数理解析研究所講究録
1027 巻 1998 年 68-74

Generalized Numerical Radius and ρ-Dilation

北海道教育大学札幌校　大久保 和義

1. はじめに ここでの結果は中路氏（北海道大学・理学部）との共同研究による。以下では A, B はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素とする。
$\rho > 0$ に対して A が ρ-縮小作用素であるとは $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ なるヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ とその上のユニタリ作用素 U があって、

$$A^n = \rho P U^n|_{\mathcal{H}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つこととする。ここで P は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への直交射影作用素である。([7] 参照) ρ-縮小作用素の特徴づけとして次のことが知られている。

Theorem A. *(B.Sz.-Nagy and C. Foiaş[8])* $A \in B(\mathcal{H})$, $\rho > 0$ とする。このとき、次の条件は同値である。
(i) A がρ-縮小作用素
(ii) $r(A) \leq \frac{\rho}{|\rho-1|}$, $\|zA\{\rho - z(\rho-1)A\}^{-1}\| \leq 1$ $(|z| < 1)$
(iii) $-2Re[zA(I - zA)^{-1}] \leq \rho I$ $(|z| < 1)$

C_ρ としてρ-縮小作用素全体の集合とする。
A の ρ-半径を $w_\rho(A) = \inf\{\gamma > 0 \mid \gamma^{-1}A \in C_\rho\}$ で定義する (J.A.R.Holbrook[4] 参照)。このとき、$w_\rho(\cdot)$ は $0 < \rho \leq 2$ でノルムになるが $2 < \rho < \infty$ のときは以下のように準ノルムにはなるがノルムではない。

$$w_\rho(A+B) \leq \frac{\rho}{2}\{w_\rho(A) + w_\rho(B)\}$$

ρ-半径は次の性質をもつ。(T.Ando[1] 参照)

(1) $$w_1(A) = \|A\| : \text{ the operatoer norm}$$

(2) $$w_2(A) = w(A) : \text{ the numerical radius}$$

(3) $$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} w_\rho(A) = r(A) : \text{ the spectral radius}$$

(4) $$\begin{aligned} &\log w_{\lambda\rho+(1-\lambda)\sigma}(A) \\ &\qquad \leq \lambda \log w_\rho(A) + (1-\lambda)\log w_\sigma(A) \end{aligned}$$

(5) $$1 \leq \sigma \leq \rho \text{ ならば } w_\rho(A) \leq w_\sigma(A)$$

(6) $$1 \leq \sigma \leq \rho \text{ ならば } \sigma w_\sigma(A) \leq \rho w_\rho(A)$$

(7) $$w_\rho(UAU^*) = w_\rho(A) \quad (\text{unitary } U)$$

$w|_\rho(\cdot)$ は Schwarz norm である。すなわち analytic function $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}(D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ に対して

(8) $$w_\rho(A) \leq 1 \implies w_\rho(f(A)) \leq 1$$

$S \geq 0$ を有界半正値作用素とするとき、C.-K.Li, N.-K.Tsing and F.Uhlig [5] により 一般化された数域 $V_S(A)$ が次のように定義された。

(9) $$V_S(A) = \{(Ax, x) \mid x \in \mathcal{H},\ |(Sx, x)| = 1\}$$

$V_S(A)$ に関して $v_S(A)$ を次で定義する。

(10) $$v_S(A) = \sup\{|(Ax, x)| \mid x \in \mathcal{H},\ |(Sx, x)| = 1\}$$

特に $S = I$ のときは、$V_I(A) = W(A) := \{(Ax, x) \mid ||x|| = 1\}$($A$ の数域) で、かつ $v_I(A) = w(A)$ である。
この応用としては、A がコンパクト作用素で $S = |A| := (A^*A)^{1/2}$ 、$v_S(A) \leq 1$ のとき、A が正規作用素であることが T.Ando and K.Takahashi [3] によって知られている。$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ に対して

$$\mathbf{w}_\lambda(A) = \sup\{|(Ax, x)| \mid \lambda||x||^2 + (1 - \lambda)||Ax||^2 \leq 1\}$$

$$\mathbf{w}_\mu^+ = \sup\{\mu||Ax||^2 + (1 - \mu)|(Ax, x)| \mid ||x|| \leq 1\}$$

