数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 94-105

正則パラメータを持つ超函数の特異性について

千葉大学大学院自然科学研究科
梅津 律之 (Noriyuki Umetsu)

1 序文

論文 [2] にある"second singular support の外での V の陪特性葉に沿った wave front set の伝播定理"：u を $b_{\mathring{q}}$ の近傍で定義された microfunction とする．そのとき，

$$\text{2-sing supp}_V(u) \cap b_{\mathring{q}} = \phi, \mathring{q} \notin WF_{a,V}(u) \Rightarrow WF_{a,V}(u) \cap b_{\mathring{q}} = \phi\ .$$

ここで $b_{\mathring{q}} = (\{(x;0,\xi'') \in V; x'' = \mathring{x}'', \xi'' = t\,\mathring{\xi}''\ (t>0)\}$ の $\mathring{q}\ (= (\mathring{x};0,\mathring{\xi}'') \in V)$ を含む連結成分) とする: を参考にして," 正則パラメータに関する second analytic wave front set の伝播定理" を証明する．

記号

- $\circ$ M を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，座標は $x = (x_1,\cdots,x_n)$ とする．なお，$x' = (x_1,\cdots,x_d), x'' = (x_{d+1},\cdots,x_n), x^\vee = (x_2,,\cdots,x_d), \tilde{x} = (x_2,\cdots,x_n)$ とする．
- $\circ$ $X \subset \mathbf{C}^n$ を M の複素化とし，座標は $w = (w_1,\cdots,w_n) = (x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n) = x+iy$ とする．$w', w'', w^\vee$，$\tilde{w}$ は上と同様に定める．
- $\circ$ T^*M は M の余接ベクトル空間で，$\mathring{T}^*M = T^*M \setminus M$
- $\circ$ T^*M の involutive submanifold V を $V := \{(x;\xi dx) \in \mathring{T}^*M; \xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_d = 0\}$ で定義する．
- $\circ$ $\xi'' = (\xi_{d+1},\cdots,\xi_n) \in \mathbf{R}^{n-d}$ とする．
- $\circ$ $\eta' = (\eta_1,\cdots,\eta_d) \in \mathbf{R}^d$ として，T_VT^*M の点を $(x;\xi''dx'';\eta'\frac{\partial}{\partial\xi'})$ で表す．$\eta^\vee = (\eta_2,\cdots,\eta_d)$ とする．
- $\circ$ $\mathring{T}_V\mathring{T}^*M = T_V\,\mathring{T}^*M \setminus V$.
- $\circ$ $B_{\mathbf{C}}(a,r) := \{w \in \mathbf{C}; |w-a| < r\}$.

2 FBI変換と Second analytic wave front set

Definition 2.1 (FBI 変換) $u(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数とする．V に沿った u の第 2FBI 変換 $T_V^2u(z;\lambda;\mu)$ を次で定義する：

$$T_V^2u(z;\lambda;\mu) = \int u(x)\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z'-x')^2 - \frac{\lambda}{2}(z''-x'')^2\right\}dx$$

以下，$z \in \mathbf{C}^n$ とし，$z' = (z_1,\cdots,z_d), z'' = (z_{d+1},\cdots,z_n)$ とおく．

Remark 2.2 $K(\subset \mathbf{C}^n)$ を任意のコンパクト集合とする. このとき,
for ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$|T_V^2 u(z;\lambda;\mu)| \le C_\varepsilon \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im} z''|^2 + \varepsilon\lambda\right\}$$

$$(\lambda > 0, 0 < \mu < 1, z \in K)$$

Proof) $\tilde{K}(\supset\supset \mathrm{supp}\, u)$ なる区分的に滑らかな境界を持つ有界積分領域 $\tilde{K}$ をとり, $\tilde{K}$ の近傍で,

$$u(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0)$$

$F_j(w) \in \mathcal{O}(\tilde{K} + i\Gamma_j(\delta)) \qquad j = 1, \cdots, N$

各 F_j は $\partial\tilde{K}$ に近傍に解析接続できる

ここで, $\Gamma_j(\delta) := \Gamma_j \cap \{y \in \mathbf{R}^n; |y_k| < \delta, k = 1, \cdots, n\}$

となるように $u(x)$ の境界値表示を選び, 各楔$\tilde{K} + i\Gamma_j(\delta)$ に対し, 積分路 γ_t^j を次のようにとる：各 j に対して, 定ベクトル $y^j \in \Gamma_j(\delta)$ を 1 つ選んで固定する. また, $\psi : \tilde{K} \to [0,1] : \mathrm{C}^0$ 級を ${}^\exists\rho > 0$ に対して,

$$\begin{cases} \psi(x) = 1, & \text{for } x \in \{x \in \tilde{K}; |x - \mathring{x}| > \rho, \mathring{x} \in \partial\tilde{K}\} \\ \psi(x) = 0, & \text{for } x \in \partial\tilde{K} \end{cases}$$

