数理解析研究所講究録
1027 巻 1998 年 11-19

Subadditivity and Superadditivity

北星学園大　経済学部　　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)

1.　**背景と問題**　以下では $A, B, ..$ は $n \times n$ 行列とする。Hermitian A, B の間の順序 (order) $A \geq B$ は $A - B$ が positive (semi-definite) で定義される。

実数値連続関数 $f(t)$ が $[0, \infty)$ で定義されていると、どの $A \geq 0$ にたいしても functional calculus で Hermitian $f(A)$ が定義される。positive 行列のなす錐 (cone) $\mathcal{P}$ には affine 構造と順序が定義されているのであるから、この対応 $A \longmapsto f(A)$ に関して単調性、凸性、凹性が考えられる。(次元 n に関係なく)

$$A \geq B \geq 0 \implies f(A) \geq f(B)$$

が成り立つとき、$f(t)$ は **作用素単調** (operator monotone) であるという。また

$$\lambda f(A) + (1-\lambda) f(B) \geq f(\lambda A + (1-\lambda)B) \quad (A, B \in \mathcal{P}; 1 \geq \lambda \geq 0)$$

を満たすとき、$f(t)$ を **作用素凸** (operator convex) という。勿論、$-f(t)$ が作用素凸のとき、$f(t)$ 自身を**作用素凹** (operator concave) という。しかし、作用素単調性と作用素凹性は同じであることが知られている。また $f(t) \geq 0$ で $f(0) = 0$ のときは $f(t)$ が作用素凸であることと、$f(t)/t$ が作用素単調であることは同値となる。

行列空間の norm $|||\cdot|||$ で興味あるのは (strong) **unitarily invariant** なもの、すなわち

$$|||UAV||| = |||A||| \quad \forall \text{ unitary } U, V$$

という性質をもつものである。このような norm $|||A|||$ は A の特異値 (singular value) (すなわち $|A| \stackrel{def}{=} (A^*A)^{1/2}$ の固有値) だけで決まる。unitarily invariant norm の全体を $\mathcal{N}$ で表そう。

表面には出ないが最も重要な unitarily invariant norm は Ky Fan k-norm $||\cdot||_{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ である：

$$||A||_{(k)} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{k} s_i(A).$$

ここで $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \ldots \geq s_n(A)$ は A の特異値である。

次の基本的な事実は Ky Fan の dominance theorem と呼ばれるものの一部である（これらに関しては Ando [3] の解説を参照)。

補題 1 $A, B \geq 0$ に関して以下の条件は同値である。
(1) $||A||_{(k)} \geq ||B||_{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$,
(2) $|||A||| \geq |||B||| \quad (|||\cdot||| \in \mathcal{N})$,
(3) $|||\varphi(A)||| \geq |||\varphi(B)||| \quad (|||\cdot||| \in \mathcal{N}; \forall\ convex, increasing\ \varphi(t) \geq 0)$.

また $A \geq 0$ の Ky Fan norm を使うときには、Ky Fan 自身による次の変分表示が役に立つ。

補題 2 $A \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ にたいして

$$||A||_{(k)} = \sup_{v_i;\ o.n.} \sum_{i=1}^{k} \langle Av_i, v_i \rangle.$$

$||A||_{(1)}$ は spectral norm $||A||_\infty$ であり、$||A||_{(n)}$ は trace norm $||A||_1 \overset{def}{=} \mathrm{tr}(|A|)$ となる。spectral norm と trace norm を補間するより popular な unitarily invariant norm として p-norm $(1 \leq p < \infty)$ がある：

$$||A||_p \overset{def}{=} \{\mathrm{tr}|A|^p)\}^{1/p}.$$

以下では記述を簡単にするため以下のような記号を使おう。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_+ &= \{f(t);\ \text{operator monotone}, f(0) = 0\}, \\
\mathcal{C}_+ &= \{g(t);\ \text{operator convex}, g(t) \geq 0, g(0) = 0\}, \\
\mathcal{I}_+ &= \{h(t);\ h(t) \geq 0, h(0) = 0, h^{-1}(t)\ \text{operator monotone}\}.
\end{aligned}$$

補題 3

(1) $f(t) \in \mathcal{M}_+$ にたいして $\alpha \geq 0$ と $[0, \infty)$ 上の正測度 $\mu(\cdot)$ が一意的に決まり $f(t)$ は

$$f(t) = \alpha t + \int_0^\infty \frac{t}{t+s} d\mu(t)$$

と表示できる。

(2) $g(t) \in \mathcal{C}_+$ にたいして $\alpha, \beta \geq 0$ と $[0, \infty)$ 上の正測度 $\mu(\cdot)$ が一意的に決まり $g(t)$ は

$$g(t) = \alpha t + \beta t^2 + \int_0^\infty \frac{t^2}{t+s} d\mu(t)$$

と表示できる。

これらに関しては Kubo - Ando [5] を参照。

次の事実は Ando [1] の摂動定理の直接の系である。

定理 1

(1) $|||f(A+B)-f(A)||| \le |||f(B)||| \quad (A,B \in \mathcal{P}; f \in \mathcal{M}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N})$,

(2) $|||g(A+B)-g(A)||| \ge |||g(B)||| \quad (A,B \in \mathcal{P}; g \in \mathcal{C}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N})$.

