

局在した地形変化による浅水波の生成

京大・工 大杉 保郎 (Yasuo Ohsugi)

京大・工 船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

1 はじめに

水面波を記述する方程式の一つに Korteweg-de Vries 方程式 (K-dV 方程式) がある。これは、小さいが無限小ではない振幅をもつ 2 次元浅水波についてのモデル方程式である。K-dV 方程式には非線形効果を表す項と分散効果を表す項があり、両者のバランスによって定常孤立進行波解 (ソリトン解) が存在することが知られている。

K-dV 方程式の導出においては、水底は平らであると仮定されているが、山や谷といった水底の地形変化も考慮にいった方程式として forced Korteweg-de Vries 方程式 (fK-dV 方程式) がある。この方程式は、底の高さが空間的に変化し、その上を流体が線形長波の位相速度 (臨界速度) に近い速度で流れていくときの浅水波に適用できる。底に局在した山があり、流速が臨界速度に充分近い場合、山の上流側に周期的に孤立波が放出されることが知られている [1, 2]。

本研究では、この上流側に放出される波について、Grimshaw 等 [3] が導いた摂動方程式を適用した理論と数値計算の結果を比較する。

2 fK-dV 方程式の数値計算の結果

2.1 fK-dV 方程式

図 1 のように静止水面に沿って、直角座標 $x = (x, y, z)$ の x 軸と y 軸をとり、鉛直上向きに z 軸をとる。底面の地形変化は x のみに依存する 1 次元的なものとし、 $z = -h + b(x)$ (h は遠方での水深) と表す。そして、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $b(x) \rightarrow 0$ となる局在した地形変化を考える。流体の運動は y 軸方向には一様な 2 次元的な運動とし、遠方では x 軸の負から正の方向へ速度 U で流れているとする。静止水面 ($z = 0$) からの水面の変位 η は、 x と時間 t の関数で $\eta(x, t)$ とする。

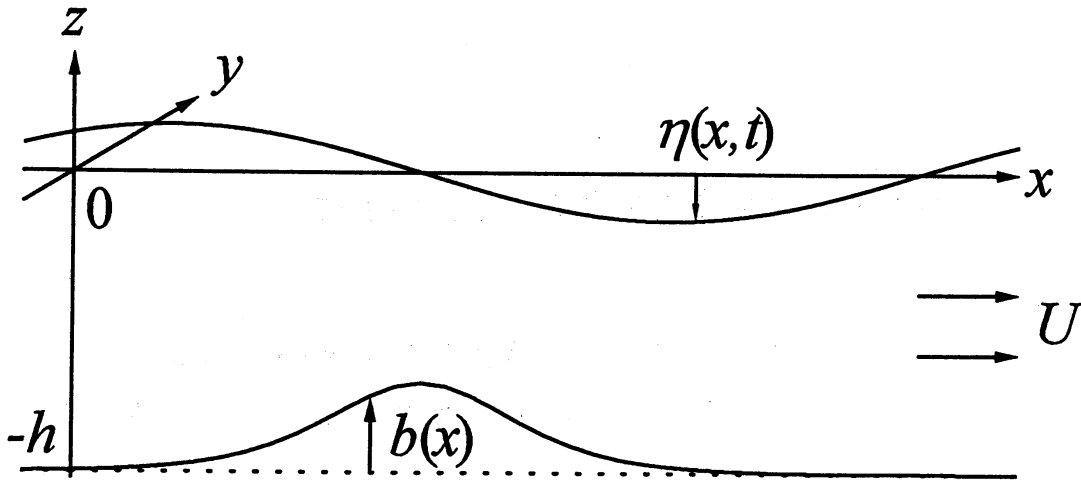


図1: 水面波の座標系

そして、非圧縮性完全流体の渦なし流れを考え、流速 U は線形理論の長波の位相速度 \sqrt{gh} に近いとする (g は重力加速度)。さらに、地形変化の高さスケールは水深 h に比べてずっと小さい、地形変化の水平スケールは水深 h に比べてずっと大きい、という仮定を満たす適当なスケールリングを用いると、次の forced Korteweg-de Vries 方程式 (fK-dV 方程式) が得られる [2].