を満たすようにとって, $t\psi(x)y^j \in \Gamma_j(\delta)$ なる t に対して,

$$\gamma_t^j := \{(x + iy); x \in \tilde{K}, y = t\psi(x)y^j\}.$$

すると,

$$\begin{aligned}
|T_V^2 u(z;\lambda;\mu)| &= \left|\int u(x) \exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - x'')^2\right\}\right| \\
&= \left|\int_{\tilde{K}} u(x) \exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - x'')^2\right\}\right| \\
&\le \sum_{j=1}^N \left|\int_{\gamma_t^j} F_j(w) \exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2\right\}\right| \\
&\le \sum_{j=1}^N \sup_{w\in\gamma_t^j} |F_j(w)| \sup_{w\in\gamma_t^j} \left|\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2\right\}\right| |\gamma_t^j|
\end{aligned}$$

ここで, $|\gamma_t^j| = \int_{\gamma_t^j} 1|dw|$ とおく. このとき, $w \in \gamma_t^j$ で,

$$\begin{aligned}
&\left|\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2\right\}\right| \\
= &\left|\exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}(\mathrm{Im}\, z' - y')^2 + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{Im}\, z'' - y'')^2\right\}\right| \left|\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(\mathrm{Re}\, z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}\, z'' - x'')^2\right\}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times\left|\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}2i(\mathrm{Re}\ z'-x')(\mathrm{Im}\ z'-y')+\frac{\mu}{2}2i(\mathrm{Re}\ z''-x'')(\mathrm{Im}\ z''-y'')\right\}\right| \\
\leq\ & \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\}\exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}(|y'|^2+2|y'||\mathrm{Im}\ z'|)+\frac{\lambda}{2}(|y''|^2+2|y''||\mathrm{Im}\ z''|)\right\} \\
\leq\ & \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}(|y|^2+2|y||\mathrm{Im}\ z|)\right\} \\
=\ & \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}(2t\psi(x)|y^j||\mathrm{Im}\ z|+t^2(\psi(x))^2|y^j|^2)\right\} \\
\leq\ & \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\}\exp\left\{\lambda\left(tn\delta|\mathrm{Im}\ z|+\frac{t^2n^2\delta^2}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

また, $j=1,\cdots,N$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\sup_{w\in\gamma_t^j}|F_j(w)| &= {}^\exists M(t) \\
|\gamma_t^j| &< {}^\exists M' < +\infty \quad (t\in\{t;t\psi(x)y^j\in\Gamma_j(\delta)\})
\end{aligned}
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
& |T_V^2u(z;\lambda)| \\
\leq\ & \sum_{j=1}^N M'M(t)\ \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\}\exp\left\{\lambda\left(tn\delta|\mathrm{Im}\ z|+\frac{t^2n^2\delta^2}{2}\right)\right\} \\
\leq\ & \sum_{j=1}^N M'M(t)\ \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2+t(AC+B)\lambda\right\} \\
=\ & NM'M(t)\ \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2+t(AC+B)\lambda\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで, $A=n\delta, B=\dfrac{tn^2\delta^2}{2}, C=\sup_{z\in K}|\mathrm{Im}\ z|$ とする. このとき, $t<\dfrac{\varepsilon}{AC+B}$ なる t をとれば, $T_V^2u(z;\lambda)$ の評価を得る. □

Definition 2.3 (Second analytic wave front set) $u(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数とし, $\mathring{p}=\left(\mathring{x};\mathring{\xi}''\,dx'';\mathring{\eta}'\,\dfrac{\partial}{\partial\xi'}\right)\in\mathring{T}_V\mathring{T}^*\,M$ とする.

このとき, $\mathring{p}\notin WF_{a,V}^2(u)$ とは,

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ {}^\exists\varepsilon,{}^\exists r,{}^\exists\mu_0>0,{}^\exists f:]0,\mu_0[\to\mathbf{R}$:減少関数 s.t.

$$
|T_V^2u(z;\lambda;\mu)|\leq\exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2+\frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2-\varepsilon\mu\lambda\right\}
$$

$$
\left(\left|z'-\left(\mathring{x}'-i\,\mathring{\eta}'\right)\right|<r,\left|z''-\left(\mathring{x}''-i\,\mathring{\xi}''\right)\right|<r,\lambda>f(\mu)\right)
$$

$\mathring{T}_V\mathring{T}^*\,M$ の部分集合 $WF_{a,V}^2(u)$ は, V に沿った u の second analytic wave front set と呼ばれる.

3　正則パラメータを持つ超函数の特異性

ここでは," 正則パラメータを持つ超函数の第 2FBI 変換の評価" と" 三円定理を使った補題" を挙げ, 主定理を証明する.

Proposition 3.1 $u(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数とする. そのとき, u が $\overset{\circ}{x}$ の近傍で x_1 を正則パラメータに持つならば, 次を満たす正の数 δ, R が存在する：
for $\forall\varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$|T_V^2 u(z;\lambda;\mu)| \leq C_\varepsilon \ \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 + \varepsilon\lambda\right\}$$

$$(|\mathrm{Im}\ z_1| < \delta, |\mathrm{Im}\ \tilde{z}| < R, |\mathrm{Re}\ z - \overset{\circ}{x}\ | < \delta, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

ここで, $z^\vee = (z_2, \cdots, z_d), \tilde{z} = (z^\vee, z'')$ とする.

