^\times\\
(1+\mathfrak{m}_K)/(1+\mathfrak{m}_K^2) &\cong F\\
(1+\mathfrak{m}_K^2)/(1+\mathfrak{m}_K^3) &\cong F\\
&\vdots
\end{aligned}$$

である.

局所体の類体論はそのガロア群と乗法群とを結びつける理論であったが, 高次元局所体の類体論ではガロア群と結びつくものはミルナーK群である. 体の 1 次元のミルナーK群はその体の乗法群である. よって, 2 次元以上のミルナーK群は上のような意味でどのような姿をしているかが問題になるが, それは混標数の完備離散付値体についてはほとんどわかっていない. ここでは, ある種の混標数完備離散付値体についてそれを書き下す.

注. 等標数の完備離散付値体の構造はもはやわかっており, 標数 0 の場合は [G] で, 正標数の場合は [B] でそれぞれ調べられている. また混標数でも絶対不分岐の場合は [Ku1] で求められている. (参 §5)

§2. 準備

2.1. ミルナー K群の定義とそのフィルター付け.

Kを体とする. Kの q次ミルナー K群 $K_q^M(K)$ を

$$K_q^M(K) = K^\times \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \cdots \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K^\times / \langle a_1 \otimes \cdots a_q \mid \text{ある } i \neq j \text{について } a_i + a_j = 1 \rangle$$

で定義する. ただし $\langle \cdots \rangle$ はその内容で生成される部分群のこととする. $a_1 \otimes \cdots \otimes a_q$ の $K_q^M(K)$ への像を $\{a_1, \ldots, a_q\}$ と書き, シンボルと呼ぶ. 定義より $K_1^M(K) = K^\times$ である.

次に, 混標数完備離散付値体 Kについて $K_q^M(K)$ に次のようなフィルター付けを定義する. $i \geq 1$ に対して

$$U_q^i(K) = \langle \{a_1, \ldots, a_q\} \mid a_1 \in 1 + \mathfrak{m}_K^i,\ a_2, \ldots, a_q \in K^\times \rangle.$$

grをその部分商

$$gr_q^i(K) = U_q^i(K)/U_q^{i+1}(K)$$

とする. 目標はこれを剰余体の言葉で書くことである.

定理 **1(Bloch,Kato [BK]).** πを Kの素元とする. $i \geq 1$ について次は全射.

$$\begin{aligned} \Omega_F^{q-2} \oplus \Omega_F^{p-1} &\longrightarrow gr_q^i(K) \\ (x\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_{q-2}}{y_{q-2}}, 0) &\longmapsto \{1 + \pi^i \tilde{x}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{q-2}, \pi\} \\ (0, x\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_{q-1}}{y_{q-1}}) &\longmapsto \{1 + \pi^i \tilde{x}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{q-1}\} \end{aligned}$$

ただし $\tilde{}$ は Fから $\mathcal{O}_K$へのもちあげ, Ω_F^1は $\mathbb{Z}$ 上の微分加群とする.

この定理より各部分商は剰余体の微分加群から全射があることはわかったので, あとはこの核がわかればよい.

2.2. 正標数の体の微分加群の部分群.

Fを正標数の体とする. Ω_F^qには

$$\mathrm{B}_1^q = \mathrm{Im}(d : \Omega_F^{q-1} \longrightarrow \Omega_F^q)$$

$$\mathrm{Z}_1^q = \mathrm{Ker}(d : \Omega_F^q \longrightarrow \Omega_F^{q+1})$$

という部分群があって

$$\mathrm{C}^{-1} : \Omega_F^q \longrightarrow \mathrm{Z}_1^q/\mathrm{B}_1^q$$
$$x\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_q}{y_q} \longmapsto x^p\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_q}{y_q}$$

が同型である. C はカルチェ作用素である. そこで B_i^qを帰納的に

$$\mathrm{B}_i^q \xrightarrow{\mathrm{C}^{-1}} \mathrm{B}_{i+1}^q/\mathrm{B}_1^q$$

が同型になるように, B_1^qを含むΩ_F^qの部分群として定義する.

$$\mathrm{B}_1^q \subset \mathrm{B}_2^q \subset \cdots \subset \mathrm{Z}_1^q \subset \Omega_F^q$$

となる.

2.3. 体の種類.