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (F - 1) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{3}{2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{1}{2} \frac{db}{dx} \quad (1)$$

方程式 (1) においては、各変数は $\eta/h \rightarrow \eta$, $b/h \rightarrow b$, $x/h \rightarrow x$, $\sqrt{g/h} t \rightarrow t$ と無次元化されている。また $F = U/\sqrt{gh}$ は Froude 数と呼ばれる。

地形が山で、 F が 1 に近い場合、(1) 式は山の上流側に周期的に放出される波に対応する解をもつことがわかっている。また、このことは Lee 等による実験でも確かめられている [4].

2.2 数値計算の結果

ここでは fK-dV 方程式 (1) を数値的に解いた結果を述べる。数値計算法は、空間、時間共に 2 次精度の中心差分を用い、充分大きな周期をもつ周期的境界条件の下で計算した。刻み幅は、主に、空間 x について $\Delta x = 0.2$ 、時間 t について $\Delta t = 0.004$ とした。計算精度のチェックをするために、fK-dV 方程式 (1) の保存量である $\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx$ の値を調べたところ、 10^{-11} のオーダーで一定に保たれていた。また、いくつかのパラメーターについて $\Delta x = 0.1$ の時と比較して、結果が同じである事を確認した。

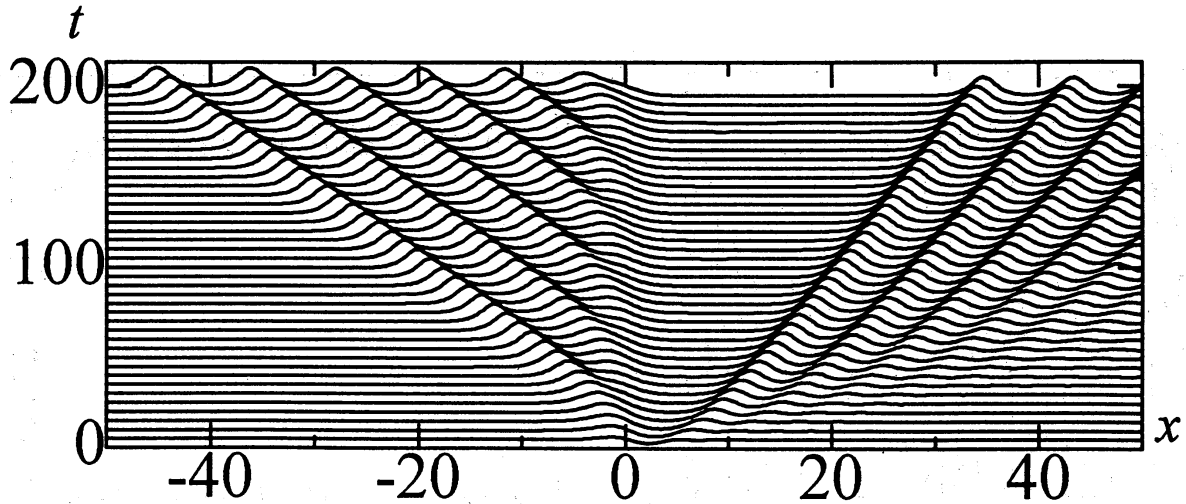


図2: 水面の時間変化. $F=1.0$.

以下では, まず水底の形を

$$b(x) = 0.1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad (2)$$

という $x=0$ に関して対称な山にした場合を考える. また初期条件は静止水面, つまりすべての x に対して $\eta=0$ とする.

図2は, $F=1.0$ の場合の水面の時間変化を各時刻毎に縦にずらして表したものである. 流体は x の負から正の方向に流れていて, 山の上流側に周期的に波が放出されている. この放出される波の変位の極大値を, η_{max} とする. η_{max} の値の時間発展の様子, 位置による変化の様子を表したのが, それぞれ図3, 図4である. 図3より, 放出される第1波の η_{max} はそれ以後の波の η_{max} より大きいこと, また充分時間がたつと η_{max} の値はほぼ一定値に落ち着くことがわかる. 次に図4からは, 波が山に対してどの位置で成長しているかがわかる. 山の近くでは, すべての波についての曲線が1本に重なって見えるので, どの波も位置に関する成長の仕方は, ほぼ同じであることがわかる. この場合の時刻 $t=1000$ における水面の変位を表したのが図5(a)である. 図3でみたように, 第1波はそれ以後に放出される波より, η_{max} が大きい. η_{max} の値は, 第2波以降では徐々に減少し, 最後はほぼ一定値となる. 逆に波の極小値 η_{min} は, 第1波ではほぼ0であるが, 第2波以降では徐々に増加し, ある正の値に漸近していくように見える. この最終的な状態では挙動は周期的であるが, η_{min} が正なのでソリトン列の周期的放出とは少しだけ異なる. また, $x=0$ 付近をみると, 前の波が完全に放出されない内に次の波が成長し始めていることがわかる. 従って, 第1波は静止水面から成長したものであるが, 第2波以降は水面変位が正の部分から成長した波であるといえる. ただし, 図4でみたように, 位置に関する成長の仕方は, 第1波でもその後の波でもほぼ同じであることを注意しておく.

