数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 79-93

正則なデータを持つ Fuchs 型Cauchy 問題の解の特異性

山根英司 (Hideshi Yamane)[1]

Abstract

Baouendi と Goulaouic によると，ウェイト $m-m'$ の Fuchs 型 Cauchy 問題は，データが正則で特性指数が整数$\geq m-m'$ の値を取らないとき，正則な解をただ一つ持つ。筆者はいくつかの特性指数が整数$\geq m-m'$ の値を取るときの解の特異性について調べた。なお，97年9月に数理研で講演したときよりも結果は強くなっている。

1 イントロダクション

$\mathbf{C}_t\times\mathbf{C}_x^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, の原点 $(0,0)$ の近傍で, 次の形のCauchy問題を考えよう：Ω を$0\in\mathbf{C}_x^n$ の開近傍とし，$P=P(t,x,D_t,D_x)$ を正則な係数を持つ m 階の線型偏微分作用素とする： ここで $D_t=\partial/\partial t$, $D_x=(D_1,\ldots,D_n)=(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n)$。 P はウェイト $m-m'$ の Fuchs型作用素とする。すなわち

$$
\begin{aligned}
P(t,x,D_t,D_x) &= t^{m'}D_t^m+a_{m-1}(x)t^{m'-1}D_t^{m-1}+\cdots+a_{m-m'}(x)D_t^{m-m'} \\
&\quad +\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\beta|\leq m-j}t^{\alpha(j)}a_{j\beta}(t,x)D_t^jD_x^\beta。
\end{aligned}
$$

ここで $0\leq m'\leq m$, $\alpha(j)=\max\{0,j-(m-m')+1\}$, $D_x^\beta=D_1^{\beta_1}\cdots D_n^{\beta_n}$ であり，$|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n$。また $a_{m-j}(x)$ $(j=1,\ldots,m')$, $a_{j\beta}(t,x)$ $(j=0,\ldots,m-1,\ |\beta|\leq m-j)$ はそれぞれ Ω, $\{t;\,|t|<T\}\times\Omega$ の正則関数 $(T>0)$ とする。

作用素

$$
P_m(t,x,D_t,\hat{D}_x)=t^{m'}D_t^m+a_{m-1}(x)t^{m'-1}D_t^{m-1}+\cdots+a_{m-m'}(x)D_t^{m-m'}
$$

[1]275 千葉県習志野市芝園2-1-1 千葉工業大学数学教室 yamane@cc.it-chiba.ac.jp
1991 Mathematics Subject Classifications: 35A20

を P の Fuchsian principal part と呼ぶ。

P の特性多項式とは

$$\begin{aligned} C(\lambda, x) &= t^{-\lambda} t^{m-m'} P_m t^{\lambda} \\ &= \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_{m-1}(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) \\ &\qquad + \cdots + a_{m-m'}(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+m'+1) \end{aligned}$$

で定義されるものであり，その根（特性指数と呼ばれる）を

$$\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{m'}(x), \lambda_{m'+1} = 0, \lambda_{m'+2} = 1, \ldots, \lambda_m = m - m' - 1。$$

で表わす。

この種の作用素の研究を始めたのは Baouendi と Goulaouic ([3]) である。彼らによる基本的な結果を述べる：

定理 [Baouendi-Goulaouic] x^* を Ω の点とする。もし任意の整数 $\lambda \geq m-m'$ について $C(\lambda, x^*) \neq 0$ であれば，$(t,x) = (0,x^*)$ の近傍の任意の正則関数 $f(t,x)$ と $x = x^*$ の近傍の任意の正則関数 $f_0(x), \ldots, f_{m-m'-1}(x)$ に対して，$(t,x) = (0,x^*)$ の近傍で正則関数 $u(t,x)$ が一意に存在して次を満たす：

$$\text{(IVP)} \qquad \begin{cases} Pu = f, \\ D_t^{\lambda} u(0,x) = f_{\lambda}(x) & (0 \leq \lambda \leq m-m'-1)。\end{cases}$$

この論説では (IVP) を次の条件の下で考える:

