

## 類数が 3 で割れる二次体の特徴づけ

(東京都立大学理学研究科博士課程) 岸 康弘 (Yasuhiro Kishi)

### §0 序

どのような整数  $N$  に対しても, 類数が  $N$  で割れる虚二次体が無限に存在することは古くから知られていた (Nagel [6]). また実二次体についても,  $N = 3$  の場合に, そのようなものが無限に存在することが示された (Honda [4]). 以降, 類数が 3 で割れる二次体の無限族がいくつか与えられている (Hartung [2], Brinkhuis [1], Ohta [7] など). 今回, 類数が 3 で割れる二次体を二つのパラメータで特徴づけ, さらに, その上の 3 次不分岐アーベル拡大を与える 3 次多項式も特徴づけた (Kishi-Miyake[5]). §1 では主定理を述べるが, 証明は省略する. §2 では既存の無限族と主定理との関連について述べる. また, 実二次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  と虚二次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$  との関連についても少し述べておく.

### §1 主定理

有理数体  $\mathbb{Q}$  上の 3 次多項式  $g(Z)$  で以下の条件を満たすものを考える:

$$g(Z) = Z^3 - uwZ - u^2, \quad u, w \in \mathbb{Z}$$

但し,  $u$  と  $w$  は互いに素であり,  $4uw^3 - 27u^2$  は完全平方数でなく, さらに条件

- (i)  $3 \nmid w$
- (ii)  $3 \mid w, uw \not\equiv 3 \pmod{9}, u \equiv w \pm 1 \pmod{9}$
- (iii)  $3 \mid w, uw \equiv 3 \pmod{9}, u \equiv w \pm 1 \pmod{27}$

のうち、いずれか一つを満たす。

この多項式  $g(Z)$  の判別式  $D$  は

$$D = u^2 d, \quad d = 4uw^3 - 27u^2$$

である。したがって、 $g(Z)$  が  $\mathbb{Q}$  上既約ならば、最小分解体は  $\mathbb{Q}$  上  $S_3$ -拡大で、その最小分解体は二次体  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  を含む。

**主定理.** 上の諸条件を満たす  $g(Z)$  が  $\mathbb{Q}$  上既約ならば、 $g(Z) = 0$  の根は二次体  $k$  上 3 次の不分岐アーベル拡大を与える。逆に、類数が 3 で割れる二次体  $k$  とその上の 3 次不分岐アーベル拡大はすべてこの形で得られる。

**注意.** 証明の方針は、3 次多項式の根が作る体で、すべての素数が完全分岐しないように、その 3 次多項式の係数の条件を決定していく。従って、二次体  $k$  が実であるか虚であるかに関係なく結果が得られる。

## §2 部分族

まず、いくつかの無限部分族を紹介する。

**例 1.** (Honda [4]) 二つの整数  $m$  と  $n$  が次を満たすとする：(i)  $(m, 3n) = 1$ , (ii)  $d := 4m^3 - 27n^2$  は平方数にならない, (iii)  $m = (n + a^2)/a$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) の形で表されない。このとき、 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  の類数は 3 で割れる。

**証明.** 主定理で  $u = n^2$ ,  $w = m$  とすれば、この場合が得られる。□

**例 2.** (Hartung [2]) 平方因子を持たない整数  $m$  が次を満たすとする：(i)  $m \equiv 7 \pmod{12}$ , (ii)  $m = (n^2 - 4)/27$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) の形で表される。このとき、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$  の類数は 3 で割れる。

**証明.** この場合は、主定理で  $u = n^2$ ,  $w = 3$  としたものである。□

**例 3.** (Brinkhuis [1]) 整数  $m$  が  $n^3 - n^2$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) の形で表されないとする。そのとき、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-4m - 27m^2})$  の類数は 3 で割れる。

**証明.** これは、主定理で  $u = m$ ,  $w = -1$  としたものである。□

**例 4.** 互いに素な二つの整数  $u$  と  $w$  を次のようにとる: (i)  $d := 4uw^3 - 27u^2$  は平方数でない, (ii) 次の二つのうちいずれかを満たす:

$$(ii-1) \quad uw \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(ii-2) \quad 3 \nmid w, u \equiv w \equiv \pm 2 \pmod{5}.$$

このとき,  $Z^3 - uwZ - u^2$  は必ず既約になり, 従って,  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  の類数は 3 で割れる.

また, 特に  $u := a^4 p_1^{4\alpha_1 - 3} \cdots p_r^{4\alpha_r - 3}$ ,  $w := 4b$  ととれば, これは Ohta [7] の与えた部分族である.