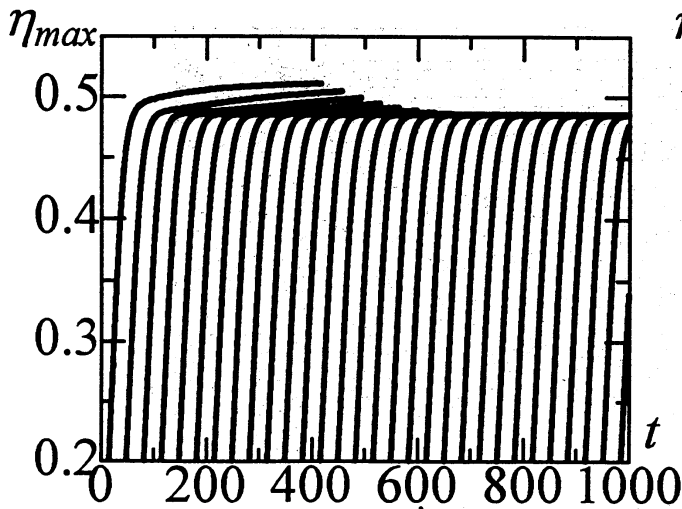


図 3: η_{max} の時間依存性.

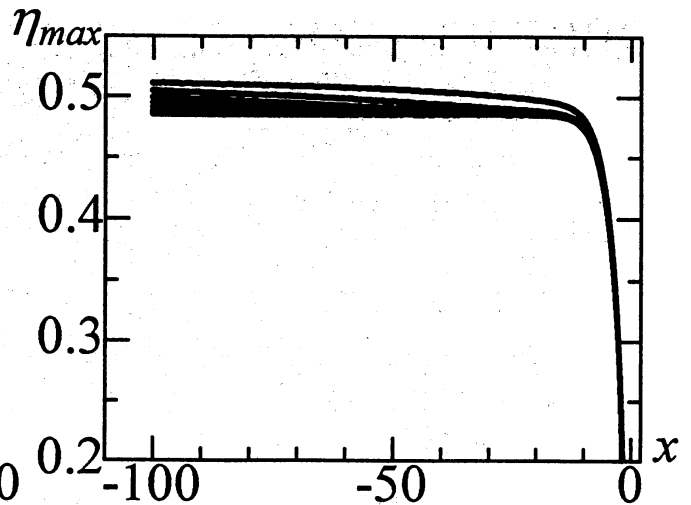


図 4: η_{max} の空間依存性.

次に, F の値を1からずらすと, 放出される波の挙動は以下のように変化する. まず, F を1.0より大きくしていくと, 放出される波の η_{max} は大きくなり, 放出周期は長くなる. $F = 1.2$ の場合の $t = 1000$ での水面変位を表したものが図5(b)である. 周期的状態に落ち着いた時の波の η_{min} の値はほぼ0で, 放出された波は良い近似でソリトンといえる. また, F をある程度以上大きくしすぎると, 計算時間の範囲では波の放出はみられない.

逆に F を1.0より小さくしていくと, 放出される波の η_{max} の値は小さくなり, 放出周期は短くなる. ある程度以上 F が小さいと, 図5(c) ($F = 0.7$) のように放出される波の η_{max} と η_{min} の差が第2波以降で小さくなっていき, 最後には波の放出がみられず, ほぼ一定の正の水面の高さになる. なお, 図5(c)において非常に振幅の小さい波が放出され続けている可能性もあるが, 数値計算の誤差かどうかの判別が難しい.