Proof) $\rho > 0$ に対し一般に,

$$\begin{cases} \Omega_\rho^1 := \{x_1 \in \mathbf{R}; |x_1 - \overset{\circ}{x}_1\ | < \rho\} \\ \tilde{\Omega}_\rho := \{\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n-1}; |x_j - \overset{\circ}{x}_j\ | < \rho,\ j = 2, \cdots, n\} \\ \Omega_\rho := \{x \in \mathbf{R}^n; |x_j - \overset{\circ}{x}_j\ | < \rho,\ j = 1, \cdots, n\} \\ U_\rho^1 := \{w_1 \in \mathbf{C}; |w_1 - \overset{\circ}{x}_1\ | < \rho\} \end{cases}$$

とする. $u(x)$ が $\overset{\circ}{x}$ の近傍で x_1 を正則パラメータに持つので, 次を満たす正の数 ρ が存在する：
$\exists\hat{u}(w_1, \tilde{x}) \in \mathcal{BO}(U_{3\rho}^1 \times \mathbf{R}^{n-1})$ s.t.

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\ \hat{u} \subset U_{3\rho}^1 \times \bar{\tilde{\Omega}}_\rho \\ u(x) = \hat{u}(w_1, \tilde{x})|_{\{\mathrm{Im}\ w_1 = 0\}} \qquad \text{on } \Omega_\rho. \end{cases}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &:= \chi_{\Omega_\rho^1}(x_1) \times (\hat{u}(w_1, \tilde{x})|_{\{\mathrm{Im}\ w_1 = 0\}}) \\ &= \chi_{\Omega_\rho^1}(x_1) \times \hat{u}(x) \end{aligned}$$

と定める. 定義の仕方より,

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\ \tilde{u} \subset \bar{\Omega}_\rho \\ u = \tilde{u} \qquad \text{on } \Omega_\rho \end{cases}$$

であることに注意. $T_V^2\tilde{u}(z;\lambda;\mu)$ を評価しよう.

$$\begin{aligned} &T_V^2\tilde{u}(z;\lambda;\mu) \\ = &\int_{\mathbf{R}} \exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z_1 - x_1)^2\right\} \chi_{\Omega_\rho^1}(x_1) \end{aligned}$$

$$\times\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\hat{u}(x_1,\tilde{x})\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee-x^\vee)^2-\frac{\lambda}{2}(z''-x'')^2\right\}d\tilde{x}\right)dx_1$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z_1-x_1)^2\right\}\chi_{\Omega^1_\rho}(x_1)$$

$$\times\left[\left(\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\hat{u}(w_1,\tilde{x})\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee-x^\vee)^2-\frac{\lambda}{2}(z''-x'')^2\right\}d\tilde{x}\right)\right|_{\{\mathrm{Im}\ w_1=0\}}\right]dx_1$$

このとき,

$$v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu):=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\hat{u}(w_1,\tilde{x})\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee-x^\vee)^2-\frac{\lambda}{2}(z''-x'')^2\right\}d\tilde{x}$$

とおく. v の特異スペクトルを評価すると, $\mathrm{SS}(v)=\phi$ となる. 故に

$$v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)\in\mathcal{O}(U^1_{3\rho}\times\mathbf{C}^{n-1}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C})$$

なので,

$$T^2_V\tilde{u}(z;\lambda;\mu)=\int_{\Omega^1_\rho}\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z_1-x_1)^2\right\}v(x_1,\tilde{z};\lambda;\mu)dx_1$$

Cauchy の積分公式より,

$$=\int_{\mathring{x}_1-\rho}^{\mathring{x}_1+\rho}\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z_1-w_1)^2\right\}v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)dw_1$$

<u>Step 1</u>　まず, $w_1\in U^1_\rho$ での $v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)$ の評価を与える. $\hat{u}(w_1,\tilde{x})$ は次のような境界値表示をもつ:

$^\forall\tilde{\Gamma}_1,\cdots,{}^\forall\tilde{\Gamma}_N\subset\mathbf{R}^{n-1}$: open convex cones s.t. $\mathrm{Int}(\tilde{\Gamma}_1^\circ)\cup\cdots\cup\mathrm{Int}(\tilde{\Gamma}_N^\circ)=\mathbf{R}^{n-1}$
に対して, $^\exists\delta>0,{}^\exists F_k(w)\in\mathcal{O}(U^1_{2\rho}\times\tilde{\Omega}_{2\rho}+i\tilde{\Gamma}_k(\delta))\quad(k=1,\cdots,N)\quad$ s.t.

$$\hat{u}(w_1,\tilde{x})=\sum_{k=1}^N F_k(w_1,\tilde{x}+i\tilde{\Gamma}_k0)$$

ここで, $\tilde{\Gamma}_k(\delta):=\tilde{\Gamma}_k\cap\{\tilde{y}\in\mathbf{R}^{n-1};|y_j|<\delta,j=2,\cdots,n\}$ である. さらに, $F_k(w)$ は $U^1_{2\rho}\times(\tilde{\Omega}_{2\rho}\setminus\bar{\tilde{\Omega}}_\rho)$ の近傍まで正則にのびる. 実際に, v を計算してみる.