- ある整数 $\lambda \geq m-m'$ に対して $C(\lambda, 0) = 0$ であり，任意に固定された整数 $\lambda \geq m-m'$ に対して $C(\lambda, x) \not\equiv 0$,
- $f(t,x)$ は $(t,x) = (0,0)$ の近傍で正則,
- $f_0(x), \ldots, f_{m-m'-1}(x)$ は $x = 0$ の近傍で正則。

集合 V を

$$V = \{x \in \Omega;\ \text{ある整数 } \lambda \geq m-m' \text{ に関して } C(\lambda, x) = 0\}$$

で定義する。これは Ω の余次元 1 の解析的集合である。より詳しくいうと，各 $\lambda \geq m-m'$ に対して $V_{\lambda} = \{x \in \Omega;\ C(\lambda, x) = 0\}$ と置くと，$\{V_{\lambda}\}_{\lambda \geq m-m'}$

は Ω の解析的集合の局所有限な族を成し，また明らかに $V=\cup_{\lambda\geq m-m'}V_\lambda$ である。

任意の点 $x^*\in\Omega\setminus V$ に対し, 上記の定理の仮定が満たされ, V は解 u の解析接続の障害となる。u が V の近くでどれだけ解析接続されるか, というのは自然な問題である。

$d(x)$ を点 $x\in\Omega$ から $\partial(\Omega\setminus V)=\partial\Omega\cup V$ までの距離とする。もし x が $x=0\in\mathbf{C}^n_x$ に十分近ければ, $d(x)$ は x から V までの距離に他ならない。

次が成り立つ：

命題 1 (IVP) の解 $u(x)$ は

$$\{(t,x)\,;\,|t|<\tilde{C}d(x)^m,\ x\in\tilde{\Omega}\}$$

の形の領域で正則である。ここで $\tilde{\Omega}$ は $x=0$ の近傍であり, $\tilde{C}$ は t と x によらない正定数。

もっと詳しい結果を示すことができる。それは $I(P)$, $0\leq I(P)\leq m$, という量を用いて記述される。$I(P)$ は P とその Fuchsian principal part P_m との差を表わす。定義には Newton polygon に似たものを使う。なお，$P-P_m$ の低階項は $I(P)$ に寄与しない。

$$\begin{aligned}P-P_m &= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\beta|\leq m-j} t^{\alpha(j)}a_{j\beta}(t,x)D_t^jD_x^\beta,\\ \alpha(j) &= \max\{0,j-(m-m')+1\}\end{aligned}$$

であることを思い出そう。$a_{j\beta}$ を t で巾級数展開して,

$$P-P_m=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\beta|\leq m-j}\sum_{i=0}^{\infty}t^ia_{ij\beta}(x)D_t^jD_x^\beta,$$
$$\text{ここで } i\leq j-(m-m') \text{ のとき } a_{ij\beta}(x)\equiv 0$$

と書ける。各 $j=0,1,\ldots,m-1$ に対して, $\{1,2,\ldots\}\times\{m-j\}$ の部分集合 $N_j(P)$ を

$$\begin{aligned}&(k,m-j)\in N_j(P)\\ &\Longleftrightarrow j+|\beta|=m \text{ を満たすある } \beta \text{ に対して } a_{k+j-(m-m'),j,\beta}(x)\not\equiv 0\end{aligned}$$

で定義する。明らかに $N_j(P)$ は P の主部だけで決まる。

$N(P)$ を $N_0(P)$, $N_1(P)$, …, $N_{m-1}(P)$ の和集合とすると，$N(P)$ は $\{1,2,\ldots\}\times\{1,\ldots,m\}$ の部分集合である。

$$I(P)=\max\{l/k\,;\,(k,l)\in N(P)\}$$

と置く。ただし，もし $N(P)=\emptyset$ ならば $I(P)=0$ と置く。明らかに $0\le I(P)\le m$ である。

$k_j\ge 1$ を $(k,m-j)\in N_j(P)$ となる最小の k とする。ただし, もし $N_j(P)=\emptyset$ ならば $k_j=\infty$ と置く。

