数理解析研究所講究録
1027巻 1998年 126-134

行列 Hölder 不等式

北星学園大　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)
茨城大理　　日合文雄 (Fumio Hiai)

§0. はじめに

有名な不等式の1つとして，Cauchy-Schwarz 不等式を一般化した Hölder 不等式がある．Hölder 不等式を一番簡単な2次元ベクトルについて書くと，$1<p,q<\infty$, $1/p+1/q=1$ のとき

$$(|a|^p+|b|^p)^{1/p}(|c|^q+|d|^q)^{1/q}\geq|ac+bd| \qquad (a,b,c,d\in\mathbb{C}) \tag{1}$$

となる．これを $(|a|^p+|b|^p)^{1/p}$ の変分表示として言い表すと

$$(|a|^p+|b|^p)^{1/p}=\max\{|ac+bd|:|c|^q+|d|^q=1\}. \tag{2}$$

この変分表示から $(a,b)\mapsto(|a|^p+|b|^p)^{1/p}$ が凸関数であることがわかる．また，Hölder 不等式を

$$(a_1+a_2)^{1/p}(b_1+b_2)^{1/q}\geq a_1^{1/p}b_1^{1/q}+a_2^{1/p}b_2^{1/q} \qquad (a_1,b_1,a_2,b_2\geq 0) \tag{3}$$

と書くと，これは $(a,b)\mapsto a^{1/p}b^{1/q}$ が $a,b\geq 0$ の凹関数であることを意味する．このように Hölder 不等式をいくつかの側面から見ることができる．以下で，(1)–(3) の行列版がどのような形で成立できるか，あるいは成立できないかを解説する．詳しい内容は [4] に出版されている．

§1. 知られた結果

(1-1) ノルム Hölder 不等式 行列 (また作用素) A の Schatten p-ノルム $\|A\|:=(\mathrm{Tr}\,|A|^p)^{1/p}$ に関する Hölder 不等式

$$\|AB\|_1\leq\|A\|_p\|B\|_q \tag{4}$$

はよく知られている．行列 A の特異値 (i.e. $|A|$ の固有値) を $s_1(A)\geq s_2(A)\geq\cdots\geq s_n(A)$ とすると，Horn のマジョリゼーション

$$\begin{cases}\prod_{i=1}^k s_i(AB)\leq\prod_{i=1}^k s_i(A)s_i(B) & (k=1,\ldots,n-1)\\ \prod_{i=1}^n s_i(AB)=\prod_{i=1}^n s_i(A)s_i(B)\end{cases}$$

が成立する．このマジョリゼーションにベクトルに対する Hölder 不等式を適用すれば，上の (4) が得られる．(マジョリゼーション理論について [2, 3, 7, 9] が詳しい．) 従って，不等式 (4) は行列 Hölder 不等式とは言い難い．

(1-2) Lieb と Ando の凹性 Lieb [8] は次を示した (Wigner-Yanase-Dyson-Lieb の凹性と呼ばれる)：行列 X を任意に固定して

(5) $$(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(X^* A^{1/p} X B^{1/q}) \text{ は行列 } A, B \geq 0 \text{ の凹関数.}$$

これを Ando [1] の流儀で述べると

(6) $$(A,B) \mapsto A^{1/p} \otimes B^{1/q} \text{ は行列 } A, B \geq 0 \text{ について作用素凹.}$$

実際，$M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ を内積 $\langle X, Y\rangle := \mathrm{Tr}\, Y^* X$ を入れた $M_n(\mathbb{C})$ 上に $(A \otimes B)X := AXB^t$ として表現すると

$$\langle (A^{1/p} \otimes (B^t)^{1/q})X, X\rangle = \mathrm{Tr}(X^* A^{1/p} X B^{1/q})$$

だから，(5) と (6) は同等である．これらは (3) の行列版と見ることができるが，Tr をとったり，行列積の代わりにテンソル積であるところがやや弱い．

(1-3) 行列 Cauchy-Schwarz 不等式 $p = q = 2$ のとき，(1) は

$$\begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2 & \overline{ac + bd} \\ ac + bd & |c|^2 + |d|^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

と言い換えることができる．この不等式は行列成分をもつ 2×2 行列についても同様に成立する．つまり，任意の行列 A, B, C, D に対し

$$\begin{bmatrix} A^*A + B^*B & A^*C^* + B^*D^* \\ CA + DB & CC^* + DD^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C^* \\ B & D^* \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & C^* \\ B & D^* \end{bmatrix} \geq 0 .$$