$$v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)=\sum_{k=1}^N\int_{\gamma^k_t}F_k(w_1,\tilde{w})\exp\ \left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee-w^\vee)^2-\frac{\lambda}{2}(z''-w'')^2\right\}d\tilde{w}$$

ここで, γ^k_t は次のような積分路である:各kに対して, 定ベクトル $\tilde{y}^k\in\tilde{\Gamma}_k(\delta)$ を1つ選んで固定する. また, $\psi:\bar{\tilde{\Omega}}_{\frac{3}{2}\rho}\to[0,1]:C^0$ 級 を

$$\begin{cases}\psi(\tilde{x})=1, & \text{for } \tilde{x}\in\tilde{\Omega}_\rho\\ \psi(\tilde{x})=0, & \text{for } \tilde{x}\in\partial\tilde{\Omega}_{\frac{3}{2}\rho}\end{cases}$$

を満たすようにとって, $t\psi(\tilde{x})\tilde{y}^k\in\tilde{\Gamma}_k(\delta)$ なる t に対して

$$\gamma^k_t:=\{(\tilde{x}+i\tilde{y});\tilde{x}\in\bar{\tilde{\Omega}}_{\frac{3}{2}\rho},\tilde{y}=t\psi(\tilde{x})\tilde{y}^k\}$$

とおく. すると,

$$\left|\int_{\gamma_t^k} F_k(w)\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - w^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2\right\} d\tilde{w}\right|$$
$$\leq |\gamma_t^k| \sup_{\tilde{w}\in\gamma_t^k} |F_k(w)| \times \sup_{\tilde{w}\in\gamma_t^k} \left|\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - w^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2\right\}\right|.$$

ここで,$|\gamma_t^k| = \int_{\gamma_t^k} 1|d\tilde{w}|$ とおく. Remark 2.2 の $T_V^2 u(z;\lambda;\mu)$ の評価の証明と同様にして,

$$\leq |\gamma_t^k| \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\} \sup_{\tilde{w}\in\gamma_t^k} |F_k(w)|$$
$$\times \sup_{\tilde{w}\in\gamma_t^k} \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(t^2(n-1)^2\delta^2 + 2t(n-1)\delta|\mathrm{Im}\ \tilde{z}|\right\}$$

このとき, $w_1 \in U_\rho^1$ なので

$$\sup_{w_1\in U_\rho^1} \sup_{\tilde{w}\in\gamma_t^k} |F_k(w_1,\tilde{w})| \leq \sup_{(w_1,\tilde{w})\in \bar{U}_\rho^1\times\gamma_t^k} |F_k(w)| = {}^\exists M(t)$$

また, $t\psi(\tilde{x})\tilde{y}^k \in \tilde{\Gamma}_k(\delta)$ なる t に対して, $|\gamma_t^k| < {}^\exists M' < +\infty$ なので, あるコンパクト集合 $\tilde{K}$ $(\subset \mathbf{C}^{n-1})$ に対して, $A = (n-1)\delta, B = \dfrac{t(n-1)^2\delta^2}{2}, C = \sup_{\tilde{z}\in\tilde{K}}|\mathrm{Im}\ \tilde{z}|$ とおくと,

$$|v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)|$$
$$\leq NM'M(t)\exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 + t(AC+B)\lambda\right\}$$

したがって, $\tilde{K}$ を $\mathbf{C}^{n-1}$ の任意のコンパクト集合とするとき,
for ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$|v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)| \leq C_\varepsilon \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 + \varepsilon\lambda\right\}$$
$$(w_1 \in U_\rho^1, \tilde{z} \in \tilde{K}, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

<u>Step 2</u> $T_V^2\tilde{u}(z;\lambda;\mu)$ の評価

$$T_V^2\tilde{u}(z;\lambda;\mu) = \int_{\mathring{x}_1-\rho}^{\mathring{x}_1+\rho} \exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z_1 - w_1)^2\right\} v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)dw_1$$

を $\{z_1; |\mathrm{Re}\ z_1 - \mathring{x}_1| < \frac{\rho}{4}, |\mathrm{Im}\ z_1| < \frac{\rho}{4}\}$ で評価してみる. $\mathring{x}_1+\rho$ と $\mathring{x}_1-\rho$ を結ぶ積分路を γ_{z_1} とし,次のようにとる : $\varphi : \Omega_\rho^1 \to [0,1] : \mathrm{C}^0$ 級を

$$\begin{cases} \varphi(x_1) = 1, & \text{for } x_1 \in \Omega_{\frac{1}{2}\rho}^1 \\ \varphi(x_1) = 0, & \text{for } x_1 \in \partial\Omega_\rho^1 \end{cases}$$