今回調べた完備離散付値体は特殊なものなので, ここではそれがどのようなものかを述べる. K_0を混標数完備離散付値体 (p を剰余体の標数とする) でさらに絶対不分岐 (つまりord_{K_0}を K_0の正規付値とすると$\mathrm{ord}_{K_0}(p) = 1$) とする. Fをその剰余体とし, その標数 p は 3 以上とする. ここで標数が 3 以上ならば Fどんな体でもかまわない. Eを F内の最大完全部分体とし, k_0を Eのヴィット・ベクトルの環 $W(E)$ の分数体とする. ζ_pを 1 の原始 p 乗根とし,

$$K_1 = K_0(\zeta_p), \quad k_1 = k_0(\zeta_p)$$

とする. k_1の素元π_1を任意にとる. このπ_1に対して Kを

$$K = K_1(\sqrt[p]{\pi_1})$$

で定義する. Kは, K_0上 $p(p-1)$ 次完全分岐のスタンダード (Kの絶対分岐指数と, Kの定数部分体, すなわち $W(E)$ の分数体の K内での代数閉包の体の絶対分岐指数が等しい) な完備離散付値体で, さらにワイルド分岐の仕方に条件をつけたものである.

§3. 主定理 ([N])

上記の Kと$\pi = \sqrt[p]{\pi_1}$, $u = p/\pi_1^{p-1}$について次の同型または完全列がある.

(I) $1 \le j \le p^2 + p - 1$ について

$$\Omega_F^{q-1} \cong gr_q^j(K) \qquad (p \nmid j)$$
$$0 \to \Omega_F^{q-1}/\mathrm{B}_1^{q-1} \to gr_q^j(K) \to \Omega_F^{q-2}/\mathrm{Z}_1^{q-2} \to 0 \qquad (p \mid j,\ j \ne p^2)$$
$$0 \to \Omega_F^{q-1}/(1+\bar{u}\,\mathrm{C})\mathrm{B}_2^{q-1} \to gr_q^j(K) \to \Omega_F^{q-2}/(1+\bar{u}\,\mathrm{C})\mathrm{Z}_1^{p-2} \to 0 \qquad (j = p^2).$$

(II) $p^2+p \le j \le 2p^2-1$ について

$$\begin{array}{ll} \Omega_F^{q-1} \cong gr_q^j(K) & (p \nmid j) \\ 0 \to \Omega_F^{q^1}/\mathrm{B}_2^{q-1} \to gr_q^j(K) \to \Omega_F^{q-2}/\mathrm{Z}_1^{q-2} \to 0 & (p \mid j,\ j \neq 2p^2-p) \\ 0 \to \Omega_F^{q-1}/(1+\bar{u}\,\mathrm{C})\mathrm{B}_3^{q-1} \to gr_q^j(K) \to \Omega_F^{q-2}/\mathrm{Z}_1^{q-2} \to 0 & (j = 2p^2-p). \end{array}$$

(III) $2p^2 \le j$について, lを $lp(p-1)+2p \le j < (l+1)p(p-1)+2p$ なる整数とすると

$$\begin{array}{ll} \Omega_F^{q-1}/\mathrm{B}_{l-1}^{q-1} \cong gr_q^j(K) & (p \nmid j) \\ \Omega_F^{q-1}/\mathrm{B}_{l+1}^{q-1} \cong gr_q^j(K) & (p \mid j,\ j \neq (l+1)p^2-lp) \\ \Omega_F^{q-1}/(1+\bar{u}\,\mathrm{C})\mathrm{B}_{l+2}^{q-1} \cong gr_q^j(K) & (j = (l+1)p^2-lp). \end{array}$$

注. 主定理の $1 \le j \le p^2$の範囲は [BK] の Theorem 1.4 と Theorem 6.7 で示されている. (参 §5)

§4. 計算の方法

4.1. p-torsion 元.

L を混標数完備離散付値体とし, $e = \mathrm{ord}_L(p)$ とする. i を正の整数で $e/(p-1)$ より大きいもの, n を十分大きな整数とする. すると

$$p \text{ 倍写像： } K_q^M(L)/p^n \longrightarrow K_q^M(L)/p^{n+1}$$

は

$$gr_q^i(L) \xrightarrow{p} gr_q^{i+e}(L)$$

を誘導して, さらにこれはフィルター付けの定義より全射である. ところで, $gr_q^i(L)$ は $1 \le i \le ep/(p-1)$ については [BK] よりわかっているので, p 倍写像の核を調べれば帰納的にすべての grがわかる. 例えば $gr_q^i(L) \cong \Omega_F^{p-1}$だったとして, $K_q^M(L)$ の p 倍写像の核と $U_q^i(L)$ との共通部分が $gr_q^i(L)$ 内で生成する部分群が B_1^{q-1}だったとすると,