以上の F 依存性をまとめたのが図6で, F の値の大きいところでは周期的な状態での η_{max} と η_{min} の値, 小さいところでは一定の水面の高さをプロットしたものである. 図6より, 上流側へ放出される波の η_{max} は F が大きくなるにつれて増加することがわかる. また, $1.1 \leq F \leq 1.3$ の範囲では η_{min} がほぼ0なのでソリトン列の周期的な放出とみなせる. $0.9 \leq F \leq 1.0$ の範囲では上流側に周期的な波の放出がみられるが, ソリトンの近似は良いとはいえない. $F \leq 0.8$ では, 充分時間がたつと波の放出がみられず $x = 0$ 付近では定常状態になっていると考えられる.

本研究では, 上に示した上流側に放出される波の η_{max} の値を理論的に説明することを目的として, Grimshaw 等の理論を適用してみた. 4節で理論と数値計算の結果を比較する際には, 第1波の η_{max} の値と周期的な状態での η_{max} の値の2種類を考える.

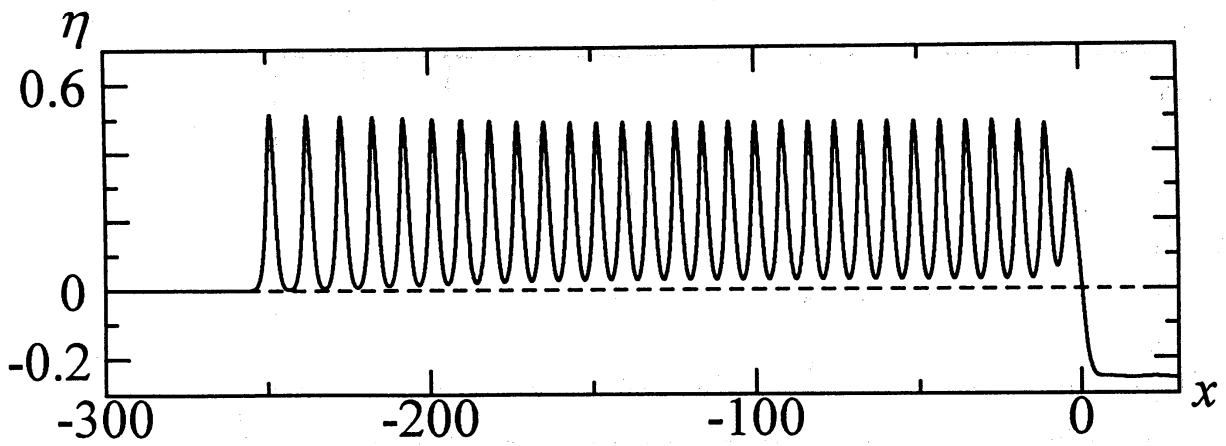


図5(a): $F=1.0$.

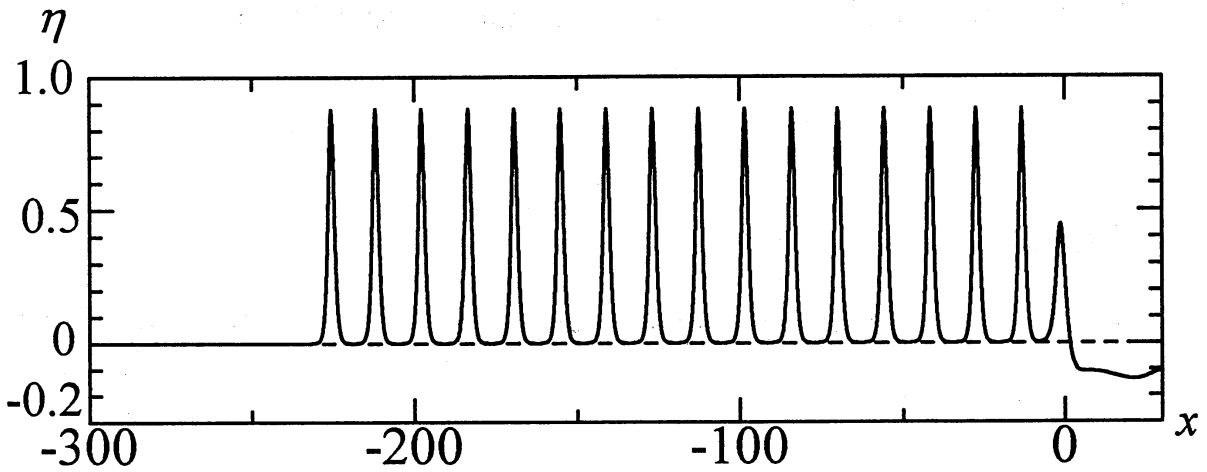


図5(b): $F=1.2$.