として、$\mu \geq 1$ に対して、

$$\mathbf{w}_\mu^-(A) = \sup\{\mu||Ax||^2 + (\mu - 1)|(Ax, x)| \mid ||x|| \leq 1\}$$

とする。ここでは、A が ρ-縮小作用素であることを A に関係する $S \geq 0$ と $v_S(A)$ を使って、さらに、$\mathbf{w}_\lambda(A)$, $\mathbf{w}_\mu^+(A)$, $\mathbf{w}_\mu^-(A)$ を用いて特徴づける。
また、$w_\rho(A)$ を $|(Ax, x)|$, $||Ax||$, $||x||$ を使って表示する。

2．結果 $\rho > 0$ に対して A がρ-縮小作用素であるための条件として次を得る。

定理 1 $\rho > 0,\ \rho \neq 1$ とする。$0 < t \leq 1$ に対して

$$S_t = \frac{1}{t}\frac{\rho}{2|\rho-1|}I + t\frac{\rho-2}{2|\rho-1|}|A|^2 \tag{11}$$

とする。このとき、A がρ-縮小作用素であるための必要十分条件は、$S_t \geq 0$ かつ、$v_{S_t}(A) \leq 1$ が $0 < t \leq 1$ で成り立つことである。

証明 $\rho > 0$ とする。$A \in C_\rho$ であるための必要十分条件は

$$||x||^2 + \left(1 - \frac{2}{\rho}\right)|\zeta|^2||Ax||^2 - 2\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)Re\zeta(Ax, x) \geq 0$$

が成り立つことである。ここで $\zeta \in D,\ x \in \mathcal{H}$ である。 これは

$$|\zeta|\,|(Ax,x)| \leq \frac{\rho}{2|\rho-1|}||x||^2 + \frac{\rho-2}{2|\rho-1|}|\zeta|^2||Ax||^2$$

と同値であり、定理が言える。

この結果として、

系 2 $\rho > 0,\ \rho \neq 1$ に対して A が ρ-縮小作用素であるために必要十分条件は、$0 < t \leq 1$ に対して $A = S_t^{1/2}B_tS_t^{1/2}$ とできることである。ここで、B_t は $w(B_t) \leq 1$ である。(S_t は (11) で定義された作用素)

この証明は次の定理と同様なのでそこで示す。

特に、$0 < \rho \leq 2,\ \rho \neq 1$ のときは、次のことが言える。

定理 3 $0 < \rho \leq 2,\ \rho \neq 1$ とすると、A が ρ-縮小作用素であるために必要十分条件は $A = S^{1/2}BS^{1/2}$ となることである。ただし、$S = (\rho I + (\rho-2)|A|^2)/2|\rho-1|$ で、B は $w(B) \leq 1$ を満たす。

証明 $A \in C_\rho$ とする。定理 1 で $0 < \rho \leq 2$ のとき、$S_t(0 \leq t \leq 1)$ の最小は $t = 1$ のときで、したがって S のみを考えるとよい。$1 < \rho \leq 2$ とする。仮に、$y(\neq 0) \in \mathcal{H}$ が $Sy = 0$ を満たすとすると、$|A|^2y = \rho y/(2-\rho)$ となる。また、(6) より $\rho w_\rho(A) \geq ||A||$ がいえるから、

$$1 \geq w_\rho(A) \geq \frac{||A||}{\rho} \geq \frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}$$