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow \mathrm{B}_1^{q-1} \longrightarrow gr_q^i(L) \xrightarrow{p} gr_q^{i+e}(L) \longrightarrow 0 \\ \wr\| \\ \Omega_F^{q-1} \end{array}$$

が完全列となり, $gr_q^{i+e}(L) \cong \Omega_F^{q-1}/\mathrm{B}_1^{q-1}$がわかることになる. そこで, 任意の正の整数 n について次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
(K_{q-1}^M(L)/p)(1) & \longrightarrow & K_q^M(L)/p^n & \xrightarrow{p} & K_q^M(L)/p^{n+1} \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
H^{q-1}(L,\mathbb{Z}/p(q)) & \longrightarrow & H^q(L,\mathbb{Z}/p^n(q)) & \xrightarrow{p} & H^q(L,\mathbb{Z}/p^{n+1}(q))
\end{array}$$

ここで左上の写像は $a \in K_{q-1}^M(L)/p$ に対して $a \otimes \zeta \mapsto \{\zeta_p, a\}$ なるもので, 下の行は

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n(q) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/p^{n+1}(q) \longrightarrow \mathbb{Z}/p(q) \longrightarrow 0$$

から誘導されるコホモロジーの完全列である. [BK]Theorem 5.12 より列はすべて同型で, よって上の行が完全列なことがわかる. よって p 倍写像の核は $\{\zeta_p, K_{q-1}^M(L)\}$ の像である. あとはこの形の元が $K_q^M(L)$ のフィルター付けの何番目にどのような姿で入っているかをすべて調べれば grがすべてわかる.

次でその計算のために使用した道具を 3 つ列挙する.

4.2. シンボル計算の公式.

命題 1. L を混標数完備離散付値体, $\mathfrak{m}_L$をその整数環の極大イデアル, p を剰余体の標数とする. $K_2^M(L)$^を $K_2^M(L)$ の p 進完備化とする. すると $x, y \in \mathfrak{m}_L$について $K_2^M(L)$^の中で次の式が成り立つ.

$$\{1-x, 1-y\} = \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ (m,n)=1}} \{1 - x^m y^n, -x^{A(m,n)} y^{B(m,n)}\}$$

ただし (m,n) は m と n の最大公約数, $A(m,n), B(m,n)$ は $nA(m,n) - mB(m,n) = 1$ をみたす整数とした.

これは [Ka]Lemma 6 の式, $x, y \in L, x \neq 0, 1,\ y \neq 1, x^{-1}$について

$$\{1-x, 1-y\} = \{1-xy, -x\} + \{1-xy, 1-y\} - \{1-xy, 1-x\}$$

を繰り返し使うと求まる.

$p \nmid n$ なる整数 n をかけることは $K_2^M(L)$^内では可逆なので, この式は

$$\{1-x, 1-y\} = \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ (m,n)=1 \\ p\nmid n}} \frac{1}{n}\{1 - x^m y^n, -x\} - \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ (m,n)=1 \\ p\mid n}} \frac{1}{m}\{1 - x^m y^n, -y\}$$

とも書くことができる. $p \neq 2$ ならば右辺の各シンボルの右成分はマイナスを省いてもよい.

4.3. K_q^M-exponential homomorphism.

定理 **2 ([Ku3]Theorem 0.1).** L を上のものとする. $\eta \in \mathfrak{m}_L^{2e/(p-1)}$について次は群準同型.

$$\begin{aligned} \exp_{\eta,q} : & \Omega^{q-1}_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}} \longrightarrow K_q^M(L)\hat{} \\ & a\frac{db_1}{b_1} \wedge \dots \wedge \frac{db_{q-1}}{b_{q-1}} \longmapsto \{\exp(\eta a), b_1, \dots, b_{q-1}\} \end{aligned}$$

ただし $a \in \mathcal{O}_L$, $b_1, \dots, b_{q-1} \in \mathcal{O}_L^\times$, $K_q^M(L)\hat{}$は $K_2^M(L)$ の p 進完備化である.

系. 主定理における Kについて, $gr_q^i(K)$ は $i \geq 2p^2 - p + 1$ ならば定理 1 の写像におけるΩ_F^{q-1}からの像が全射である.