を満たすようにとって

$$\gamma_{z_1} := \{(x_1 + iy_1); x_1 \in \overline{\Omega_\rho^1}, y_1 = \varphi(x_1)\ \mathrm{Im}\ z_1\}$$

すると

$$|T_V^2\tilde{u}(z;\lambda;\mu)| \le |\gamma_{z_1}| \sup_{w_1\in\gamma_{z_1}} |v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)| \sup_{w_1\in\gamma_{z_1}} \left|\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z_1-w_1)^2\right\}\right|$$

ここで, $|\gamma_{z_1}| = \int_{\gamma_{z_1}} 1|dw_1|$ とおく. このとき, $x_1 \in \Omega^1_{\frac{1}{2}\rho}$ では, $y_1 = \mathrm{Im}\ z_1$ なので

$$-\frac{\lambda\mu}{2}(\mathrm{Re}\ z_1 - x_1)^2 + \frac{\lambda\mu}{2}(\mathrm{Im}\ z_1 - y_1)^2 \le 0$$

また, $x_1 \in \bar{\Omega}^1_{\rho} \setminus \Omega^1_{\frac{1}{2}\rho}$ では, $|x_1 - \mathring{x}_1| \ge \frac{1}{2}\rho$ なので,

$$-\frac{\lambda\mu}{2}(\mathrm{Re}\ z_1 - x_1)^2 + \frac{\lambda\mu}{2}(\mathrm{Im}\ z_1 - y_1)^2 \le -\frac{\lambda\mu}{2}\left(\frac{\rho}{4}\right)^2 + \frac{\lambda\mu}{2}\left(\frac{\rho}{4}\right)^2 = 0$$

したがって, ある $C' > 0$ に対して,

$$|T_V^2\tilde{u}(z;\lambda;\mu)| \le C' \sup_{w_1\in\gamma_{z_1}} |v(w_1,\tilde{z};\lambda;\mu)|$$

$\gamma_{z_1} \subset U^1_\rho$ なので,Step 1 より任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たす $C_\varepsilon{}' > 0$ が存在する：

$$|T_V^2\tilde{u}(z;\lambda;\mu)| \le C_\varepsilon{}' \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 + \varepsilon\lambda\right\}$$

$$\left((|\mathrm{Im}\ z_1| < \frac{\rho}{4}, \left|\mathrm{Re}\ z_1 - \mathring{x}_1\right| < \frac{\rho}{4}, \tilde{z} \in \tilde{K}, \lambda > 0, 0 < \mu < 1\right)$$

<u>Step 3</u> $T_V^2(u-\tilde{u})(z;\lambda;\mu)$ の評価

$\check{u} = u - \tilde{u}$ とすると, $\check{u}$ はコンパクトな台を持つ超函数で, Ω_ρ 上で 0 である. $\check{u}(x)$ の境界値表示を

$$\check{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} G_j(w), \quad G_j(w) \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n + i\,\check{\Gamma}_j\,0)$$

とすると

$$\begin{aligned} T_V^2\check{u}(z;\lambda;\mu) &= \int_{\mathbf{R}^n} \check{u}(x)\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z'-x')^2 - \frac{\lambda}{2}(z''-x'')^2\right\}dx \\ &= \sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma^j} G_j(w)\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z'-w')^2 - \frac{\lambda}{2}(z''-w'')^2\right\}dw \end{aligned}$$

ここで, 積分路 γ^j は $^\exists\delta_1(\ >0\ )$ に対して,

$$\gamma^j = \{w \in \mathbf{C}^n; |w-x| < \delta_1, x \in \mathrm{supp}\ \check{u}, y \in \check{\Gamma}_j\}$$

ととる. すると,

$$|T_V^2\check{u}(z;\lambda;\mu)| \le \sum_{j=1}^{N} |\gamma^j| \sup_{w\in\gamma^j} |G_j(w)| \sup_{w\in\gamma^j} \left|\exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z'-w')^2 - \frac{\lambda}{2}(z''-w'')^2\right\}\right|$$

ここで, $|\gamma^j| = \int_{\gamma^j} 1|dw|$ とおく. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}(z'-w')^2 - \frac{\lambda}{2}(z''-w'')^2\right\} \\
&= \frac{\lambda\mu}{2}\{(\mathrm{Im}\ z'-y')^2 - (\mathrm{Re}\ z'-x')^2\} + \frac{\lambda}{2}\{(\mathrm{Im}\ z''-y'')^2 - (\mathrm{Re}\ z''-x'')^2\}
\end{aligned}
$$

であり, $^{\exists}R_1 > 0, \rho - 2\delta_1 > {}^{\exists}\rho' > 0$ に対して, $|\mathrm{Im}\ z_1| < \rho', |\mathrm{Im}\ z^\vee| < R_1, |\mathrm{Re}\ z' - \overset{\circ}{x}{}'\ | < \delta_1$ で,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Im}\ z'-y')^2 - (\mathrm{Re}\ z'-x')^2 &= (\mathrm{Im}\ z_1 - y_1)^2 + (\mathrm{Im}\ z^\vee - y^\vee)^2 - (\mathrm{Re}\ z'-x')^2 \\
&\leq (|\mathrm{Im}\ z_1| + |y_1|)^2 + (|\mathrm{Im}\ z^\vee| + |y^\vee|)^2 - (\mathrm{Re}\ z'-x')^2 \\
&\leq (\rho'+\delta_1)^2 + (|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + 2R_1\delta_1 + \delta_1^2) - (\rho - 2\delta_1)^2 \\
&= |\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \rho'^2 + \delta_1(2\rho' + 2R_1 + 2\delta_1) - (\rho - 2\delta_1)^2
\end{aligned}
$$

