数理解析研究所講究録
1026 巻 1998 年 104-109

G- 関数と数論

京大数理研 永田 誠 (MAKOTO NAGATA)

G- 関数についての紹介を述べる。

歴史的には G- 関数は多項式近似の応用として超越数論（無理数論）の一部としてとらえられていたものである。近年微分方程式との関係が知られ、また G- 関数は「代数関数を含むクラス」であることに注目すると、微分方程式（の解）の中の代数関数の位置付けが見い出されるかもしれないと期待されるものである。無理数論の応用としては簡単な不定方程式への応用などがある（§2参照）。しかし今後の発展が期待されるところが大きいと思われる。

§1 : G- 関数

G- 関数は歴史的には Siegel によって以下の様に定義された。[9]

K を有限次 $\mathbb{Q}$ 上代数体とする。

定義 1.1.

f が G- 関数とは、まず

(0) $$f \in K[[x]] \quad であり$$

$f = \sum_{x=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_i \in K$ としたとき $C > 0$ なる定数が存在し、各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

(1) $$a_i とその共役が C^i を超えない、$$

(2) $$a_0, a_1, \ldots, a_i の共通分母が C^i を超えない。$$

さらに

(3) $$f は K(x) 係数の線形微分方程式を満たす。$$

便宜上、後に改めて定義しなおすが、G- 関数とは

線形微分方程式の原点での解をベキ級数で表わしたときそのベキ級数の係数の（分子、分母とも）「大きさ」が等比数列で押さえられるもの

である。

G- 関数の例.

- 代数関数。
- polylogarithms: $L_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i/i^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. 特に $L_1(x) = -\log(1-x)$.
- Gauss の超幾何級数:

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i. $$

ここで $(\alpha)_i = \Gamma(\alpha + i)/\Gamma(\alpha)$ とし、パラメータ α, β, γ は有理数とする。

一般にパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ が有理数ならば ${}_nF_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots; x)$ もまた G- 関数である。$(n \in \mathbb{N})$

§2 : 特殊値その1

次の線形微分方程式を考える：

(eq.1) $$\frac{d}{dx}\underline{y} = A\underline{y}.$$

ここで $A \in M_n(K(x))$ とする。

この微分方程式の解について次の特殊値についての性質が知られている。

定理 2.1. *[6],[3]*
(eq.1) のベクトル解 $\underline{y} = {}^t(y_1(x), \dots, y_n(x)) \in (K[[x]])^n$ を G- 関数とする。さらに $y_1(x), \dots, y_n(x)$ を $K(x)$ 上線形独立とする。このとき任意の絶対値が十分大きい有理整数 q に対して、$y_1(1/q), \dots, y_n(1/q)$ は K 上線形独立。

簡単な応用. m を 2 以上の有理整数とする。次の不定方程式

$$X^m + Y^m = (YZ)^m$$

は $|\, Z \,| \gg 0$ で $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に解を持たない。
なぜなら、$K = \mathbb{Q}(e^{2\pi\sqrt{-1}/m}), y_1 = 1, y_2 = \sqrt[m]{1 - x^m} = {}_2F_1(-1/m, 1, 1; x^m)$ とおき、また

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^{m-1}/(x^m - 1) \end{pmatrix}$$

とおく。もし十分大な Z で解を持つならば、

$$\sqrt[m]{1 - (\frac{1}{Z})^m} = \frac{X}{YZ} \in K.$$

これは定理 2.1 に矛盾する。 □

上の定理は Galŏchikin と Chudnovsky 等の結果であるが、これは Chudnovsky 等の次の結果によるものである：

定理 2.2. *[3]*
(eq.1) のベクトル解について、$y_1(x), \dots, y_n(x)$ が G- 関数、かつ $K(x)$ 上線形独立とする。このとき (eq.1) は *G-operator.*

注意 *2.3.* Galŏchikin [6] の結果は上の "G-operator" という仮定が必要である。
次に G-operator の定義をする。

§3 ：記法

初めに v を K 上正規化された付値として、すなわち、

$$\begin{cases} |\, p \,|_v := |\, p \,|^{-\frac{[K_v:\mathbb{Q}_p]}{[K:\mathbb{Q}]}} & v \mid p, \ (p: \text{素数}) \\ |\, \xi \,|_v = |\, \xi \,|^{\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}} & \xi \in K, \quad v \mid \infty. \end{cases}$$

$v \nmid \infty$ と $f = \sum_{i=0}^{N} f_i x^i \in K[x]$ に対して、

$$|\, f \,|_v := \max_{i=0,\dots,N} |\, f \,|_v \,.$$

$f, g (\neq 0) \in K[x]$ に対して、

$$|\, \frac{f}{g} \,|_v := \frac{|\, f \,|_v}{|\, g \,|_v} : \quad \text{well-defined. (Gauss's norm)}$$