系の成立は, πの k_0上の最小多項式を微分すると $d\pi$は $\mathfrak{m}_K^{2p(p-1)-1}d\pi = 0$ がわかり, それを $\exp_{\pi^{2p},2}$で送ると, 任意の $x \in \mathcal{O}_K$について $K_2^M(K)\hat{}$の中で $\{1+\pi^{2p^2}x, \pi\} = 0$ となることによる.

4.4. K_q^M-Norm 写像.

体の有限次拡大 L'/L に対して $L'^\times \to L^\times$のノルム準同型に同じくして $K_q^M(L') \to K_q^M(L)$ にもノルム写像はある.

命題 **2.** 主定理の K/K_1について, $p+1 \leq i$ ならば

$$\mathrm{Im}\left(\Omega_F^{q-1} \to gr_q^{ip}(K)\right) \longrightarrow gr_q^{i+p-1}(K_1)$$

の写像がノルム準同型から誘導され, 同型になる. ただしIm の中の写像は定理 1 のものとする. 特に $2p \leq i$ ならば

$$gr_q^{ip}(K) \xrightarrow{\cong} gr_q^{i+p-1}(K_1)$$

が成り立つ.

K_1の grは求めやすい (絶対不分岐な体上テームな分岐しかしていないから) ので, これによってある程度の $gr(K)$ の様子がわかる. (参§5)

注. K/K_1についてはこのようになるが, 一般には必ずしも同型を導くとは限らない.

§5. (参考) その他の体の gr の様子

ここでは混標数完備離散付値体の gr について, 他のわかっていることを列挙する. L を混標数完備離散付値体, $\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{m}_L$, F をそれぞれ L の整数環, 極大イデアル, 剰余体とする. p を剰余体の標数, e を L の絶対分岐指数とする.

5.1. L が一般の場合の途中の gr まで (**[BK]**).

定理 3 ([BK] Theorem 1.4, 6.7). L の素元 π を固定する. $1 \leq i < ep/(p-1)$ について, $i = jp^s, p \nmid j$ とすると次は完全列.

$$0 \longrightarrow \Omega_F^{q-2} \xrightarrow{\theta} \Omega_F^{q-1}/\mathrm{B}_s^{q-1} \oplus \Omega_F^{q-2}/\mathrm{B}_s^{q-2} \longrightarrow gr_q^i(L) \longrightarrow 0$$

ただし θ は

$$\theta(\omega) = (\mathrm{C}^{-s}(d\omega), (-1)^q j\,\mathrm{C}^{-s}(\omega))$$

C^{-s} は逆カルチェ作用素の s 回合成, 左の写像は定理 1 のもの. また, $i = ep/(p-1)$ が整数のとき,j, s を上と同様に定めて

$$\begin{aligned} gr_q^i(L) \cong \mathrm{Coker}(\Omega_F^{q-2} &\longrightarrow (\Omega_F^{q-1}/(1+a\,\mathrm{C})\mathrm{B}_s^{q-1})) \oplus (\Omega_F^{q-2}/(1+a\,\mathrm{C})\mathrm{B}_s^{q-2}) \\ \omega &\longmapsto ((1+a\,\mathrm{C})\,\mathrm{C}^{-s}(d\omega), (-1)^q j(1+a\,\mathrm{C})\,\mathrm{C}^{-s}(\omega)). \end{aligned}$$

ただし $a \in F$ は p/π^e の剰余類.

5.2. L が絶対不分岐の場合 (**[Ku1]**).

定理 4 ([Ku1] Proposition 2.3). $p > 2$ とすると, $i \geq 1$ について

$$\Omega_F^{q-1}/\mathrm{B}_{i-1}^{q-1} \cong gr_q^i(L).$$

5.3. $L = \mathrm{Frac}((\mathbb{Z}_p[T]_{(p)})\hat{\ })(\sqrt[p]{pT}), p \neq 2$ の K_2^M について (**[Ku2]**).

この L は, $\mathbb{Z}_p[T]$(T は不定元) を (p) で局所化し完備化した環の分数体に $\sqrt[p]{pT}$ を添加したものである.

定理 5([Ku2] Theorem 1.1). 上の L について

(i) $i > p+1$ かつ $p \nmid i$ ならば $gr_2^i(L) = 0$.

(ii) $i = 2p$ ならば $gr_2^i(L) \cong F/F^p$.

(iii) $i = np,\ n \geq 3$ ならば $gr_2^i(L) \cong F^{p^{n-2}}$.