これに関連して Hiai [4] は、関数と norm に関しての subadditivity および superadditivity とでも考えられる次のような予想を提出した。

予想

(1) $|||f(A+B)||| \le |||f(A)+f(B)||| \quad (A,B \in \mathcal{P}; f \in \mathcal{M}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N})$,

(2) $|||g(A+B)||| \ge |||g(A)+g(B)||| \quad (A,B \in \mathcal{P}; g \in \mathcal{C}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N})$.

特別な関数 $h(t)=t^p$ $(p \ge 1)$ に関しては、Bhatia - Kittaneh [3] により、上の予想の (2) が示されている。

定理 2 $p=1,2,\ldots$ にたいして

$$|||(A+B)^p||| \ge |||A^p+B^p||| \quad (A,B \in \mathcal{P}; |||\cdot||| \in \mathcal{N}).$$

一方、spectral norm $||\cdot||_\infty$ と trace norm $||\cdot||_1$ に関しては、別な理由から次の不等式を導くのはさして困難ではない ([2], [3] 参照) 。

(1) $A,B \in \mathcal{P}; 0 \le p \le 1$ にたいして

$$||(A+B)^p||_\infty \le ||A^p+B^p||_\infty, \quad ||(A+B)^p||_1 \le ||A^p+B^p||_1,$$

(2) $A,B \in \mathcal{P}; 1 \le p < \infty$ にたいして

$$||(A+B)^p||_\infty \ge ||A^p+B^p||_\infty, \quad ||(A+B)^p||_1 \ge ||A^p+B^p||_1.$$

この講演では、上の予想および関連した問題へのいくつかの試みを展開する。

2． **同値性**　予想を解決するためには、より簡単な何を証明すればよいかを見定めるために、同値命題を挙げる。

命題1　以下の4つの条件は互いに同値である。

(I)　$|||g(A+B)||| \geq |||g(A)+g(B)|||$　$(A, B \in \mathcal{P};\ g(t) \in \mathcal{C}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N})$,

(II)　$|||h(A+B)||| \geq |||h(A)+h(B)|||$　$(A, B \in \mathcal{P};\ h(t) \in \mathcal{I}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N})$,

(III)　$|||f(A+B)||| \leq |||f(A)+f(B)|||$　$(A, B \in \mathcal{P};\ f(t) \in \mathcal{M}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N})$,

(IV)　どの $A, B \in \mathcal{P}$ にたいしても、$A+B$ の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$、対応する正規化された固有ベクトルを $u_1, u_2, \ldots, u_n$ とすると

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\langle\{(A+I)^{-1}+(B+I)^{-1}\}u_i, u_i\rangle\\ &\qquad \leq \sum_{i=1}^{k}\langle\{I+(A+B+I)^{-1}\}u_i, u_i\rangle \quad (k=1,2,\ldots,n).\end{aligned}$$

(IV) $\Longrightarrow$ (III) の証明：　$s>0$ にたいして

$$\begin{aligned}A(A+s)^{-1}+B(B+s)^{-1} &= 2-\{(s^{-1}A+I)^{-1}+(s^{-1}B+I)^{-1}\}\\ (A+B)(A+B+s)^{-1} &= 2-[1+\{s^{-1}(A+B)+1\}^{-1}]\end{aligned}$$

であるから、$s^{-1}A, s^{-1}B$ にたいする (VI) より

$$\sum_{i=1}^{k}\langle\{A(A+s)^{-1}+B(B+s)^{-1}\}u_i, u_i\rangle \geq \sum_{i+1}^{k}\langle(A+B)(A+B+s)^{-1}u_i, u_i\rangle$$

がでる。$f(t) \in \mathcal{M}_+$ にたいして補題3の積分表示より

$$\sum_{i=1}^{k}\langle\{f(A)+f(B)\}u_i, u_i\rangle \geq \sum_{i=1}^{k}\langle f(A+B)u_i, u_i\rangle$$

となるが、$u_1, \ldots, u_k$ は $f(A+B)$ の（最大の）固有値 $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_k)$ に対応する固有ベクトルとなっているから

$$\sum_{i=1}^{k}\langle f(A+B)u_i, u_i\rangle = ||f(A+B)||_{(k)}$$

となっている。一方補題2より

$$||f(A)+f(B)||_{(k)} \geq \sum_{i=1}^{k} \langle \{f(A)+f(B)\}u_i, u_i\rangle$$

なので

$$||f(A)+f(B)||_{(k)} \geq ||f(A+B)||_{(k)} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