$$I(P)=\max_j\frac{m-j}{k_j}$$

である。

主定理を述べよう。

主定理 (IVP) の解 $u(t,x)$ は

$$\{(t,x)\,;\,|t|<\tilde{C}d(x)^{I(P)},\ x\in\tilde{\Omega}\}$$

の形の領域で正則である。ここで $\tilde{\Omega}$ は $x=0$ の開近傍であり, $\tilde{C}$ は t と x によらない正定数である。ただし，もし $I(P)=0$ ならば, この領域は

$$\{(t,x)\,;\,|t|<\tilde{C},\ x\in\tilde{\Omega}\setminus V\}$$

であると解釈する。

Fuchs 型 Cauchy 問題が特異なデータを持つ場合, あるいは特性指数が non-generic な値を持つ場合についてはいくつかの研究がある。例えば [5] や [6] を見よ。これらの論文では，初期値の特異点や (筆者の記号でいう) V は非特異超曲面だと仮定されている。また作用素の主表象はある種の factorization を持つと仮定されており, その結果，相関数について詳しく調べることができる。

一方この論説では，V は余次元 1 の任意の解析的集合でありうるし, また，主部の factorization についての仮定は何も置かない。

2　積分作用素

このセクションでは [3] に従う。

$Q(t,x,D_t,D_x)$ を m 階でウェイト 0 の Fuchs 型偏微分作用素とする。$\mu_r(x)$ $(r=1,2,\dots,m)$ でその特性指数を表わす。

また全ての r に関して $\mathrm{Re}\,\mu_r(0)<0$ と仮定する。そうすると,原点の十分近くで, 全ての r に関して $\mathrm{Re}\,\mu_r(x)<0$ となる。

もし $g(t,x)$ が $(t,x)=(0,0)$ の近くで正則ならば

$$\begin{aligned} v(t,x) &= H[g](t,x) \\ &= \int_{[0,1]^m} s_1^{-\mu_1(x)-1}\cdots s_m^{-\mu_m(x)-1} g(s_1\cdots s_m t,x)ds_1\cdots ds_m \end{aligned}$$

は $Q_m v=g$ の一意な正則解を与える。ここで Q_m は Q の Fuchsian principal part である。

$H[g]$ の他のやり方で書くことができる:

$$H[g]=\frac{1}{m!}\sum_{\pi\in S_m}\int_{[0,1]^m} s_{\pi(1)}^{-\mu_1(x)-1}\cdots s_{\pi(m)}^{-\mu_m(x)-1} g(s_1\cdots s_m t,x)ds_1\cdots ds_m。$$

ここで S_m は m 次対称群。$H[g]$ が正則であることは $\sum_{\pi\in S_m} s_{\pi(1)}^{z_1}\cdots s_{\pi(m)}^{z_m}$ に次の補題を当てはめれば分かる。

補題 1 $F(z)$ は $\mathbf{C}_z^m$, $z=(z_1,\dots,z_m)$, の整関数で対称だとする:

$$任意の\pi\in S_mに対し F(z_1,\dots,z_m)=F(z_{\pi(1)},\dots,z_{\pi(m)})。$$

$p_1(z),\dots,p_m(z)$ を

$$\begin{aligned} &(X-z_1)(X-z_2)\cdots(X-z_m) \\ =\;& X^m-p_1X^{m-1}+p_2X^{m-2}+\cdots+(-1)^{m-1}p_{m-1}X+(-1)^m p_m \end{aligned}$$

で定義する。ここで X は不定元 。このとき $\mathbf{C}_p^m$, $p=(p_1,\dots,p_m)$, 上の整関数 $G(p_1,\dots,p_m)$ が一意に存在して, $F(z)=G(p_1(z),\dots,p_m(z))$ が成り立つ。

証明 対称多項式の列 $\{F_k(z)\}$, $\deg F_k=k$ が存在して, F_k は F に広義一様収束する。p の k 次多項式 $G_k(p)$ が存在して $F_k(z)=G_k(p_1(z),\dots,p_m(z))$ が成り立つ。