5.4. 主定理における K_1の場合.

定理 6 [N]. $i \geq 1$ とし, j, lを $1 \leq i - l(p-1) - 1 = j \leq p-1$ なる唯一の整数の組とする. 主定理の中の K_1について次の同型または完全列がある.
$1 \leq j \leq p-2$ ならば

$$gr_q^i(K_1) \cong \Omega_F^{q-1}/\mathrm{B}_l^{q-1}.$$

$j = p-1$ ならば

$$gr_q^i(K_1) \cong \Omega_F^{q-1} \qquad i = 1 \text{ のとき}$$

$$0 \to \Omega_F^{q-1}/(1-\mathrm{C})\mathrm{B}_1^{q-1} \to gr_q^i(K_1) \to \Omega_F^{q-2}/(1-\mathrm{C})\mathrm{Z}_1^{q-2} \to 0 \qquad j = p \text{ のとき}$$

$$gr_q^i(K_1) \cong \Omega_F^{q-1}/(1-\mathrm{C})\mathrm{B}_{l+1}^{q-1} \qquad \text{その他のとき.}$$

§6. 計算例

ここではシンボルの $K_2^M(K)\hat{}$においての実際の計算をいくつかあげる. つまり, $\{\zeta_p, K^\times\}$ の元をいくつかあげて計算する. 簡単のため$\pi_1 = 1 - \zeta_p$, すなわち $K = K_0(\zeta_p, \sqrt[p]{1-\zeta_p})$ とする. $\pi = \sqrt[p]{1-\zeta_p}$とする. Kの剰余体 Fは分離閉体とする. Fの最大完全部分体 Eも分離閉体になる. よって [BK] より $k = k_0(\zeta_p, \sqrt[p]{1-\zeta_p})$ について $U_2^1(k)$ の $K_2^M(k)\hat{}$への像は 0 である.

(i) $\{\zeta_p, \pi\}$ について.

この元は, まず$\zeta_p \in U_k^p$であることから $\{\zeta_p, \pi\} \in U_2^p(k)$ だが, $K_2^M(k)\hat{}$は $i \geq 1$ ならば $gr_2^i(k) = 0$ なので, $\{\zeta_p, \pi\} = 0$ である.

(ii) $\{\zeta_p, a\}$, $\bar{a} \neq 0$ について.

$\zeta_p = 1 - \pi^p$と定理 3 より

$$\Omega_F^1/\mathrm{B}_1^1 \oplus F/F^p \xrightarrow{\cong} gr_2^p(K)$$

$$(d\bar{a}/\bar{a}, 0) \longmapsto \{1 - \pi^p, a\}.$$

よって$\bar{a} \in F^p$ ならば $gr_2^p(K)$ 内で $\{\zeta_p, a\} = 0$, そうでなければ消えていない.

(iii) $\{\zeta_p, 1 - \pi^i a\} \quad (1 \leq i \leq p-2)$ について.

この元を (4.2) を使って展開する. (m, n は $m, n \geq 1$, $(m, n) = 1$ を動く.)

$$\begin{aligned}\{1-\pi^p, 1-\pi^i a\} &= \sum_{p\nmid n} \frac{1}{n}\{1-(\pi^p)^m(\pi^i a)^n, \pi^p\} - \sum_{p|n} \frac{1}{m}\{1-(\pi^p)^m(\pi^i a)^n, \pi^i a\} \\ &= \sum_{p\nmid n} \frac{1}{n}\{1-\pi^{pm+in}a^n, \pi^p\} - \sum_{p|n} \frac{1}{m}\{1-\pi^{pm+in}a^n, \pi^i a\}.\end{aligned}$$

ここで, フィルター付けの一番浅いところに残っていそうなものは (m, n) が $(1, 1)$ の項と $(1, p)$ の項である. まず $(1, 1)$ の項は

$$\{1-\pi^{p+i}a, \pi^p\} = p\{1-\pi^{p+i}a, \pi\} \in U_2^{p^2+i}(K).$$

次に $(1, p)$ の項は

$$\begin{aligned}\{1-\pi^{p+ip}a^p, \pi^i a\} &\equiv p\{1-\pi^{i+1}a, \pi^i a\} \mod U_2^{p(p-1)}(K) \\ &= \frac{p}{i+1}\{1-\pi^{i+1}a, a\} \\ &\equiv \frac{1}{i+1}\{1-\pi^{pi+p}a^p, a\} \in U_2^{p(i+1)}(K) \mod U_2^{p(p-1)}(K)\end{aligned}$$