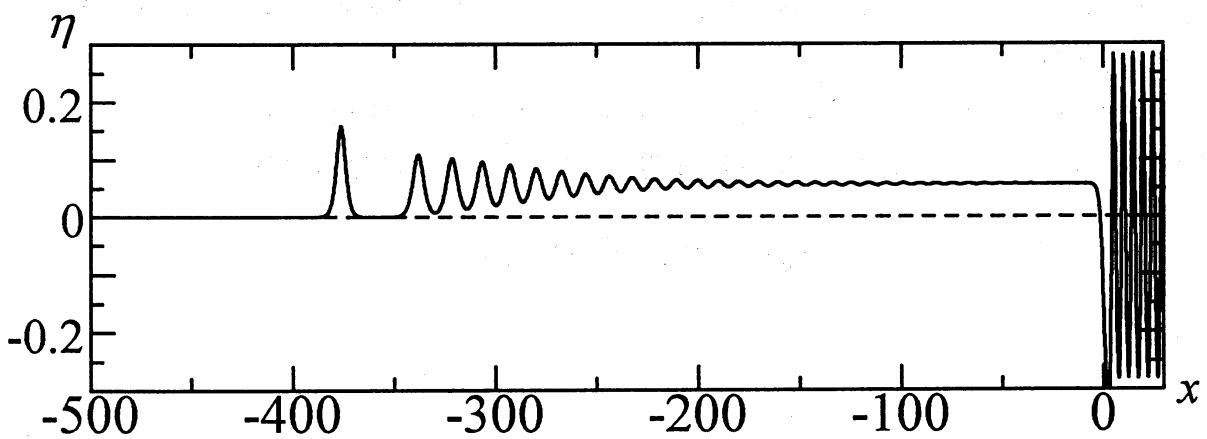


図5(c): $F=0.7$.

図5: $t=1000$ における上流側での水面の変位 .

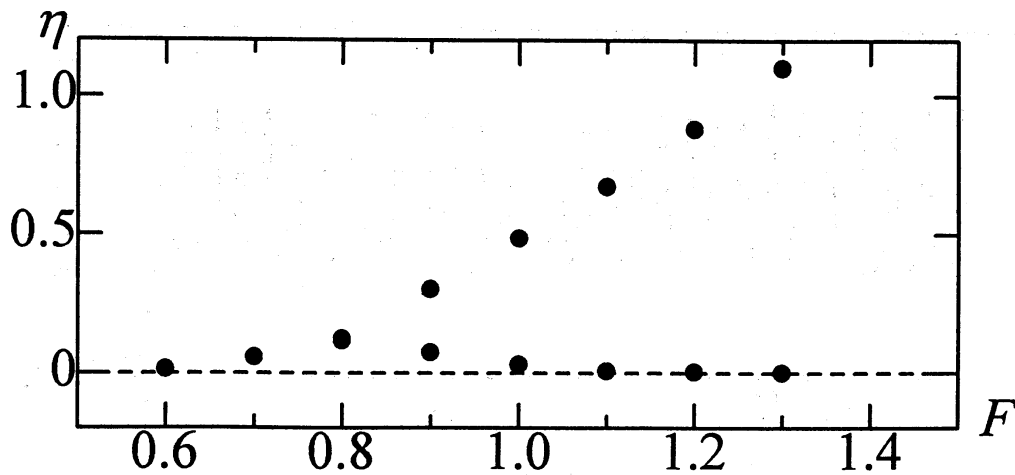


図6: 周期的な状態での η_{max} と η_{min} の値の F 依存性.

3 摂動理論

この節では, Grimshaw 等 [3] が導いた摂動方程式を説明した後, それを波の放出の問題に適用する.