これから次がいえる：

(7) $$CC^* + DD^* = I \ (\text{または} \leq I) \ \Rightarrow \ A^*A + B^*B \geq |CA + DB|^2$$

(よって $(A^*A + B^*B)^{1/2} \geq |CA + DB|$ も成立)．ここで

$$\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & I \end{bmatrix} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ A \geq C^*C$$

を使った．さらに，$C := (A^*A + B^*B)^{-1/2}A^*$, $D := (A^*A + B^*B)^{-1/2}B^*$ とすると

$$CC^* + DD^* = I, \quad (A^*A + B^*B)^{1/2} = CA + DB$$

が成立する (ただし A^*A+B^*B が可逆でないときは少し修正が必要). 従って, $p=q=2$ のとき, (1) と (2) の行列版はうまく行く. つまり, 行列 Cauchy-Schwarz 不等式は完全な形で成立する.

§2. 行列 Hölder 不等式 (否定的結果)

(2-1) 上の (7) を一般の $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$ の場合にそのまま当てはめると

$$(8) \qquad |C^*|^q+|D^*|^q=I \ \Rightarrow\ (|A|^p+|B|^p)^{1/p} \ge |CA+DB| \ ?$$

となるが, これは $p=q=2$ の (7) の場合を除いて成立しない. 実際, 階数 1 の射影

$$P:=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad Q_t:=\begin{bmatrix}t^2 & t\sqrt{1-t^2}\\ t\sqrt{1-t^2} & 1-t^2\end{bmatrix} \quad (0<t<1)$$

について

$$P+Q_t=U_t\begin{bmatrix}1+t & 0\\ 0 & 1-t\end{bmatrix}U_t, \quad \text{ここで } U_t:=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{1+t}{2}} & \sqrt{\frac{1-t}{2}}\\ \sqrt{\frac{1-t}{2}} & -\sqrt{\frac{1+t}{2}}\end{bmatrix}.$$

$C_t:=(P+Q_t)^{-1/2}P$, $D_t:=(P+Q_t)^{-1/2}Q_t$ とすると, $C_tP+D_tQ_t=(P+Q_t)^{1/2}$ であり, $C_tC_t^*$ と $D_tD_t^*$ は直交する階数 1 射影だから $|C_t^*|^q+|D_t^*|^q=I$. $(P+Q_t)^{1/p}-(P+Q_t)^{1/2}$ の固有値 $(1\pm t)^{1/p}-(1\pm t)^{1/2}$ が両方とも非負になるのは $p=2$ のときに限る.

(2-2) 行列 Hölder 不等式との関連で, 行列 $A,B\ge 0$ と $1<p\le\infty$ に対する $(A^p+B^p)^{1/p}$ の振舞いが問題になる. ただし $p=\infty$ での $(A^p+B^p)^{1/p}$ は

$$A\vee B:=\lim_{p\to\infty}(A^p+B^p)^{1/p}=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{A^p+B^p}{2}\right)^{1/p}$$

と解釈する (上の 2 つ目の極限は単調増大である). $(A,B)\mapsto(A^p+B^p)^{1/p}$ の作用素凸性は成立しないが, $(A,B)\mapsto \mathrm{Tr}(A^p+B^p)^{1/p}$ の凸性はどうであろうか. つまり, $A_j,B_j\ge 0$ に対し

$$(9) \qquad \mathrm{Tr}((A_1+A_2)^p+(B_1+B_2)^p)^{1/p} \le \mathrm{Tr}(A_1^p+B_1^p)^{1/p}+\mathrm{Tr}(A_2^p+B_2^p)^{1/p} \ ?$$

$p=2$ のときは (1-3) から正しいことがわかる. 直接に

$$\mathrm{Tr}(A^*A+B^*B)^{1/2}=\left\|\begin{bmatrix}A & 0\\ B & 0\end{bmatrix}\right\|_2$$