がでて、補題1より (III) が導かれる。

(III) $\Longrightarrow$ (II) の証明： $h(A), h(B) \in \mathcal{P}$ と $h^{-1}(t) \in \mathcal{M}_+$ に (III) を適用して

$$|||h^{-1}(h(A)+h(B))||| \leq |||A+B|||$$

がすべての $|||\cdot||| \in \mathcal{N}$ に成り立つが、$h(t)$ は convex, increasing であるから、補題1より (II) が導かれる。

(II) $\Longrightarrow$ (I) の証明： $s>0$ にたいして

$$h_s(t) \stackrel{def}{=} \frac{t^2}{t+s}$$

を考えると、この逆関数

$$h_s^{-1}(t) = \frac{t+\sqrt{t}\sqrt{t+2s}}{2}$$

は作用素単調となるので、(II) により

$$||A^2(A+s)^{-1}+B^2(B+s)^{-1}||_{(k)} \leq ||(A+B)^2(A+B+s)^{-1}||_{(k)} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

がでるが、補題3の積分表示から、(VI) $\Longrightarrow$ (III) の証明と同様に、どの $g(t) \in \mathcal{C}_+$ にたいしても

$$||g(A)+g(B)||_{(k)} \leq ||g(A+B)||_{(k)} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

がわかるが、補題1より (I) が導かれる。

(I) $\Longrightarrow$ (IV) の証明：作用素凸関数

$$g(t) \stackrel{def}{=} \frac{t^2}{t+1}$$

に (I) を適用して

$$||A^2(A+1)^{-1}+B^2(B+1)^{-1}||_{(k)} \leq ||(A+B)^2(A+B+1)^{-1}||_{(k)}$$

がでるが、定義から

$$||(A+B)^2(A+B+1)^{-1}||_{(k)} = \sum_{i=1}^{k}\langle (A+B)^2(A+B+1)^{-1}u_i, u_i\rangle$$

なので、補題2より

$$\sum_{i=1}^{k}\langle\{(A^2(A+1)^{-1}+B^2(B+1)^{-1}\}u_i, u_i\rangle \leq \sum_{i=1}^{k}\langle (A+B)^2(A+B+1)^{-1}u_i, u_i\rangle$$

がでる。これから (IV) をだすには

$$\begin{aligned} A^2(A+1)^{-1}+B^2(B+1)^{-1} &= (A+B)-2+\{(A+1)^{-1}+(B+1)^{-1}\} \\ (A+B)^2(A+B+1)^{-1} &= (A+B)-2+\{1+(A+B+1)^{-1}\} \end{aligned}$$

の関係を使えばよい。　(証明終)

次に特に spectral norm $||\cdot||_\infty$ について考えてみよう。

$A \geq 0$ の最大の固有値に対応する正規化された固有ベクトルを v_1 とすると、どの $[0,\infty)$ での non-negative, increasing な関数 $\varphi(t)$ にたいしても

$$||\varphi(A)||_\infty = \varphi(||A||_\infty) = \langle\varphi(A)v_1, v_1\rangle$$

の関係が成り立つから、上の命題の証明をたどると次が証明される。

命題2　以下の4つの条件は互いに同値である。

(I)　$||g(A+B)||_\infty \geq ||g(A)+g(B)||_\infty \quad (A, B \in \mathcal{P};\ g(t) \in \mathcal{C}_+)$,

(II)　$||h(A+B)||_\infty \geq ||h(A)+h(B)||_\infty \quad (A, B \in \mathcal{P};\ h(t) \in \mathcal{I}_+)$

(III)　$||f(A+B)||_\infty \leq ||f(A)+f(B)||_\infty \quad (A, B \in \mathcal{P};\ f(t) \in \mathcal{M}_+)$

(IV)　どの $A, B \in \mathcal{P}$ にたいしても、$A+B$ の最大の固有値に対応する正規化された固有ベクトルを u_1 とすると

$$\langle\{(A+I)^{-1}+(B+I)^{-1}\}u_1, u_1\rangle \leq \langle\{I+(A+B+I)^{-1}\}u_1, u_1\rangle.$$

3． **幾つかの結果**　残念ながら前節の命題１の中の同値条件のどれをも証明するまでには至っていないが、命題２の (IV) を証明することができる。

定理３　$A, B \geq 0$ にたいして、$A+B$ の最大の固有値を λ_1 それに対応する正規化された固有ベクトルを u_1 とすると

$$\langle\{(A+1)^{-1}+(B+1)^{-1}\}u_1, u_1\rangle \leq \frac{\lambda_1+2}{\lambda_1+1} = \langle\{1+(A+B+1)^{-1}\}u_1, u_1\rangle.$$