このように以前から類数が 3 で割れる二次体の部分族が与えられてきた. これ以外にも, 何か面白い部分族はないだろうか. そこで次の例を考える.

**例 5.** 平方数でない整数  $D$  が次のように表されたとする:

$$(2.1) \quad 27b^2D = 4m^3 - a^2$$

但し,  $a, b, m$  は互いに素な 0 でない整数. このとき, 多項式  $f(X) = X^3 - 3mX - a$  が  $\mathbb{Q}$  上既約ならば,  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  の類数は 3 で割れる.

**証明.** これは, 主定理で  $u = a^2$ ,  $w = 3m$  とおいた場合である.  $\square$

式 (2.1) は次のように変形できる:

$$(2.2) \quad m^3 = \frac{a^2 + 27b^2D}{4} = N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})/\mathbb{Q}}\alpha, \quad \alpha = \frac{a + 3b\sqrt{-3D}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3D}).$$

従って, どんな  $D$  に対しても解  $a, b, m$  は存在する. 実は簡単な計算で次がわかる.

**補題 1.**

$$\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{-3D}) \text{ で立方数} \iff f(X) : \mathbb{Q} \text{ 上可約}$$

立方数ではないが, ノルムをとると立方数になる二次体の元は, 3 乗して初めて単項になるイデアル  $\mathfrak{a}$  に対する  $\alpha = \mathfrak{a}^3$  か, または,  $D < 0$  ならば基本単数  $\varepsilon$  に対する  $\alpha = \varepsilon^{3n \pm 1}$  である. ここで, 次の定理がある:

定理. (Herz [3]) 虚二次体  $k := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  に対して, 実二次体  $k' := \mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$  の類数, 基本単数をそれぞれ  $h', \varepsilon$  とする. このとき,  $k$  の類数が 3 で割れるための必要十分条件は, 次の条件のうち, 少なくともいずれかが成り立つことである:

$$(i) N_{k'/\mathbb{Q}} \varepsilon = 1, \quad Tr_{k'/\mathbb{Q}} \varepsilon \equiv \pm 2 \pmod{3} \quad (27)$$

$$(ii) Tr_{k'/\mathbb{Q}} \varepsilon \equiv 0 \pmod{3} \quad (9)$$

$$(iii) N_{k'/\mathbb{Q}} \varepsilon = -1, \quad Tr_{k'/\mathbb{Q}} \varepsilon \equiv \pm 4 \pmod{3} \quad (9)$$

$$(iv) 3 \mid h'.$$

もし実二次体  $k'$  の類数が 3 で割れなければ, 3 乗して初めて単項になるイデアルはない. しかしそのときはこの定理より, (i), (ii), (iii) の条件のどれかを満たしており, そして実際 (i) を満たしているときは  $\varepsilon$  を, (ii) を満たしているときは  $\varepsilon^2$  を, (iii) を満たしているときは  $\varepsilon^4$  を  $\alpha$  ととると, 式 (2.2) を満たしていることがわかる. つまり,  $k'$  の類数が 3 で割れないときは, 必ず基本単数から  $k$  上の 3 次不分岐アーベル拡大が作られる訳である. 鏡像定理 (Scholz [8]) より, 虚二次体  $k$  のイデアル類群の 3-rank と実二次体  $k'$  のイデアル類群の 3-rank との差は多くても 1 であるが, その差が基本単数と関係しているということが, この例からもわかる.

## REFERENCES

- [1] J. Brinkhuis, *Normal Integral Bases and the Spiegelungssatz of Scholz*, Acta Arithmetica **69** (1995), 1–9.
- [2] P. Hartung, *Explicit Construction of a Class of Infinitely Many Imaginary Quadratic Fields Whose Class Number is Divisible by 3*, J. Number Theory **6** (1974), 279–281.
- [3] C. S. Herz, *Seminar on Complex Multiplication*, VII. Construction of class fields, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

- [4] T. Honda, *On Real Quadratic Fields whose Class Numbers are Multiples of 3*, J. Reine Angew. Math. **233** (1968), 101–102.
- [5] Y. Kishi and K. Miyake, *Characterization of the Quadratic Fields whose Class Numbers are Divisible by Three*, Tokyo Met. Univ. Math. Pre. Ser. (1997), no. 7.
- [6] Tr. Nagel, *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1** (1922), 140–150.
- [7] K. Ohta, *On Algebraic Number Fields whose Class Numbers are Multiples of 3*, Bull. Fac. Gen. Ed. Gifu Univ. **1981** (1982), 51–54.
- [8] A. Scholz, *Über die Beziehung der Klassenzahl quadratischer Körper zueinander*, J. Reine Angew. Math. **166** (1932), 201–203.