一方,任意の $R>0$ に対して $N>0$ が存在して, $|p(z)|<R\Rightarrow|z|<N$ が成り立つ。

ゆえに $\{G_k(p)\}$ は $|p|<R$ における Cauchy 列となり, したがってある整関数 $G(p)$ に収束する。 □

もし x が原点に十分近ければ, g と (t,x) によらない正定数 C が存在して,

$$|H[g](t,x)| \leq C \sup_{|\tau|\leq|t|} |g(\tau,x)|$$

が成り立つ。

主定理を証明するには $H[g]$ に関する評価が他にも必要である。

$k=0,1,\ldots,m$ に対し,

$$H_k[g](t,x) = \int_{[0,1]^k} s_1^{-\mu_1(x)-1}\cdots s_k^{-\mu_k(x)-1} g(s_1\cdots s_k t, x)\,ds_1\cdots ds_k$$

と置く。

明らかに $H_m[g]=H[g]$。 $k<m$ に対し, 関数 $H_k[g]$ は x について正則とは限らないが, 次の評価は確かに成り立つ：

$$|H_k[g](t,x)| \leq C_k \sup_{|\tau|\leq|t|} |g(\tau,x)|。$$

ここで C_k は g と (t,x) によらない正定数。

公式

$$tD_tH_k[g] = \mu_k(x)H_k[g] + H_{k-1}[g]$$

を繰り返して用いると, x が原点に十分近いとき

$$|(tD_t)^jH[g](t,x)| \leq C' \sup_{|\tau|\leq|t|} |g(\tau,x)| \quad (j=0,1,\ldots,m)$$

であることが分かる。ここで C' は g と (t,x) によらない正定数。$(tD_t)^jH$ は(有界) 積分作用素であるが, $(tD_t)^j$ 自体はそうではないことに注意しよう。

$(D_tt)^j$ は $1, tD_t, \ldots, (tD_t)^j$ の線型結合だから, 次の評価が得られる：

命題 2 もし x が原点に十分近ければ, g と (t,x) によらない正定数 A が存在して

$$|(D_tt)^jH[g](t,x)| \leq A \sup_{|\tau|\leq|t|} |g(\tau,x)| \quad (j=0,1,\ldots,m)$$

注意 D_tt を tD_t よりも好むのは, 前者が正則関数の Fréchet 空間の topological automorphism であるのに対して, 後者は全射でも単射でもないからである。

積分作用素をもう一つ導入しよう。 $g=g(t)$ に対して

$$G_l[g](t)=\int_{[0.1]^l} g(s_1\cdots s_l t)ds_1\cdots ds_l$$

と定義する。容易に分かるように $G_l(D_t t)^l=$identity , $(D_t t)^j=G_{m-j}(D_t t)^m$ である。さらに,

補題 2 もし $|g(t)|\leq |t|^p$ ならば

$$|G_l[g](t)|\leq \frac{|t|^p}{(p+1)^l}。$$

証明 $|G_l[g](t)|\leq \int_0^1 ds_1\cdots\int_0^1 ds_l\{s_1^p\cdots s_l^p|t|^p\}$。 □

3 ウェイト 0 の場合の証明

このセクションでは 主定理の $m=m'$ の場合を証明する: すなわち作用素 P は ウェイト 0 だと仮定する。この場合 (IVP) では初期条件を課さない。まず $f(t,x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}f_\lambda(x)t^\lambda$, $u(t,x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}u_\lambda(x)t^\lambda$ と書くと下記の漸化式が成り立つ:

$$\begin{aligned} C(0,x)u_0(x) &= f_0(x) \\ C(\lambda,x)u_\lambda(x) &= f_\lambda(x)+\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}P_\lambda^\nu(x,D_x)u_\nu(x), \quad \lambda=1,2,\ldots。\end{aligned}$$

ここで $P_\lambda^\nu(x,D_x)$ はある微分作用素。x の関数 $C(\lambda,x)$ は原点を含むある解析的集合の上で消えるかもしれないが, 恒等的に消えることはないと仮定されているのだった。よって各 $u_\lambda(x)$ は有理型関数として一意に定まる。singular set は $\cup_{\nu\leq\lambda}V_\nu\subset V$ に含まれる。