3.1 摂動方程式

彼らは, 局在した地形変化による 1 個のソリトンの変形の問題を考え, 摂動理論を用いてソリトンの振幅と位置の時間発展を記述する方程式を導いている. この理論の概略は以下の通りである.

fK-dV 方程式 (1) において, $\frac{db}{dx}$ の項は, 他の項よりずっと小さいと仮定して, $b = \epsilon b_1 (\epsilon \ll 1)$ と置き換える. この方程式の第 1 近似解として, ソリトンに対応する

$$\eta_0 = a(T) \operatorname{sech}^2(\gamma(T)\Phi), \quad (3)$$

を考える. ここで,

$$T = \epsilon t, \quad (4)$$

$$\Phi = x - \Psi(T), \quad (5)$$

$$\Psi(T) = \tilde{x}_0 + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T q(T') dT', \quad (6)$$

であり, $a(T)$ は振幅, $\Psi(T)$ は位置, $q(T)$ は波の進む速さを表す. T は引きのばされた時間で, a, γ, Ψ, q の値はゆっくりと時間変化する, と仮定されている. そして, η と q につ

いて

$$\eta = \eta_0 + \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + \cdots, \quad (7)$$

$$q = q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \cdots, \quad (8)$$

と ϵ で展開する. (7),(8) 式を (1) 式に代入すると $O(1)$ で,

$$-q_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \Phi} + (F-1) \frac{\partial \eta_0}{\partial \Phi} - \frac{3}{2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \Phi} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \Phi^3} = 0, \quad (9)$$

を得る. (3) 式の η_0 は

$$a = \frac{4}{3} \gamma^2, \quad (10)$$

$$q_0 = (F-1) - \frac{a}{2}, \quad (11)$$

の条件の下で (9) 式を満たす. これは, 波の振幅を決めると, 波の幅と速度の第 1 近似が決まることを表している, K-dV 方程式のソリトン解が満たす関係式である.

次に, $O(\epsilon)$ で,

$$\begin{aligned} L\eta_1 &\equiv (F-1-q_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \Phi} - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \Phi} (\eta_0 \eta_1) - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial \Phi^3} \\ &= F_1, \end{aligned} \quad (12)$$

を得る. ここで,

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial \Phi} - \frac{\partial \eta_0}{\partial T} + q_1 \frac{\partial \eta_0}{\partial \Phi}, \quad (13)$$

である. 次に, 次式で定義される L の随伴作用素 L^* を考える.

$$L^*z \equiv -(F-1-q_0) \frac{\partial z}{\partial \Phi} + \frac{3}{2} \eta_0 \frac{\partial z}{\partial \Phi} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 z}{\partial \Phi^3}. \quad (14)$$

そして, η_0 が $L^*z=0$ の解でもあることを使い, η_1 が $\Phi \rightarrow \pm\infty$ で有界であることを要求すると,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_1 \eta_0 d\Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} (L\eta_1) \eta_0 d\Phi \\ &= \left[(F-1-q_0) \eta_1 \eta_0 - \frac{3}{2} \eta_1 \eta_0^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \Phi^2} \eta_0 - \frac{\partial \eta_1}{\partial \Phi} \frac{\partial \eta_0}{\partial \Phi} + \eta_1 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \Phi^2} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1 (L^* \eta_0) d\Phi \\ &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

を得る. この式に (13) 式の F_1 の形を代入すると,

$$\frac{d}{dT} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0^2 d\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0 \frac{\partial b_1}{\partial \Phi} d\Phi, \quad (16)$$

となる。(16)式に(3)式の η_0 の形を代入して、 b_1 を b に戻すと、

$$\epsilon \frac{da}{dT} = \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(\gamma\Phi) \frac{\partial b(\Phi + \Psi)}{\partial \Phi} d\Phi, \quad (17)$$

となる。また(6)式より、第1近似では

$$\frac{d\Psi}{dT} = \frac{1}{\epsilon} q_0, \quad (18)$$

である。そして $\epsilon \frac{d}{dT} = \frac{d}{dt}$ を使うと、(17),(18)式は、

$$\frac{da}{dt} = \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(\gamma\Phi) \frac{\partial b(\Phi + \Psi)}{\partial \Phi} d\Phi, \quad (19)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = q_0 = (F - 1) - \frac{a}{2}, \quad (20)$$

と書け、これは振幅 a と位置 Ψ に関する連立微分方程式である。なお、(19)式の中の γ は、(10)式によって a と関係づけられている。(19),(20)式は解析的に解けないが、以下のような特別な場合には方程式が簡単になる。