より、$\rho = 1$ となり矛盾。よって、$\ker S = \{0\}$ である。$0 < \rho < 1$ のとき、$\rho w_\rho(A) = (2-\rho)w_{2-\rho}(A)$ が知られている (T.Ando and K.Nishio [2] 参照) から、さらに、

$$\left((2-\rho)I + ((2-\rho)-2)\left(\frac{2-\rho}{\rho}\right)^2|A|^2\right)/2((2-\rho)-1)$$
$$= \frac{2-\rho}{\rho}\left(\rho I + (\rho-2)|A|^2\right)/2(1-\rho)$$

が成り立つから、このときも $\ker S = \{0\}$ であることがわかる。したがって、$v_S(A) \leq 1$ であるための必要十分条件は

$$|(S^{-1/2}AS^{-1/2}x, x)| \leq (x, x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

であり、$B = S^{-1/2}AS^{-1/2}$ とするとこの不等式は

$$A = S^{1/2}BS^{1/2},\ w(B) \leq 1$$

となる。

系 4　$\rho > 0,\ \rho \neq 1$ とする。$t \geq w_\rho(A)$ であるとき、

(12) $$|(Ax, x)| \leq t\frac{\rho}{2|\rho-1|}||x||^2 + \frac{1}{t}\frac{\rho-2}{2|\rho-1|}||Ax||^2\ (x \in \mathcal{H})$$

が成り立つ。逆に、ある t_0 があって、$t \geq t_0$ に対して (12) が成り立てば、$t_0 \geq w_\rho(A)$ である。
この事実は後で用いる。

系 5
(1) $0 \leq \mu \leq 1,\ 1 \leq \rho = 2/(\mu+1) \leq 2$ とする。このとき、A が ρ-縮小作用素であることと $\mathbf{w}_\mu^+(A) \leq 1$ であることが同値である。
(2) $1 \leq \mu,\ 0 < \rho = 2/(\mu+1) \leq 1$ とする。このとき、A が ρ-縮小作用素であることと $\mathbf{w}_\mu^-(A) \leq 1$ であることが同値である。
証明 定理３での考察より、$w_\rho(A) \leq 1$ であるための必要十分条件は

$$\frac{2-\rho}{2|\rho-1|}||Ax||^2 + |(Ax, x)| \leq \frac{\rho}{2|\rho-1|}||x||^2\ (x \in \mathcal{H})$$

である。この不等式は

$$\mu||Ax||^2 + \lambda|(Ax, x)| \leq ||x||^2$$

と同値になる。ここで $\mu = (2-\rho)/\rho,\ \lambda = 2|\rho-1|/\rho$ である。仮に $1 < \rho \leq 2$ なら $\mu + \lambda = 1$, もし $0 < \rho < 1$ なら$\mu - \lambda = 1$ である。

$\mu||A||^2 + \lambda w(A) \leq 1$ ($\mu + \lambda = 1$ ($0 \leq \mu \leq 1$) または$\mu - \lambda = 1$ ($1 \leq \mu < \infty$)) とする。仮に $\rho = 2/(\mu+1)$ ならば $w_\rho(A) \leq 1$ が系５から言えるが、逆は言えない。

系 6 $0 < \rho \leq 2$ とする。このとき $w_\rho(A) \leq 1$ であるための必要十分条件は $w(\mu|A|^2 + \lambda^{i\theta}A) \leq 1$ ($0 < \theta \leq 2\pi$)。ここで $\mu + \lambda = 1,\ \mu = \frac{2}{\rho} - 1$ または $\mu - \lambda = 1,\ \mu = \frac{2}{\rho} - 1$ とする。

定理 7 $0 \leq \lambda \leq 1$ とする。

(1) $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1,\ \rho = 2\lambda/(2\lambda - 1) \geq 2$ とするとき、A がρ-縮小作用素である必要十分条件は $\mathbf{w}_\lambda(tA) \leq 1\ (0 < t \leq 1)$ となることである。