次に $\mathrm{Re}\,\lambda_r(0)<h\in\mathbf{N}$ ($r=1,\ldots,m$) と仮定する。明らかに $Q=t^{-h}Pt^h$ は m 階の Fuchs型微分作用素でウェイトは 0 である。これの特性指数を $\mu_r(x)$ と表わすと$\mu_r(x)=\lambda_r(x)-h$ であり, 任意の r に対して $\mathrm{Re}\,\mu_r(0)<0$ である。さらに $N(P)=N(Q)$ が示される。

$u(t,x)=\sum_{\lambda=0}^{h-1}u_\lambda(x)t^\lambda+t^h v(t,x)$ と置くと,

$$P(t^h v)=f-P\left(\sum_{\lambda=0}^{h-1}u_\lambda(x)t^\lambda\right)$$

となる。この方程式は

$$Qv = t^{-h}\left\{f - P\left(\sum_{\lambda=0}^{h-1} u_\lambda(x)t^\lambda\right)\right\}$$

に同値である。右辺を $g(t,x)$ と表わす。これは t について正則だが x についてはV に沿って singular である。

下記の条件の下で $Qv = g$ を解けばよい：

- $x = 0$ の近傍で $\mathrm{Re}\,\mu_r(x) < 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$
- 正定数 C_g と正整数 m_g が存在して $|g(t,x)| \le C_g/d(x)^{m_g}$ が $(t,x) = (0,0)$ の近傍で成り立つ。

この g に関する評価は次の補題から出る。補題の証明はこの講究録のもう一つの論説の付録に書いた。(そこではもう少し強い形で述べた。)

補題 3 $F(x)$ を $\mathbf{C}^n_x$ の原点の近傍の正則関数とする。$F(0) = 0$, $F \not\equiv 0$ と仮定する。$d(x)$ を点 x から $\{x;\, F(x) = 0\}$ への距離とする。このとき，正定数 C と正整数 M が存在して，原点の十分近くで

$$|F(x)| \ge Cd(x)^M\text{。}$$

$$Q - Q_m = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\beta|\le m-j}\sum_{k=0}^{\infty} t^k b_{k+j,j,\beta}(x)(t^jD_t^j)D_x^\beta$$

と置く。ある β，$|\beta| = m - j$，について $b_{k+j,j,\beta}(x) \ne 0$ が成り立つとき，そのときに限り，$(k, m-j) \in N_j(Q) = N_j(P)$ である。

$k_j \ge 1$ が，$(k, m-j) \in N_j(Q) = N_j(P)$ が成り立つ最小の k であることを思い出そう。

$Q_m - Q$ は次の形の表示を持つ：

$$Q_m - Q = \sum_{j=0}^{m-1}\{t^{k_j}R_j(t,x,D_x) + tS_j(t,x,D_x)\}(D_tt)^j\text{。}$$

ここでもし $N_j(Q) \ne \emptyset$ ならば $\mathrm{ord}\,R_j = m - j$ であり，もし $N_j(Q) = \emptyset$ ならば $R_j = 0$ である。さらに $\mathrm{ord}\,S_j \le m - j - 1$，$[R_j, t] = [S_j, t] = 0$ である。

$t^jD_t^j$ を使った定式化から $(D_tt)^j$を使った定式化へ移ったわけだが, これには何の問題もない。なぜなら

$$t^jD_t^j = (D_tt)^j + \sum_{0\le k\le j-1} C_{jk}(D_tt)^k,\ C_{jk}\in \mathbf{Z},$$

だからである。

方程式 $Qv = g$ は次の積分方程式と同値である：

$$v = H\left[g + \sum_{j=0}^{m-1}(t^{k_j}R_j + tS_j)(D_tt)^jv\right]。$$

ここで H は §2 で導入された積分作用素。この積分方程式を逐次近似で解こう。関数列 $\{v_p(t,x)\}_p$ を

$$\begin{aligned} v_0 &= 0, \\ v_{p+1} &= H\left[g + \sum_{j=0}^{m-1}(t^{k_j}R_j + tS_j)(D_tt)^jv_p\right] \quad (p\ge 0) \end{aligned}$$