まず、地形変化の水平スケールがソリトンの幅に比べて非常に大きい場合を考え、この場合を broad forcing と呼ぶことにする。このとき、(19)式において $\text{sech}^2(\gamma\Phi)$ をデルタ関数 $(2/\gamma)\delta(\Phi)$ で近似して、

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial b(\Psi)}{\partial \Psi}, \quad (21)$$

を得る。ここで、

$$\hat{H} = (F - 1)a - \frac{1}{4}a^2 - b(\Psi), \quad (22)$$

を定義すると、(20),(21)式は

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \Psi}, \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial a}, \quad (23)$$

と書け、ハミルトン系となる。

次に、地形変化の水平スケールがソリトンの幅に比べて非常に小さい場合を考え、この場合を narrow forcing と呼ぶことにする。そうすると、地形変化を $b(x) = 2b_0\delta(x)$ と近似し、 $\Theta = \gamma\Psi$ と置き換えることにより、(19),(20)式は

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{3}{4}b_0\gamma \text{sech}^2 \Theta \tanh \Theta, \quad (24)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \gamma \left\{ (F - 1) - \frac{2}{3}\gamma^2 \right\}, \quad (25)$$

となる。そして、

$$\hat{H} = (F - 1)\gamma - \frac{2}{9}\gamma^3 - \frac{3}{8}b_0 \text{sech}^2 \Theta, \quad (26)$$

を定義すると、 \hat{H} は保存量で、(24),(25) 式は

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\gamma \frac{\partial \hat{H}}{\partial \Theta}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = \gamma \frac{\partial \hat{H}}{\partial \gamma}, \quad (27)$$

の形に書くことができる。

3.2 波の放出の問題への適用

§3.1の理論においては、地形変化 $b(x)$ は遠方で0になること以外に特に制限はなかったが、この節では最も取り扱いの簡単なものとして、(2)式で代表されるような、ただ1つのピークを $x=0$ にもつ山からなる $b(x)$ を考える。

fK-dV 方程式 (1) において、 $t=0$ で $\eta \equiv 0$ とすると、 t が充分小さい間では、右辺の b に関係した項が η の時間発展に最も寄与すると考えられる。よって、近似的に

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{db}{dx} t, \quad (28)$$

であるとする。そこで、 $\frac{db}{dx}$ が最大となる x 、つまり

$$\left. \frac{d^2 b(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 0, \quad x_0 < 0 \quad (29)$$

を満たす $x = x_0$ からソリトンが発生すると考えることにする。従って、(19),(20) 式の初期値として、

$$\Psi = x_0, \quad a = 0, \quad (30)$$

を仮定する。

(30) 式の初期条件の下で連立微分方程式 (19),(20) を解けば、放出されるソリトンの振幅 a_∞ を求めることができる。ただし、 a の初期値を厳密に0とすると $\gamma=0$ となって、 a が常に0のままとなるので、充分小さい正の値を a の初期値とする。そして、(19),(20) は一般には数値的にしか解けないので、この初期値の下で (a, Ψ) の時間発展を求め、最終的にほぼ一定となった a の値を a_∞ とする。

また、特に broad forcing の場合には (22) 式の \hat{H} が運動の定数だから、初期条件 (30) から a と Ψ は、

$$\hat{H} = (F-1)a - \frac{1}{4}a^2 - b(\Psi) = -b(x_0), \quad (31)$$

を満たす。そして、 $\Psi \rightarrow -\infty$ で a が一定値 a_∞ に近づくとすると、この時 $b(\Psi) \rightarrow 0$ であることから、