(2) $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2},\ 1 \leq \rho = 2(\lambda - 1)/(2\lambda - 1) \geq 2$ かつ A が可逆とするとき、A^{-1} がρ-縮小作用素である必要十分条件は $\mathbf{w}_\lambda(tA) \leq 1\ (t \geq 1)$ となることである。

この証明は定理 1 を用いてできる。

定理 8 $0 < \rho,\ \rho \neq 1$ とする。このとき、

$$w_\rho(A) = \frac{|\rho - 1|}{\rho} \sup\{|(Ax, x)| + \sqrt{D} \mid ||x|| = 1,\ D \geq 0\} \tag{13}$$

ただし、$D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2}||Ax||^2$ とする。

証明 系 4 より、$t \geq w_\rho(A)$ とすると$\lambda||x||^2t^2 - |(Ax, x)|t + (1-\lambda)||Ax||^2 \geq 0\ (x \in \mathcal{H})$ となる。 ここで$\lambda = \rho/2|\rho - 1|$。$D \geq 0$ と仮定すると、

$$w_\rho(A) \leq \frac{|(Ax, x)| - \sqrt{D}}{2\lambda||x||^2}$$

または、

$$w_\rho(A) \geq \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda||x||^2}$$

である。

$$t_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda||x||^2}$$

とおくと、$t \geq t_0$ ならば

$$\lambda||x||^2t^2 - |(Ax, x)|t + (1 - \lambda)||Ax||^2 \geq 0$$

が $x \in \mathcal{H}$ でいえる。系 4 から、$w_\rho(A) \leq t_0$ となる。

$0 < \rho \leq 2$ のとき、$|(Ax, x)| - \sqrt{D} \leq 0$ だから、$w_\rho(A) \geq t_0$ がいえて、$w_\rho(A) = t_0$ となる。

$\rho > 2$ のとき、$x_0 \in \mathcal{H}$ で

$$w_\rho(A) \leq \frac{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}}{2\lambda||x_0||^2}$$

をみたすとすると、系 4 から

$$|(Ax_0, x_0)| \leq t\lambda||x_0||^2 + \frac{1}{t}(1 - \lambda)||Ax_0||^2$$

$(t > \{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}\}/2\lambda||x_0||^2)$ がいえる。一方で、もし、$t > \{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}\}/2\lambda||x_0||^2$ ならば、

$$\lambda||x_0||^2t^2 - |(Ax_0, x_0)|t + (1-\lambda)||Ax_0||^2 < 0$$

となり、これは矛盾する。したがって、

$$w_\rho(A) \geq \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda||x||^2}$$

がすべての $x \in \mathcal{H}$ について成り立つ。ゆえに、$\rho > 2$ でも $w_\rho(A) = t_0$ がいえる。

系 9 $0 < \rho \leq 2$ とすると、次の不等式が成り立つ。

$$\max\left\{2\left|1-\frac{1}{\rho}\right|w(A),\ \sqrt{\frac{2-\rho}{\rho}}||A||\right\} \leq w_\rho(A) \leq 2\left|1-\frac{1}{\rho}\right|w(A) + \sqrt{\frac{2-\rho}{\rho}}||A||$$

先に注意したように、$0 < \rho \leq 2$ では$\rho w_\rho(A) = (2-\rho)w_{2-\rho}(A)$ が成り立つから、$1 \leq \rho \leq 2$ でこの不等式がいえることを示すとよいことがわかる。定理８から簡単にこの不等式は示される。また、$1 < \rho \leq 2$ で、左辺の不等式はすでに知られている不等式

$$w(A) \leq w_\rho(A),\ ||A|| \leq \rho w_\rho(A)$$

より、良くないが、左辺との関連で挙げておいた。

定理 １０

(1) $0 < \rho \leq 2$ とする。このとき、

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho}\sup_{||x||=1}\sup_{0\leq t\leq 1}\{\sqrt{\rho(2-\rho)}||Ax||\sqrt{t(1-t)} + |\rho-1||(Ax, x)|t\}$$