で定義する。解 v は $v = \lim_p v_p$で得られる。 $w_p = (D_tt)^m(v_{p+1} - v_p)$ と置くと

$$w_{p+1} = (D_tt)^mH\left[\sum_{j=0}^{m-1}(t^{k_j}R_j + tS_j)G_{m-j}w_p\right] \quad (p\ge 0)。$$

$\sum_p w_p$ が収束するならば極限 $v = \lim_p v_p$が存在する。これは $(D_tt)^m$ が topological automorphism だからである。

$|g(t,x)| \le C_g/d(x)^{m_g}$ だから, $v_1 = H[g]$ に対しても同様の評価が成り立つ。よって正定数$C' > 0$, $a > 0$ が存在して$|w_0(t,x)| \le C'/d(x)^a$ が $(t,x) = (0,0)$ の十分近くで成り立つ。

さて, p と (t,x) によらない正定数 $C > 0$ が存在して

$$|w_p(t,x)| \le C^{p+1}\frac{|t|^p}{d(x)^{mp+a}} \tag{1}$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x\in\tilde{\Omega}$, $p\ge 0$ に対して成り立つことを証明しよう。ここで $\tilde{T}$ は十分小さい正定数で, $\tilde{\Omega}$ は$x = 0$ の十分小さい近傍である。

$p = 0$ の場合の証明は既に終わっている。(1) が p に対して成り立っていると仮定しよう。そうすると補題 2 により

$$|G_{m-j}w_p(t,x)| \le \frac{C^{p+1}}{(p+1)^{m-j}}\frac{|t|^p}{d(x)^{mp+a}}。 \tag{2}$$

ここで次の補題が必要となる：

補題 4 $F(x)$ を $\mathbf{C}_x^n$ の領域 U の正則関数とする。$d(x)$ を点 $x \in U$ から U の境界までの距離とする。任意の $x \in U$ に対して $|F(x)| \leq 1/d(x)^l$, $l > 0$, と仮定する。このとき $|D_jF(x)| \leq e(1+l)/d(x)^{1+l}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ である。

証明 $j = 1$ とすると

$$D_1F(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{F(y, x_2, \ldots, x_n)}{(y - x_1)^2}dy$$

である。ここで Γ は $\Gamma = \{y;\, |y - x_1| = d(x)/(1+l)\}$ で定義される円である。このとき任意の $y \in \Gamma$ に対して

$$d(y, x_2, \ldots, x_n) \geq d(x) - \frac{1}{1+l}d(x) = \frac{l}{1+l}d(x)。$$

証明の残りは $\{(1+l)/l\}^l \leq e$ を用いる通常の技法でできる。 □

(1) の証明に戻ろう。

$t^{k_j}R_j + tS_j \in t\mathcal{D}(m-j)$ が成り立つ。ここで $\mathcal{D}(m-j)$ は高々 $m-j$ 階の微分作用素の全体の集合。補題 4 と (2) から

$$\begin{aligned} &|(t^{k_j}R_j + tS_j)G_{m-j}w_p| \\ \leq\ & C^{p+1}C_j'\frac{(mp+a+1)_{m-j}}{(p+1)^{m-j}}\frac{|t|^{p+1}}{d(x)^{mp+m+a}} \end{aligned}$$

となる。ただし C_j' は p によらない正定数。ここで Pochhammer の記号を用いた：

$$(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)。$$

容易に分かるように $(mp+a+1)_{m-j}/(p+1)^{m-j}$ は p によらない正定数で抑えられる。よって C が十分大きければ，命題 2 により帰納法が進む。(1) の証明がこれで終わった。

次の目標は (1) よりも詳しい評価を得ることである。その証明では次の補題が必要になる：

補題 5 M を正定数とし,

$$|w(t,x)| \leq \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}}$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$, $k > 0$, $l > 0$ に対して成り立つと仮定する。さらに $0 < l/k \leq M$ と仮定する。このとき (k,l) と (t,x) によらない正定数 $C_j^{(1)} = C_j^{(1)}(a,M)$, $C_j^{(2)} = C_j^{(2)}(a,M)$ が存在して

$$\begin{aligned} |t^{k_j} R_j G_{m-j} w(t,x)| &\leq C_j^{(1)} \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}}, \\ |t S_j G_{m-j} w(t,x)| &\leq C_j^{(2)} \frac{1}{k} \frac{|t|}{d(x)^{m-1}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}} \end{aligned}$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$ に対して成り立つ。