からも明らかである．いま，$A_1 = B_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 := \begin{bmatrix} 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon \end{bmatrix}$ とすると

$$\text{(9) の右辺} = 2^{1+1/p} + 4\varepsilon,$$

$$\text{(9) の左辺} = \left(\alpha_1^p + \alpha_2^p + \frac{\alpha_1^p - \alpha_2^p}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)^{1/p} + \left(\alpha_1^p + \alpha_2^p - \frac{\alpha_1^p - \alpha_2^p}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)^{1/p}.$$

ここで $\alpha_1 := 1 + \varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}$, $\alpha_2 := 1 + \varepsilon - \sqrt{1+\varepsilon^2}$. 上の両辺の式について ε のオーダーを比較すると，任意の $2 < p < \infty$ に対し $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき (9) が成立しないことがわかる．従って，$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p}$ の凸性は $2 < p < \infty$ で成立しない．Carlen-Lieb [5] も同じ結論を得ている．関連して Carlen-Lieb は，$0 < p < 1$ の場合に $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p}$ の凹性を示している (詳しくは §4)．$p = \infty$ でも凸性は成立しないが，$1 < p < 2$ の場合の凸性は未解決のままである．

(2-3) 作用素の関数の凸性を示すために，その変分表示を与えることがよく行われる．$1 < p \le \infty$, $A, B \ge 0$ に対する $\mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p}$ の変分表示として，次のものが自然に考えられる：

$$V_p(A, B) := \max\{\mathrm{Tr}\,|CA + DB| : |C^*|^q + |D^*|^q \le I\},$$

$$\tilde{V}_p(A, B) := \max\{\mathrm{Tr}\,|CA + DB| : |C^*|^q + |D^*|^q = I\}.$$

しかし，(2-2) の結果として，$2 < p \le \infty$ のとき $\mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p} = V_p(A, B)$ あるいは $\mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p} = \tilde{V}_p(A, B)$ が一般に成立することは不可能である．さらに，(2-1) の P, Q_t を用いて $\mathrm{Tr}(P + Q_t)^{1/p} = (1+t)^{1/p} + (1-t)^{1/p}$, $V_p(P, Q_t)$, $\tilde{V}_p(P, Q_t)$ を比較すると，次のことが示される：

(i) 任意の $2 \le p \le \infty$ に対して，$V_p(P, Q_t) = \tilde{V}_p(P, Q_t) = V_2(P, Q_t)$.

(ii) 任意の $2 < p < \infty$ に対して，$0 < t < 1$ を動かすと $\mathrm{Tr}(P + Q_t)^{1/p} > V_p(P, Q_t)$ と $\mathrm{Tr}(P + Q_t)^{1/p} < V_p(P, Q_t)$ の両方が起る．

これから，$2 < p < \infty$ のとき，Tr つきの Hölder 不等式

$$|C^*|^q + |D^*|^q = I \;\Rightarrow\; \mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p} \ge \mathrm{Tr}\,|CA + DB| \;? \tag{10}$$

も否定的であることがわかる．$1 < p < 2$ のとき，$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p}$ の凸性が正しいとしても，変分表示を通して証明することは望みがないであろう．

§3. 行列 Hölder 不等式 (肯定的結果)

§2 の否定的結果から行列 Hölder 不等式についてかなり悲観的にならざるを得ないが，それでも以下に示すような結果を得ることができた．しかし，まだ改良の余地が残されているであろう．

まず，簡単な注意を与えておこう．$A=U|A|$, $B=V|B|$ を極分解とし (U,V はユニタリ行列)，$C_1:=CU$, $D_1:=DV$ とすると

$$|C^*|=|C_1^*|,\quad |D^*|=|D_1^*|,\quad |CA+DB|=|C_1|A|+D_1|B||\,.$$

これから，(8) や (10) のような問題を考えるとき，$A,B\ge 0$ としても一般性を失わない．

(3-1) 定理. $2\le p,q<\infty$, $1<r\le\infty$, $1/p+1/q=1-1/r$, $A,B\ge 0$ のとき，$0\le\alpha\le 1$, $|C^*|^q+|D^*|^q\le I$ ならば

$$(A^p+B^p)^{1/p}\ge|\alpha^{1/r}CA+(1-\alpha)^{1/r}DB|^2\,.$$

この証明には，次の不等式が使われる： $1<p<\infty$, $0\le\alpha\le 1$, $A,B\ge 0$ に対して

$$(A^p+B^p)^{1/p}\ge\alpha^{1-1/p}A+(1-\alpha)^{1-1/p}B\,. \tag{11}$$

上の定理の不等式は (8) と比べて，スカラー α で水増ししているところと，$1<p<2$ が除外されているところが弱くなっている．$r\to\infty$ とすれば $\alpha^{1/r},(1-\alpha)^{1/r}\to 1$ となるが，$p,q\to 2$ で Cauchy-Schwarz の場合に近づいてしまう．いずれにしろ，(8) が成立しない以上，どこかを弱くしなければならない．