δ_1 をうまくとれば,

$$\leq |\mathrm{Im}\ z^\vee|^2$$

同様にして, $|\mathrm{Im}\ z''| < R_2, |\mathrm{Re}\ z'' - \overset{\circ}{x}{}''\ | < \delta_2$ で

$$(\mathrm{Im}\ z''-y'')^2 - (\mathrm{Re}\ z''-x'')^2 \leq |\mathrm{Im}\ z''|^2$$

したがって, $\min\{R_1, R_2\} = R, \min\{\rho', \delta_1, \delta_2\} = \delta'$ とすれば, 次を満たす $C > 0$ が存在する：

$$\left|T_V^2 \check{u}(z;\lambda;\mu)\right| = C\ \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\}$$

$$(|\mathrm{Im}\ z_1| < \delta', |\mathrm{Im}\ \tilde{z}| < R, |\mathrm{Re}\ z - \overset{\circ}{x}\ | < \delta', \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

故に, $\min\ \{\delta', \frac{\rho}{4}\} = \delta$ とし, $\tilde{K}$ を適当に決めれば,

$$
\begin{aligned}
|T_V^2 u(z;\lambda;\mu)| &\leq |T_V^2 \tilde{u}(z;\lambda;\mu)| + |T_V^2 \check{u}(z;\lambda;\mu)| \\
&\leq \{C + C_\varepsilon \exp(\varepsilon\lambda)\} \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\} \\
&\leq (C + C_\varepsilon)\exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 + \varepsilon\lambda\right\}
\end{aligned}
$$

$$(|\mathrm{Im}\ z_1| < \delta, |\mathrm{Im}\ \tilde{z}| < R, |\mathrm{Re}\ z - \overset{\circ}{x}\ | < \delta, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

□

Theorem 3.2 (Hadamard の三円定理) 函数 $f(w)$ が $\rho_1 < |w| < \rho_2\ (0 \leq \rho_1 < \rho_2)$ で正則なとき, $\rho_1 < r < \rho_2$ に対して,

$$M(r) = \sup_{|w|=r} |f(w)|$$

とすれば, log $M(r)$ は log r の凸関数である. すなわち,
$\rho_1 < r_1 < r < r_2 < \rho_2$ ならば,

$$\log\ M(r) \le \frac{\log\ r_2 - \log\ r}{\log\ r_2 - \log\ r_1} \log\ M(r_1) + \frac{\log\ r - \log\ r_1}{\log\ r_2 - \log\ r_1} \log\ M(r_2)$$

が成り立つ.

Lemma 3.3 $\bar{D} = \left\{ z = x + iy \in \mathbf{C}; x^2 + (\frac{y}{3/5})^2 \le 1 \right\}$ とし, $f(z)$ を $\bar{D}$ の近傍で定義された正則函数とする.

$$\begin{aligned} A &= \sup_{z \in D} |F(z)| \\ B &= \sup_{-4/5 \le x \le 4/5} |f(x)| \end{aligned}$$

とおくと, 次の評価を得る：

$$|f(x+iy)| \le \sqrt{AB} \quad \left(\left(\frac{x}{3\sqrt{2}/5} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}/5} \right)^2 \le 1 \right)$$

Proof) $z = z(w) = \dfrac{2}{5}\left(w + \dfrac{1}{w} \right)$ とおくとき, $1 < |w| < 2$ では, z は長軸 $[-1, 1]$, 短軸 $\left[-\frac{3}{5}i\ ,\ \frac{3}{5}i \right]$ の楕円から $\left[-\frac{4}{5}\ ,\ \frac{4}{5} \right]$ をくりぬいたものを動く. $F(w) = f(z(w))$ とおくと,

$$\limsup_{|w| \to 2} |F(w)| \le A$$

$$\limsup_{|w| \to 1} |F(w)| \le B$$

なので, 三円定理により,

$$|F(w)| \le \sqrt{AB} \quad \left(1 < |w| < \sqrt{2} \right)$$

故に,

$$|f(x+iy)| \le \sqrt{AB} \quad \left(\left(\frac{x}{3\sqrt{2}/5} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}/5} \right)^2 \le 1 \right)$$

を得る. □

Theorem 3.4 (正則パラメータに関する second analytic wave front set の伝播定理)
$\mathring{p} = \left(\mathring{x};\ \mathring{\xi}''\, dx''; \left(0, \mathring{\eta}^{\vee} \right) \dfrac{\partial}{\partial \xi'} \right) \in \mathring{T}_V \mathring{T}^* M$, $I\ (\subset \mathbf{R})$ は $\mathring{x}_1$ を含む開区間で, u はコンパクトな台を持つ超函数とするとき $\mathring{p} \notin WF^2_{a,V}(u)$ かつ u が $I \times (\mathring{\tilde{x}}$ の近傍) で x_1 を正則パラメータに持つならば,

$$\left\{ \left(x_1, \mathring{\tilde{x}};\ \mathring{\xi}''\, dx''; \left(0, \mathring{\eta}^{\vee} \right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right); x_1 \in I \right\} \cap WF^2_{a,V}(u) = \phi$$

が成り立つ.