$M = (m_{i,j}) \in M_n(K(x))$ に対して、

$$|\, M \,|_v := \max_{i,j} |\, m_{i,j} \,|_v \,.$$

これは擬付値となる。
I を単位行列、A を (eq.1) の係数行列として、行列の列を

$$A_i := \frac{1}{i!}\, {}^t(\frac{d}{dx} + {}^tA)^i I \in M_n(K(x)) \quad i = 0, 1, \dots$$

とおく。これは任意の (eq.1) の解 $\underline{y}$ に対して

$$\frac{1}{i!}\left(\frac{d}{dx}\right)^i \underline{y} = A_i \underline{y}$$

を満たす行列である。

ここで (eq.1) の係数行列 A の "size" を

$$\sigma(A) := \overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{v\nmid\infty} \frac{1}{m} \max_{i\leq m} \log\max(1, | A_i |_v)$$

とおく。ここで $\sum_{v\nmid\infty}$ は先のすべての $v \nmid \infty$ なるものをわたるとする。

A の "global radius" を

$$\rho(A) := \sum_{v\nmid\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \max_{i\leq m} \log\max(1, | A_i |_v)$$

とおいておく。

定義 3.1. *$d/dx - A$ が G-operator とは $\sigma(A) < \infty$ のときをいう。*

次にベキ級数についての「大きさ」を定義する。

$M = (m_{i,j}) \in M_n(K)$ に対して、

$$| M |_v := \max_{i,j} | m_{i,j} |_v .$$

$Y = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i x^i \in M_n(K[[x]])$ に対して、Y の "size" を、

$$\sigma(Y) := \overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{v} \frac{1}{m} \max_{i\leq m} \log\max(1, | Y_i |_v),$$

Y の "global radius" を

$$\rho(Y) := \sum_{v} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \max_{i\leq m} \log\max(1, | Y_i |_v)$$

とおく。ここで $\sum_v$ は先のすべての正規化された付値をわたるとする。

これらの記法を用いて改めて G- 関数を定義しなおすと、

定義 3.2.

$Y \in M_n(K[[x]])$ が G- 関数とは、$\sigma(Y) < \infty$ なるときという。

上の定義と先の G- 関数の定義 1.1 の (1), (2) は同値である。

注意 *3.3.* (収束半径との関係)

$Y \in M_n(K[[x]])$ と付値 v に対し、

$$R_v(Y) := \underline{\lim_{i\to\infty}} | Y_i |_v^{-1/i}$$

とおくと、

$$\rho(Y) = \sum_v \log\max(1, \frac{1}{R_v(Y)})$$

が成立し、従って、$\rho(Y) < \infty$ であれば有限個の v を除いて $R_v(Y) > 1 - \epsilon$ (ϵ は十分小なる実数) である。

以上の記法を用いて Chudnovsky の結果を再度述べると

定理.

$\underline{y} = {}^t(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \in (K[[x]])^n$ を (eq.1) のベクトル解とする。このとき、各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について $\sigma(y_i(x)) < \infty$ でありさらに $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ が K 上線形独立ならば、$\sigma(A) < \infty$.

さて、この逆についての問題が自然に考えられるが、それを次に述べる。

§4 : André 等の仕事

まず微分方程式

$$(\text{eq.1}) \qquad (\frac{d}{dx} - A)X = 0, \quad X\text{は行列解}$$

について、原点が高々確定特異点であり、その指数が有理数、さらに Frobenius 法を用いて解を一意に求めることが出来る、と仮定する。形式化すると、

$$(\text{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} xA \in M_n(K[x]_{(x)}), \\ A \text{ の留数の固有値すべてが有理数、} \\ \text{それら固有値の差はゼロ以外の有理整数ではない。} \end{array} \right\}$$

ここで $K[x]_{(x)}$ は $K[x]$ の (x) での局所環、A の留数とは A を $M_n(K((x)))$ の元とみてとする。

このとき (eq.1) の行列解は次の様に書けることが知られている：

命題 4.1. (eq.1) の行列解 X で

$$X = Yx^{\text{Res}\,A} = Y \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\text{Res}\,A \log x)^i$$

となるような $Y = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i x^i \in GL_n(K[[x]])$、初期値 $Y_0 = I$ 、が存在する。

この Y を (eq.1) の行列解の the uniform part という。

この Y について、

定理 4.2. *[1]*

仮定 (A) の下で、$\sigma(A) < \infty$ ならば $\sigma(Y) < \infty$.

さらに

定理 4.3. *[1],[2],[7]*

仮定 (A) の下で、$\sigma(A), \rho(A), \sigma(Y), \rho(Y)$ の有限性は同値である。

注意 *4.4.* (注意 3.3 と§6参照)

上の定理は各々が残りの一つを用いて1次式で上から評価される。

§5 : 特殊値その2

再度特殊値について考察する。

微分方程式の原点が特異点のとき、その解は一般に一変数のベキ級数では表わせない。すなわち定理 2.1 はすべての解についての性質を記述しているのではない。しかし仮定 (A) の下では微分方程式を少し変形するとすべてのベクトル解 $\underline{y}$ は $(K[[x]][\log(x)])^n$ の元で表わされる。このことを利用するとすべての解について次を得ることができる。(次章注意 6.5 参照)

定理 5.1.