(3-2) 定理. $1<p,q<\infty$, $1/p+1/q=1$ のとき，$A,B,C,D\ge 0$, $C^q+D^q\le I$ ならば

$$\mathrm{Tr}(A^p+B^p)^{1/p}\ge\mathrm{Tr}(CA+DB)\,.$$

この不等式も (10) と比べて，$C,D\ge 0$ に制限しているのと，右辺が $\mathrm{Tr}\,|CA+DB|$ の代わりに $\mathrm{Tr}(CA+DB)$ であるのが弱くなっている．$A,B,C,D\ge 0$ でも一般には $\mathrm{Tr}\,|CA+DB|>\mathrm{Tr}(CA+DB)$ であることに注意する．$C,D\ge 0$ を対角行列にとって右辺を最大化すると，次が得られる．

(3-3) 系. $1<p<\infty$, $A=[a_{ij}]\ge 0$, $B=[b_{ij}]\ge 0$ のとき

$$\mathrm{Tr}(A^p+B^p)^{1/p}\ge\sum_{i=1}^n(a_{ii}^p+b_{ii}^p)^{1/p}\,. \tag{12}$$

実際はもっと強く，次の弱マジョリゼーションが成立する： $\vec{\lambda}(\cdot)$ を固有値を並べたベクトルとすると

$$\vec{\lambda}((A^p+B^p)^{1/p})\succ_w((a_{11}^p+b_{11}^p)^{1/p},\ldots,(a_{nn}^p+b_{nn}^p)^{1/p})\,.$$

従って，(12) を少し拡張して，$1<p<\infty$, $1/p\le r<\infty$ のとき

$$\mathrm{Tr}(A^p+B^p)^r\ge\sum_{i=1}^n(a_{ii}^p+b_{ii}^p)^r$$

が成立する．

(3-4) 定理. $1 < p \le 2$, $2 \le q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $A, B \ge 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\max\{\mathrm{Tr}(CA+DB) : C, D \ge 0,\ C^q + D^q \le I\} \\
&\quad \le \begin{cases} \mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p} \\ V_p(A,B) \end{cases} \\
&\quad \le \max\{\mathrm{Tr}\,|CA+DB| : \alpha^{1-2/q}CC^* + (1-\alpha)^{1-2/q}DD^* \le I\,(0 \le \alpha \le 1)\} \\
&\quad \le \min\Big\{\sum_{i=1}^n (\|Ae_i\|^p + \|Be_i\|^p)^{1/p} : \{e_i\} \text{ は正規直交基底}\Big\}.
\end{aligned}$$

さらに，次の弱マジョリゼーションも成立する：$1 < p \le 2$, $A, B \ge 0$ のとき，任意の正規直交基底 $\{e_i\}$ に対して

$$\vec{\lambda}(A^p + B^p)^{1/p}) \succ^w (\|Ae_1\|^p + \|Be_1\|^p)^{1/p}, \dots, (\|Ae_n\|^p + \|Be_n\|^p)^{1/p}).$$

従って，$1 < p \le 2$, $0 < r \le 1/p$ のとき

$$\mathrm{Tr}((A^p + B^p)^r) \le \sum_{i=1}^n (\|Ae_i\|^p + \|Be_i\|^p)^r$$

が成立する．(弱マジョリゼーション $\succ_w$ と $\succ^w$ については [2, 9] を見よ．)

§4. Carlen-Lieb の結果

Carlen-Lieb が $0 < p < 1$ の場合に次の結果を示し，$1 < p < \infty$ の場合を問題にしていることを聞いたことが，行列に対する Hölder 型不等式を研究したきっかけであった．

(4-1) 定理. (Carlen-Lieb [5]) $0 < p < 1$ のとき，$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p}$ は $A, B \ge 0$ について凹関数である．