証明 正定数 $C(R_j)$ が存在して

$$|R_j G_{m-j} w(t,x)| \leq C(R_j) \frac{(l+a+1)_{m-j}}{(k+1)^{m-j}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a+m-j}}。$$

もし $0 < l/k \leq M$ ならば $(l+a+1)_{m-j}/(k+1)^{m-j}$ は (k,l) によらない正定数で抑えられる。

次に $\operatorname{ord} S_j \leq m-j-1$ なので，正定数 $C(S_j)$ が存在して

$$\begin{aligned} |S_j G_{m-j} w(t,x)| &\leq C(S_j) \frac{(l+a+1)_{m-j-1}}{(k+1)^{m-j}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a+m-j-1}} \\ &\leq C(S_j) \frac{(l+a+1)_{m-j-1}}{(k+1)^{m-j-1}} \frac{1}{k+1} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a+m-j-1}}。\end{aligned}$$

もし $0 < l/k \leq M$ ならば $(l+a+1)_{m-j-1}/(k+1)^{m-j-1}$ は (k,l) によらない正定数で抑えられる。 □

正整数 $q \geq 1$ を固定し,

$$C_3 = A \max\{C_j^{(i)}\,;\, i=1,2,\ j=0,1,\ldots,m-1\}$$

と置く。ここで A は命題 2 のものである。

命題 3 もし $p \geq q$ ならば

$$|w_p(t,x)| \leq C_3^{p-q}\left(\sum_j{}' \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \frac{m}{q}\frac{|t|}{d(x)^{m-1}}\right)^{p-q} \cdot C^q \frac{|t|^q}{d(x)^{mq+a}}$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$ に対して成り立つ。ここで $\sum_j{}'$ は $N_j(Q) \neq \emptyset$ を満たす j たちに関する和である。

証明　$p = q$ の場合は (1) に含まれているので証明済みである。
p の場合に求める評価が成り立つと仮定しよう。つまり, 次を仮定する :

$$|w_p(t,x)| \leq \sum_{(k,l)\in I_p} C_{kl}^{(p)} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}}。$$

ここで I_p は $\{(k,l)\,;\, k \geq q,\ l \geq mq,\ 0 < l/k \leq m\}$ のある有限部分集合であり, $C_{kl}^{(p)}$ は正定数である。補題 5 と命題 2 を用いて

$$\begin{aligned}
&|w_{p+1}(t,x)| \\
\leq\ & \sum_{(k,l)\in I_p} AC_{kl}^{(p)}\left(\sum_j{}' C_j^{(1)}\frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(2)}\frac{1}{q}\frac{|t|}{d(x)^{m-1}}\right)\frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}} \\
=\ & A\left(\sum_j{}' C_j^{(1)}\frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(2)}\frac{1}{q}\frac{|t|}{d(x)^{m-1}}\right)\sum_{(k,l)\in I_p} C_{kl}^{(p)}\frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}} \\
\leq\ & C_3\left(\sum_j{}' \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \frac{m}{q}\frac{|t|}{d(x)^{m-1}}\right)\sum_{(k,l)\in I_p} C_{kl}^{(p)}\frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}}
\end{aligned}$$

を得る。よって帰納法が進む。 □

$q = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\tilde{\Omega}_q = \{(t,x)\,;\, |t| < \tilde{C}d(x)^{I(Q)},\ |t| < \frac{q}{3mC_3}d(x)^{m-1},\ x \in \tilde{\Omega}\}, \quad \tilde{C} > 0,$$

と置く。このとき

命題 4 q によらない正定数 $\tilde{C}$ が存在して, 級数 $\sum_{p\geq 0} w_p$ は $\tilde{\Omega}_q$ で収束する。