仮定 (A) の下で微分方程式 (eq.1) を適当に変形したものについて、任意の非自明なベクトル解 $\underline{y} = {}^t(y_1(x, \log(x)), \ldots, y_n(x, \log(x))) \in (K[[x]][\log(x)])^n$ について、$y_1(x, \log(x)), \ldots, y_n(x, \log(x))$ が $K(x, \log(x))$ 上線形独立とする。さらに $y_i(x, \log(x))$ の $\log(x)$ の多項式とみたときの係数 $\in K[[x]]$ がすべて G-関数と

する。このとき ξ をある次数以上の K に含まれない代数的数、$\underline{y}$ をある非自明な解としたとき、任意の絶対値が十分大きい有理整数 q に対して、$y_1(1/q, \log(\xi)), \dots, y_n(1/q, \log(\xi))$ は $K(\xi)$ 上線形独立。

§6：その他

上までの内容はすべて原点のまわりについての話であった。最近変数変換について少し理解できたことがあるので最後にそれを述べる。

$A(x) \in M_n(K(x)), f(x) \in K(x) \setminus K$ に対して、

定理 6.1.
$d/dx - A(x)$ が G-operator ならば、$d/dx - (df(x)/dx)A(f(x))$ も G-operator.

注意 *6.2.*
$f(x) = x - \xi$, $\xi \in K$ の場合は知られている。[5]

系 6.3.
それぞれ $d/dx - A(x)$, $d/dx - (df(x)/dx)A(f(x))$ が仮定 (A) を満たすとする。このとき次を満たす定数 $C_1, C_2 < \infty$ が存在する：
Y_1, Y_2 をそれぞれ $d/dx - A(x)$, $d/dx - (df(x)/dx)A(f(x))$ の the uniform part とする。このとき、$\rho(Y_2) \le C_1\rho(Y_1) + C_2$.

注意 3.3 より、global radius は各素点での収束半径の逆数の積に対応しているのであるから特に $f(x)$ が一次分数変換の時を考えれば仮定 (A) の下では無限遠点もこめて G- 関数については、

ある点での uniform part の収束半径を他の点での uniform part の収束半径を用いて「上下から」押さえることができる。

この結果は多変数の偏微分方程式が G-operator となる必要条件がその偏微分方程式に関連する一変数の微分方程式で記述できるということが最近分かりその特別な場合として得られた。それについて定理として言及しておく。

まず、$\underline{x} = (x_1, \dots, x_l)$ を変数、$\varphi : K[\underline{x}] \to K(y)$ $(1 \mapsto 1)$: 環準同型とし、自然に $\varphi : M_n(K[\underline{x}]_{\mathrm{Ker}\,\varphi}) \to M_n(K(y))$: 準同型とする。また多変数の Gauss's norm を一変数と同様とする。

定理 6.4. (多変数 G-operator の必要条件)
$\delta := a_1\partial_{x_1} + \cdots + a_l\partial_{x_l}$, $a_i \in K[\underline{x}]$ とし、$A \in M_n(K[\underline{x}]_{\mathrm{Ker}\,\varphi})$ とする。さらに $d/dy \circ \varphi = g\varphi \circ \delta$ なる $g \in K(y)$ が存在するとする。このとき

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{v\nmid\infty} \frac{1}{m} \max_{i \le m} \log \max(1, \left| \frac{1}{i!}\, {}^t(\delta + {}^tA)^i I \right|_v) < \infty$$

ならば、$\sigma(g\varphi(A)) < \infty$.

注意 *6.5.* §5での結果は

$$(\frac{d}{dx} - A(x))X(x, \log(x)) = 0$$

なる一変数微分方程式の代りに

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y} - A(x))X(x, \log(x)) = 0$$

という偏微分方程式をして考察したもの [8] の応用である。

References

1. Y. André, *G-functions and Geometry*, Max-Planck-Institut, Bonn, 1989.
2. E. Bombieri, *On G-functions*, Recent progress in analytic number theory **2** (1981), Academic Press, New York, 1 – 67.
3. D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky., *Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions.*, Lect. Notes in Math. **1135** (1985), Springer-Verlag, Berlin, 9–51.
4. B. M. Dwork and A. J. Van der Poorten, *The Eisenstein constant*, Duke Math. J. **65** (1992), 23–43.

5. B. Dwork, G. Gerotto, F. J. Sullivan, *An Introduction to G-functions*, Annals of Math. Studies **133** (1994), Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
6. A. I. Galočhkin, *Estimates from below of polynomials in the values of analytic functions of a certain class*, Math. USSR Sbornik **24** (1974), 385 – 407, Original article in Math. Sbornik **95 (137)** (1974), 396 – 41 7.
7. M. Nagata, *A generalization of the sizes of differential equations and its applications to G-function theory*, 東京工業大学プレプリントシリーズ、投稿中.
8. ———, *Regular singularities in G-function theory*, Analytic Number Theory, London Math. Soc. Lect. Note **247** (1997), 321–336.
9. C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. nr.1 (1929).