Proof) $\overset{\circ}{x}_1$ を含む開区間 J で

$$J \times \left\{\left(\overset{\circ}{\tilde{x}};\ \overset{\circ}{\xi}{}''\, dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}{}^{\vee}\right) \frac{\partial}{\partial \xi'}\right)\right\} \cap WF^2_{a,V}(u) = \phi$$

となるものの最大が存在するので, それを J_0 とする. $J_0 = I$ を示せばよい. $J_0 = \ ]\alpha, \beta[$ とおいて, J_0 は I に真に含まれるとすると,

$$\left(\alpha, \overset{\circ}{\tilde{x}};\ \overset{\circ}{\xi}{}''\, dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}{}^{\vee}\right) \frac{\partial}{\partial \xi'}\right) \in WF^2_{a,V}(u)$$

or

$$\left(\beta, \overset{\circ}{\tilde{x}};\ \overset{\circ}{\xi}{}''\, dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}{}^{\vee}\right) \frac{\partial}{\partial \xi'}\right) \in WF^2_{a,V}(u)$$

なので,

$$\left(\beta, \overset{\circ}{\tilde{x}};\ \overset{\circ}{\xi}{}''\, dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}{}^{\vee}\right) \frac{\partial}{\partial \xi'}\right) \in WF^2_{a,V}(u)$$

として, 背理法を適用する.

u が $I \times (\overset{\circ}{\tilde{x}}$ の近傍) で x_1 を正則パラメータに持つという仮定より, 次を満たす正の数 δ_1, R が存在する：for $\ {}^\forall L > 0, {}^\exists C_L > 0$ s.t.

$$|T^2_V u(z; \lambda; \mu)| \le C_\varepsilon \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^{\vee}|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 + \varepsilon\lambda\right\}$$

$$(|\mathrm{Im}\ z_1| < 2\delta_1, |\mathrm{Im}\ \tilde{z}| < R, |\mathrm{Re}\ z - (\beta, \overset{\circ}{\tilde{x}})| < 2\delta_1, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

このとき, $\left\{z_1; \left(\dfrac{\mathrm{Re}\ z_1 - \beta'}{\rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{Im}\ z_1}{\frac{3\rho}{5}}\right)^2 \le 1, \beta' = \beta - \dfrac{\sqrt{17}}{5}\rho\right\}$ が $\{\ z_1; |\mathrm{Im}\ z_1| < 2\delta_1,$ $|\ \mathrm{Re}\ z_1 - \beta| < 2\delta_1\ \}$ に含まれるように $\rho\ (>0)$ を選ぶと, $s \in \left[\beta' - \dfrac{4}{5}\rho, \beta' + \dfrac{4}{5}\rho\right]$ に対して, $s \in J_0$ なので,

$$\left(s, \overset{\circ}{\tilde{x}};\ \overset{\circ}{\xi}{}''\, dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}{}^{\vee}\right) \frac{\partial}{\partial \xi'}\right) \notin WF^2_{a,V}(u)$$

$\iff {}^\exists\varepsilon_s, {}^\exists\delta_s, {}^\exists\mu_{0s} > 0, {}^\exists f_s :\ ]0, \mu_{0s}[\to \mathbf{R}$: 減少関数 s.t.

$$|T^2_V u(z; \lambda; \mu)| \le \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 - \varepsilon_s\mu\lambda\right\}$$

$$\left(|z_1 - s| < 2\delta_s, \left|(z^{\vee}, z'') - \left(\left(\overset{\circ}{x}{}^{\vee}, \overset{\circ}{x}{}''\right) - i\left(\overset{\circ}{\eta}{}^{\vee}, \overset{\circ}{\xi}{}''\right)\right)\right| < 2\delta_s, f_s(\mu) < \lambda\right)$$

このとき, $\{B_{\mathbf{C}}(s, \delta_s)\}_{s \in [\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho]}$ を見ると, $\left[\beta' - \dfrac{4}{5}\rho, \beta' + \dfrac{4}{5}\rho\right]$ がコンパクトなので, 有限部分被覆 $B_{\mathbf{C}}(s_1, \delta_{s_1}), \cdots, B_{\mathbf{C}}(s_N, \delta_{s_N})$ でそれを覆うので,

$$\begin{cases} \min\{\delta_{s_1}, \cdots, \delta_{s_N}\} = \delta_2 \\ \min\{\varepsilon_{s_1}, \cdots, \varepsilon_{s_N}\} = \varepsilon \\ \min\{\mu_{0s_1}, \cdots, \mu_{0s_N}\} = \mu_0 \\ \max\limits_{j=1,\cdots,N} f_{s_j}(\mu) = f(\mu) \end{cases}$$