この証明は下で説明する Epstein の結果に帰着させれば容易である．実際，$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} := \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_\pm := (\mathbf{I} + \mathbf{S})/2$ とすると，$\mathbf{P}_\pm$ は直交する射影であり

$$\begin{bmatrix} A^p + B^p & 0 \\ 0 & A^p + B^p \end{bmatrix} = \mathbf{A}^p + \mathbf{S}\mathbf{A}^p\mathbf{S} = 2(\mathbf{P}_+\mathbf{A}^p\mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_-\mathbf{A}^p\mathbf{P}_-)$$

であるから

$$\begin{bmatrix} (A^p + B^p)^{1/p} & 0 \\ 0 & (A^p + B^p)^{1/p} \end{bmatrix} = 2^{1/p}((\mathbf{P}_+\mathbf{A}^p\mathbf{P}_+)^{1/p} + (\mathbf{P}_-\mathbf{A}^p\mathbf{P}_-)^{1/p}).$$

よって

$$\mathrm{Tr}(A^p + B^p)^{1/p} = 2^{1/p-1}(\mathrm{Tr}(\mathbf{P}_+\mathbf{A}^p\mathbf{P}_+)^{1/p} + \mathrm{Tr}(\mathbf{P}_-\mathbf{A}^p\mathbf{P}_-)^{1/p})$$

となり，下の定理に帰着する．

(4-2) 定理. (Epstein [6]) $0 < p < 1$, $B \geq 0$ のとき，$A \geq 0 \mapsto \mathrm{Tr}(BA^pB)^{1/p}$ は凹関数である．

これを証明するには，$A, B \geq 0$ が可逆で $H = H^*$ のとき，$x = 0$ の近くで

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{Tr}(B(A + xH)^p)B)^{1/p} \leq 0$$

を示せばよい．そのために

$$f(z) := \mathrm{Tr}(B(zA + H)^pB)^{1/p}$$

を考える．R を十分大きくとると，$f(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [-R, R]$ で解析的であり，$f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$, $f(\mathbb{C}^-) \subset \mathbb{C}^-$ であることが証明される ($\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$ は上，下半平面)．つまり，$f(z)$ は Pick (または Herglotz) 関数で ∞ の近傍で解析接続できる．有名な Pick 関数の積分表示より，$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, $[-R, R]$ 上の有限測度 ν が存在して

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-R}^{R} \frac{1 + tz}{t - z}\, d\nu(t)\,.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(B(A + xH)^pB)^{1/p} &= xf(x^{-1}) \\ &= \alpha x + \beta + \int_{-R}^{R} \frac{x(x + t)}{xt - 1}\, d\nu(t)\end{aligned}$$

であるから，$x = 0$ の近くで

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{Tr}(B(A + xH)^pB)^{1/p} = -2\int_{-R}^{R} \frac{t^2 + 1}{(1 - xt)^3}\, d\nu(t) \leq 0\,.$$

§5. 固有値積の Hölder 不等式

Hölder 不等式 (3) をそのまま行列不等式に拡張することは無理である．$A^{1/2}B^{1/2}$ の代わりに $B^{1/4}A^{1/2}B^{1/4}$ を考えても，$B \geq 0 \mapsto B^{1/4}A^{1/2}B^{1/4}$ は作用素凹でない．しかし，固有値をとることにより，満足すべき Hölder 型不等式を得ることができた．

(5-1) 行列 $A, B \geq 0$ に対して AB の固有値を大きい順に並べて $\lambda_1(AB) \geq \lambda_2(AB) \geq \cdots \geq \lambda_n(AB)$ とする．$\lambda_i(AB) = \lambda_i(B^{1/2}AB^{1/2})$ に注意する．$1 \leq p, q < \infty$, $A_j, B_j \geq 0$ のとき，最小固有値 $\lambda_n(\cdot)$ について

$$\lambda_n((A_1^p + A_2^p)^{1/p}(B_1^q + B_2^q)^{1/q})^{pq/(p+q)} \geq \lambda_n(A_1B_1)^{pq/(p+q)} + \lambda_n(A_2B_2)^{pq/(p+q)}$$

を (11) を使って示すことができる．これに反対称テンソル積の方法を適用し，$A \geq 0 \mapsto \wedge^k A^{1/k}$ ($A^{1/k}$ の k 重反対称テンソル) の作用素凹性 ([1]) を使うと，次の不等式が証明できる．