証明 $\sum_{p\geq q} w_p$ の収束を示せばよい。

まず $I(Q) = \max\{(m-j)/k_j\,;\, N_j(Q) \neq \emptyset\}$ に注意しよう。したがって $k_j I(Q) \geq m-j$, $d(x)^{k_j I(Q)} \leq d(x)^{m-j}$となる。ここで $\tilde{\Omega}$ は，$d(x) < 1$ が任意の $x \in \tilde{\Omega}$ に対して成り立つように十分小さく取っている。

$\tilde{C} > 0$ を，$\tilde{C}^{k_j} < 1/3mC_3$ が任意の $j \in \{j\,;\, N_j(Q) \neq \emptyset\}$ に対して成り立つように十分小さく取る。このときもし $|t| < \tilde{C} d(x)^{I(Q)}$ならば

$$\sum_j{}' \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} \leq \sum_j{}' \left(\frac{|t|}{d(x)^{I(Q)}}\right)^{k_j} \leq \sum_j{}' \tilde{C}^{k_j} < \frac{1}{3C_3}$$

である。

次にもし $|t| < qd(x)^{m-1}/3mC_3$ならば

$$\frac{m}{q}\frac{|t|}{d(x)^{m-1}} < \frac{1}{3C_3}$$

である。

これら 2 つの評価と命題 3 を用いて，

$$|w_p| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p-q} C^q \frac{|t|^q}{d(x)^{mq+a}}, \qquad p \geq q,$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$のときに成り立つことが分かる。$\sum_{p\geq q} w_p$が収束することがこれで示された。 □

q は任意であって $\tilde{C}$ と C_3 はqによらないから，$\sum_{p\geq 0} w_p$ が

$$\cup_{q\geq 1}\tilde{\Omega}_q = \{(t,x)\,;\, |t| < \tilde{C} d(x)^{I(Q)},\, x \in \tilde{\Omega}\}$$

で収束することが分かる。$\lim_p v_p$ の収束が従い，主定理のウェイト 0 の場合の証明が終わった。ここで $I(P) = I(Q)$ に注意しよう。

4　一般の場合の証明

主定理の一般の場合を証明しよう。解 u を

$$u(t,x) = \sum_{\lambda=0}^{m-m'-1} \frac{1}{\lambda!} f_\lambda(x) t^\lambda + t^{m-m'} v(t,x)$$

の形で求める。初期条件は明らかに満たされる。方程式 $Pu=f$ は

$$Pt^{m-m'}v = f - P\left\{\sum_{\lambda=0}^{m-m'-1}\frac{1}{\lambda!}f_\lambda(x)t^\lambda\right\}$$

に同値である。この右辺は既知の正則関数である。容易に示されるように $Pt^{m-m'}$ はウェイト 0 の Fuchs 型偏微分作用素で $N(Pt^{m-m'})=N(P)$，したがって，$I(Pt^{m-m'})=I(P)$ が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} V &= \{x\,;\,C(\lambda,x)=0\text{ がある整数 }\lambda\geq m-m'\quad\text{に対して成り立つ}\}\\ &= \{x\,;\,C'(\lambda,x)=0\text{ がある整数 }\lambda\geq 0\quad\text{に対して成り立つ}\}\end{aligned}$$

を示すことができる。ここで C' は $Pt^{m-m'}$ の特性多項式である。これで一般の場合はウェイト 0 の場合に帰着され，§3の結果より，一般の場合の証明も終わったことになる。

謝辞　[2] のレフェリーから有益なコメントをいただいたことに感謝する。

References

[1] Yamane H., Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations Whose Characteristic Exponent Takes a Positive Integral Value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **33(5)**(1997).

[2] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, *to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.*

[3] Baouendi M.S. and Goulaouic G., Cauchy Problems with Characteristic Initial Hypersurface, *Comm. Pure Appl. Math.*, **26**(1973), 455-475.

[4] Tahara H., Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, *Japan. J. Math.*, **5**(1979), 245-347.

[5] Fujiie S., Singular Cauchy problems of higher order with characteristic surface, *J. Math. Kyoto Univ.*, **33**(1993), 1-27.

[6] Ouchi S., Singularities of solutions of equations with noninvolutive characteristics-I; the case of second order Fuchsian equations, *J. Math. Soc. Japan*, **45(2)**(1993), 215-251.