とすると,

$$|T_V^2 u(z;\lambda;\mu)| \le \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 - \varepsilon\mu\lambda\right\}$$

$$\left(z_1 \in \left[\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho\right], \left|(z^\vee, z'') - \left(\left(\mathring{x}^\vee, \mathring{x}''\right) - i\left(\mathring{\eta}^\vee, \mathring{\xi}''\right)\right)\right| < 2\delta_2, f(\mu) < \lambda\right)$$

今,

$$\Phi_{\tilde{z}}(z_1;\lambda;\mu) = \exp\left\{-\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 - \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2\right\} T_V^2 u(z;\lambda;\mu)$$

というものを考えて,min $\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$ とすると,

$$|\Phi_{\tilde{z}}(z_1;\lambda;\mu)| \le \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z_1|^2 - \varepsilon\mu\lambda\right\}$$

$$\left(z_1 \in \left[\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho\right], \left|(z^\vee, z'') - \left(\left(\mathring{x}^\vee, \mathring{x}''\right) - i\left(\mathring{\eta}^\vee, \mathring{\xi}''\right)\right)\right| < 2\delta, f(\mu) < \lambda\right)$$

また,

$$|\Phi_{\tilde{z}}(z_1;\lambda;\mu)| \le C_L \exp(L\lambda)$$

$$(|\mathrm{Im}\ z_1| < 2\delta, |\mathrm{Im}\ \tilde{z}| < R, |\mathrm{Re}\ z - (\beta, \mathring{\tilde{x}})| < 2\delta, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

ここで,Lemma 3.3 を長軸 $[\beta' - \rho, \beta' + \rho]$, 短軸 $[\beta' - \frac{3}{5}\rho i, \beta' + \frac{3}{5}\rho i]$ の楕円に適用すると,

$$|\Phi_{\tilde{z}}(z_1;\lambda;\mu)| \le \sqrt{C_L} \exp\left(-\frac{-L + \varepsilon\mu}{2}\lambda\right) \tag{1}$$

$$\left(\left(\frac{\mathrm{Re}\ z_1 - \beta'}{(3\sqrt{2}/5)\rho}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im}\ z_1}{(\sqrt{2}/5)\rho}\right)^2 \le 1, |(z^\vee, z'') - \left(\left(\mathring{x}^\vee, \mathring{x}''\right) - i\left(\mathring{\eta}^\vee, \mathring{\xi}''\right)\right)| < 2\delta, f(\mu) < \lambda\right)$$

L は任意なので, $L = \frac{1}{4}\varepsilon\mu$ とおくと,

$$(1)\ の右辺 = \sqrt{C_{\frac{1}{4}\varepsilon\mu}}\ \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon\mu\lambda\right)$$

このとき,

$$g(\mu) = \frac{4}{\varepsilon}\frac{1}{\mu}\log\ C_{\frac{1}{4}\varepsilon\mu}$$

とおくと, $g(\mu)$ は減少関数であり, $\lambda > g(\mu)$ で

$$\sqrt{C_{\frac{1}{4}\varepsilon\mu}}\ \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon\mu\lambda\right) < \exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon\mu\lambda\right)$$

したがって, $\tilde{f}(\mu) = \max\ \{\mathrm{f}(\mu), \mathrm{g}(\mu)\}, \varepsilon' = \frac{1}{4}\varepsilon$ とおくと,

$$\begin{aligned}|T_V^2 u(z;\lambda;\mu)| &\le \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 - \varepsilon'\mu\lambda\right\}\\ &\le \exp\left\{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\ z'|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\ z''|^2 - \varepsilon'\mu\lambda\right\}\end{aligned}$$

$$\left(\left(\frac{\mathrm{Re}\ z_1 - \beta'}{(3\sqrt{2}/5)\rho}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im}\ z_1}{(\sqrt{2}/5)\rho}\right)^2 \le 1, \left|(z^\vee, z'') - \left(\left(\mathring{x}^\vee, \mathring{x}''\right) - i\left(\mathring{\eta}^\vee, \mathring{\xi}''\right)\right)\right| < 2\nu, \tilde{f}(\mu) < \lambda\right)$$

故に, $\beta \in J_0$ となって矛盾. □

参考文献

[1] 金子 晃
超函数入門上, 東京大学出版会 (1980)
[2] 岡田 靖則
Second microlocal singularities of tempered and Gevrey classes, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo. Vol.39.No.3.pp.475-505(1992)
[3] 岡田 靖則, 戸瀬 信之
FBI transformation and second microlocalization -Equivalence between second analytic wave front sets and second singular spectrums, J. Math. Pures. Appl. Vol.70.pp.427-453(1991)
[4] J.M.Bony
Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentials à coefficients analytiques,Astérisque.Vol.34-35.Soc.Math.de.France. pp.43-92(1976)