定理. 任意の $1 \leq p, q < \infty$ と $k = 1, \ldots, n$ に対して

$$\left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}((A_1^p + A_2^p))^{1/pk}(B_1^q + B_2^q)^{1/qk})\right\}^{pq/(p+q)}$$
$$\geq \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(A_1^{1/k} B_1^{1/k})\right\}^{pq/(p+q)} + \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(A_2^{1/k} B_2^{1/k})\right\}^{pq/(p+q)}.$$

(5-2) 上で $p = q = 1/r$ として A_j^p, B_j^q を A_j, B_j で置き換えると，任意の $0 < r \leq 1$ と $k = 1, \ldots, n$ に対して

(13)
$$\left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}((A_1 + A_2))^{r/k}(B_1 + B_2)^{r/k})\right\}^{1/2r}$$
$$\geq \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(A_1^{r/k} B_1^{r/k})\right\}^{1/2r} + \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(A_2^{r/k} B_2^{r/k})\right\}^{1/2r}.$$

つまり $(A, B) \mapsto \{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(A^{r/k} B^{r/k})\}^{1/2r}$ は凹関数である．特に $A_1 = B_1 = A$, $A_2 = B_2 = B$ とすると

$$\left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(A + B)\right\}^{1/k} \geq \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(A)\right\}^{1/k} + \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(B)\right\}^{1/k}$$

となるが，これは Oppenheim の不等式 [10] (また [9]) として知られている．

(5-3) (13) で $r \to 0$ とすると次が得られる．

系. 任意の $k = 1, \ldots, n$ に対して

$$(A, B) \mapsto \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(\exp(\log A + \log B))\right\}^{1/2k}$$

は凹関数である．

§6. 結び

§§3–5 で示した結果は，任意有限個の行列の組に対しても同様に成立する．さらに，行列の可測関数に対する積分型に拡張することも容易である．例えば，(3-1) は次のように積分型に一般化できる：p, q, r は (3-1) と同様で，(Ω, μ) を測度空間とする．Ω 上の行列値可測関数 $A(\omega), C(\omega)$ が $A(\omega) \geq 0$ で $A(\omega)^p$ および $|C(\omega)^*|^q$ は可積分とし，可測関数 $\alpha(\omega) \geq 0$ が $\int \alpha(\omega)^r \, d\mu(\omega) = 1$ を満たすならば

$$\left(\int A(\omega)^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \geq \left|\int \alpha(\omega) C(\omega) A(\omega) \, d\mu(\omega)\right|^2.$$

また，(3-2) は次のようになる：$1/p+1/q=1$ とし，Ω 上の行列値可測関数 $A(\omega), C(\omega)$ が $A(\omega) \geq 0$, $C(\omega) \geq 0$ で $A(\omega)^p$ は可積分とし，$\int C(\omega)^q \, d\mu(\omega) \leq I$ とするならば

$$\mathrm{Tr}\Bigl(\int A(\omega)^p \, d\mu(\omega)\Bigr)^{1/p} \geq \mathrm{Tr} \int C(\omega)A(\omega) \, d\mu(\omega) .$$

文献

[1] T. Ando, Concavity of certain maps on positive matrices and applications to Hadamard products, *Linear Algebra Appl.* **26** (1979), 203–241.

[2] T. Ando, Majorizations, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118** (1989), 163–248.

[3] T. Ando, Majorizations and inequalities in matrix theory, *Linear Algebra Appl.* **199** (1994), 17–67.

[4] T. Ando and F. Hiai, Hölder type inequalities for matrices, *Math. Ineq. Appl.* **1** (1988), 1–30.

[5] E.A. Carlen and E.H. Lieb, A Minkowski type trace inequality and strong subadditivity of quantum entropy, preprint, 1997.

[6] H. Epstein, Remarks on two theorems of E. Lieb, *Comm. Math. Phys.* **31** (1973), 317–325.

[7] F. Hiai, Log-majorization and norm inequalities for exponential operators, in *Linear Operators*, J. Janas, F.H. Szafraniec and J. Zemánek (eds.), Banach Center Publications, Vol. 38, 1997, pp. 119–181.

[8] E.H. Lieb, Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture, *Adv. Math.* **11** (1973), 267–288.

[9] A.W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorizations and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[10] A. Oppenheim, Inequalities connected with definite Hermitian forms, II, *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 463–466.