となる. $(1, p)$ の項が本当にここのフィルター以下に落ちなければ, $(1, 1)$ の項よりも浅いフィルターにあることになる. ここで

$$\begin{aligned}gr_2^{p(i+1)}(K) &\xrightarrow{\cong} \Omega_F^1/\mathrm{B}_1 \oplus F/F^p \\ \frac{1}{i+1}\{1-\pi^{pi+p}a^p, a\} &\longmapsto \frac{1}{i+1}\bar{a}^p\frac{d\bar{a}}{\bar{a}}\end{aligned}$$

だから, $\bar{a} \notin F^p$ ならば $\bar{a}^p d\bar{a}/\bar{a}$ は Ω_F^1/B_1 で消えていない, つまり $gr_2^{p(i+1)}(K)$ 内で消えていない. よってこの $(1, p)$ の項が一番浅いフィルターにとどまっており, さらにこれが $\{\zeta_p, 1-\pi^i a\}$ は $gr_2^{p(i+1)}(K) \to gr_2^{e+p(i+1)}(K)$ の p 倍写像の核になり, それは B_2^1 の元である. このことが $gr_2^{e+p(i+1)}(K) \cong \Omega_F^1/\mathrm{B}_2^1 \oplus$ (何か) を導く.

(iv) $\{\zeta_p, 1-\pi^i a\} \quad (p+1 \leq i,\ p \nmid i)$ **について.**

この例は, $(m, n) = (1, 1)$ の方が浅いところにとどまるものである. (iii) と同様に計算すると, $p(i+1) > p^2 + i$ なので $(1, 1)$ の方が $U_2^{p^2+i}(K)$ でとどまっていればよい. そこでその項を計算すると,

$$\{1-\pi^{p+i}a, \pi^p\} = p\{1-\pi^{p+i}a, \pi\} = \frac{-p}{p+i}\{1-\pi^{p+i}a, a\}$$

で, $gr_2^{p^2+i}(K)$ は帰納法の仮定よりΩ_F^1と同型で,

$$gr_2^{p^2+i}(K) \xrightarrow{\cong} \Omega_F^1$$
$$p\{1-\pi^{p+i}a, a\} \longmapsto d\bar{a}$$

となっている. $\bar{a} \notin F^p$ならば$d\bar{a}$はΩ_F^1のなかで消えておらず, さらにこれが$gr_2^{p^2+i}(K) \to gr_2^{2p^2-p+i}(K)$ の p 倍写像の核になっていてそれはB_1^1であることがわかった. よって $gr_2^{2p^2-p+i}(K) \cong \Omega_F^1/\mathrm{B}_1^1$がわかった.

その他にも $\{\zeta_p, K^\times\}$ の元はいろんな種類があるが, それらも同様に計算していけばよい. しかしそのときに深いフィルターに落ちていくことをいうのは, 命題 1 の右辺に出てくる多くのシンボルについて一度に計算しなくてはならないので容易ではなく, そこをちゃんと調べるために K_q^M-exponential homomorphism や K_q^M-Norm 写像をうまく組み合わせて使う必要があった.

References

[B] Bloch,S., *Algebraic K-theory and crystalline cohomology*, Publ. Math. IHES **47** (1977), 187–268.

[BK] Bloch,S. and Kato,K., *p-adic etale cohomology*, Publ. Math. IHES **63** (1986), 107–152.

[G] Graham,J., *Continuous symbols on fields of formal power series*, Algebraic K-theory II, Lecture Notes in Math. **342** (1973), Springer-Verlag, Berlin, 474–486.

[Ka] Kato,K., *Residue homomorphisms in Milnor K-theory*, Galois groups and their representations (Ihara,Y., ed.), Adv. Stud. in Pure Math., vol. **2**, North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 153-172.

[Ku1] Kurihara,M., *Abelian extensions of an absolutely unramified local field with general residue field*, Inv. Math. **93** (1988), 451–480.

[Ku2] ———, *On the structure of the Milnor K-group of a certain complete discrete valuation field*, preprint.

[Ku3] ———, *The exponential homomorphism for the Milnor K-groups and an explicit reciprocity law*, preprint.

[N] Nakamura,J., *On the structures of the Milnor K-groups of some complete discrete valuation fields*, in preparation (K_2^Mについては 1996 年東京工業大学修士論文).