(2) $\rho > 2$ のとき、

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho}\sup_{||x||=1, D\geq 0}\inf_{t\geq 1}\{-\sqrt{\rho(2-\rho)}||Ax||\sqrt{t(t-1)} + |\rho-1||(Ax, x)|t\}$$

ただし、$D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2}||Ax||^2$ とする。

証明 (1) $0 < \rho \leq 2$ とする。$||x|| = 1$ なる $x \in \mathcal{H}$ に対して $g(t, x) = \sqrt{\rho(2-\rho)}||Ax||\sqrt{t(1-t)} + |\rho-1|\cdot|(Ax, x)|t$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{d}{dt}g(t, x)\right)\sqrt{t(1-t)}\\ &= \sqrt{\rho(2-\rho)}||Ax||(1-2t) + 2|\rho-1|\cdot|(Ax, x)|\sqrt{t(1-t)}\end{aligned}$$

となり、$\frac{d}{dt}g(t,x)_{t=t_0}=0,\ 0\le t_0\le 1$ である必要十分条件は

$$t_0=\frac{1}{2}+\frac{|(Ax,x)|}{2\sqrt{D}}$$

であり、したがって、

$$\sqrt{t_0(1-t_0)}=\frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}||Ay||}{2|\rho-1|\sqrt{D}}$$

となる。ここで $D=|(Ax,x)|^2-\frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2}||Ax||^2$ とする。ゆえに

$$\frac{2}{\rho}\sup_{||x||=1}\sup_{0\le t\le 1}\{\sqrt{\rho(2-\rho)}||Ay||\sqrt{t(1-t)}+|\rho-1|\cdot|(Ax,x)|t\}$$

$$=\frac{2}{\rho}\sup_{||x||=1}\left\{\sqrt{\rho(2-\rho)}||Ax||\times\frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}||Ax||}{2|\rho-1|\cdot\sqrt{D}}+|\rho-1|\cdot|(Ax,x)|\times\left(\frac{1}{2}+\frac{|(Ax,x)|}{2\sqrt{D}}\right)\right\}$$

$$=\frac{|\rho-1|}{\rho}\sup_{||x||=1}\{|(Ax,x)|+\sqrt{D}\}$$

(2) も $f(t,x)=-\sqrt{\rho(\rho-2)}||Ax||\sqrt{t(t-1)}+(\rho-1)|(Ax,x)|t$ とおいて、(1) と同様な考察で示される。

定理 10 のことから、R.Mathias and K.Okubo[6] の次の表示が得られる。

系 1 1 $0<\rho\le 2$ とする。このとき、$w_\rho(A)=\frac{2}{\rho}w(C_\rho\otimes A)$ となる。ここで、$C_\rho=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}\\ 0 & 1-\rho\end{bmatrix}$ である。

References

1. T.Ando, *ρ-dilation and ρ-radius (Japanese)*, Sugaku **28** (1976), 107–120.
2. T.Ando and K.Nishio, *Convexity properties of operator radii associated with unitary ρ-dilations*, Michigan Math. J. **20** (1973), 303—307.
3. T.Ando and K.Takahashi, *On operators with unitary ρ-dilalions*, Ann. Pol. Math. **66** (1997), 11–14.
4. J.A.R.Holbrook, *On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş*, Acta Sci. Math. (Szeged) **29** (1968), 299–310.
5. C.K.Li, N.K.Tsing and F.Uhling, *Numerical ranges of operator on an indefinite inner product space*, Electronic J.Lin Alg. **1** (1996), 1–17.
6. Mathias and K.Okubo, *The induced norm of the Schur multiplication operator with respect to the operator radius*, Linear and Multilinear Algebra **37** (1994), 114–124.
7. B.Sz.-Nagy and C.Foiaş, *On certain classes of power bounded operators in Hilbert space*, Acta Sci. Math. **27** (1966), 17–25.
8. B.Sz.-Nagy and C.Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North-Holland, Amsterdam, 1970.