証明

$$C \overset{def}{=} A+B+1, \quad D \overset{def}{=} C^{-1/2}(A+1)C^{-1/2}$$

とすると

$$A+1 = C^{1/2}DC^{1/2}, \quad B+1 = C^{1/2}(1-D+C^{-1})C^{1/2}$$

で

$$(\lambda_1+1)^{-1} \leq C^{-1} \leq D \leq 1$$

なので

$$\begin{aligned}
(A+1)^{-1}+(B+1)^{-1} &= C^{-1/2}\{D^{-1}+(1-D+C^{-1})^{-1}\}C^{-1/2} \\
&= C^{-1/2}\{D^{-1}+(1-D+(\lambda_1+1)^{-1})^{-1}\}C^{-1/2} \\
&= \frac{\lambda_1+2}{\lambda_1+1}C^{-1/2}D^{-1}\{1-D+(\lambda_1+1)^{-1}\}^{-1}C^{-1/2} \\
&\leq (\lambda_1+2)C^{-1}.
\end{aligned}$$

ここで

$$1-(\lambda_1+1)^{-1}D^{-1}\{1-D+(\lambda_1+1)^{-1}\}^{-1} = (1-D)\{1-D+(\lambda_1+1)^{-1}\}^{-1} \geq 0$$

を使った。最後に

$$\langle C^{-1}u_1, u_1\rangle = \frac{1}{\lambda_1+1}$$

を使えばよい。　（証明終）

$(A+1)^{-1}+(B+1)^{-1}$ と $1+(A+B+1)^{-1}$ の関係については、直接予想の解決には結びつかないが、次が言える。

定理 4 　どの $A, B \geq 0$ と、どの unitarily invariant norm $|||\cdot|||$ にたいしても

$$|||\{(A+1)^{-1}+(B+1)^{-1}\}^{-1}||| \geq |||\{1+(A+B+1)^{-1}\}^{-1}|||.$$

証明

$$H \stackrel{def}{=} \{(A+1)^{-1}+(B+1)^{-1}\}^{-1}$$

とすると、

$$\begin{aligned} H &\geq \{(A+1)^{-1}+1\}^{-1} = (A+1)(A+2)^{-1} \\ &= [A(A+2)]^{-1/2}A(A+1)[A(A+2)]^{-1/2} \end{aligned}$$

であるから

$$[A(A+2)]^{1/2}H[A(A+2)]^{1/2} \geq A(A+1)$$

がでる。一方

$$H = (A+1)-(A+1)(A+B+2)^{-1}(A+1)$$

と書かれるから

$$-(A+B+2)^{-1} = (A+1)^{-1}H(A+1)^{-1}-(A+1)^{-1}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \{1+(A+B+1)^{-1}\}^{-1} &= 1-(A+B+2)^{-1} \\ &= 1-(A+1)^{-1}+(A+1)^{-1}H(A+1)^{-1} \\ &= (A+1)^{-1}\{A(A+1)+H\}(A+1)^{-1} \\ &\leq (A+1)^{-1}[A(A+2)]^{1/2}H[A(A+2)]^{1/2}(A+1)^{-1} \\ &\qquad + (A+1)^{-1}H(A+1)^{-1} \\ &= \Phi(H) \end{aligned}$$

ここで $\Phi(\cdot)$ は行列空間の線形写像で

$$\begin{aligned} \Phi(X) \stackrel{def}{=} & (A+1)^{-1}[A(A+2)]^{1/2}X[A(A+2)]^{1/2}(A+1)^{-1} \\ & + (A+1)^{-1}X(A+1)^{-1} \end{aligned}$$

で定義される。unitarily invariant norm の性質から

$$|||\Phi(H)||| \geq |||\{1+(A+B+1)^{-1}\}^{-1}|||$$

がでる。また 明らかにこの写像は unital completely positive になっているので、一般論 (Ando[1] 参照) により

$$|||H||| \geq |||\Phi(H)|||$$

がでるので、合わせて定理が証明された。　(証明終)

4. 文献

[1] T.Ando, Comparison of norms $|||f(A)-f(B)|||$ and $|||f(|A-B|)|||$, Math. Z. 197(1988), 403-409.

[2] T. Ando, Majorization, doubly stochstic matrices and comparison of eigenvalues, Linear Alg. Appl. 118(1989), 163-248.

[3] R. Bhatia and F. Kittaneh, Norm inequalities for positive operators (Preprint),

[4] F. Hiai, Log - majorizations and norm inequalities for exponential oprators, in *"Linear Operators"*, Banach Center Publication 38(1996), 119-181.

[5] F.Kubo and T. Ando, Means of positive linar operators, Math. Ann. 246(1979/80), 347-352.