$$a_\infty = 2(F-1) + 2\sqrt{(F-1)^2 + b(x_0)}, \quad (32)$$

を得る。

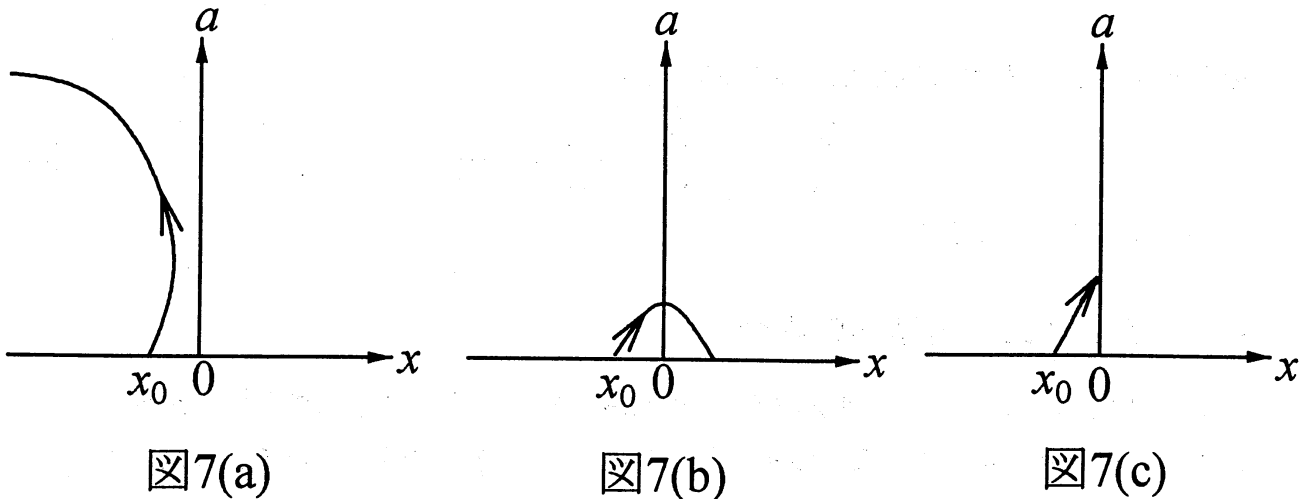


図7: $F > 1$ での生成されたソリトンの時間発展。
 (a, Ψ) の値の時間変化を示してある。

またこの broad forcing の場合には、上流側に波を放出可能な F の上限値を次のようにして求めることができる。まず波の発生直後はその振幅 a が小さいために、(20)式の右辺の $F - 1$ の項の寄与が大きく、波は $F > 1$ ならば下流側へ、 $F < 1$ ならば上流側へ流される。また、(21)式より、山の上流側では a は時間と共に増加し、下流側では減少することがわかる。よって、 $F > 1$ の場合の生成されたソリトンの時間発展は、図9(a),(b)のように2通りが考えられる。すなわち、 F が充分1に近いと発生直後は下流側に流されたソリトンが振幅が増大して上流側へ放出され、 F が充分大きいと最初下流側に流されたソリトンはそのまま x の正の部分へと流されてしまうことになる。その境目の F では、図9(c)のように山の頂点 ($x = 0$) の真上の位置に漸近すると考えられる。この時、 $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ だから(20)式より、

$$a = 2(F - 1), \quad (33)$$

となる。これと $\Psi = 0$ を(22)式に代入して、

$$\hat{H} = (F - 1)^2 - b(0), \quad (34)$$

を得る。(31),(34)式より

$$F = 1 + \sqrt{b(0) - b(x_0)}, \quad (35)$$

となる。これが波が上流側へ放出される F の値の上限値 F_{max} である。 $F \rightarrow F_{max}$ の時、振幅 a_∞ は(32),(35)式より

$$a_\infty \rightarrow 2 \left(\sqrt{b(0) - b(x_0)} + \sqrt{b(0)} \right), \quad (36)$$

と漸近していくことになり、 a_∞ の最大値が見積もれる。

次に narrow forcing の場合には、 $b(x)$ をデルタ関数で近似していたので初期条件 (30) 式において x_0 は充分 0 に近いとして $\Theta = 0$ とする。この初期条件を (26) 式に使うと、

$$\hat{H} = (F - 1)\gamma - \frac{2}{9}\gamma^3 - \frac{3}{8}b_0 \operatorname{sech}^2 \Theta = -\frac{3}{8}b_0, \quad (37)$$

を得る。波が山から十分に離れたときに、 γ が一定値 γ_∞ に近づくとすると、ここでは $\operatorname{sech}^2 \Theta \rightarrow 0$ であるから、(37) 式は

$$(F - 1)\gamma_\infty - \frac{2}{9}\gamma_\infty^3 = -\frac{3}{8}b_0, \quad (38)$$

となる。ここで (10) 式より、

$$a_\infty = \frac{4}{3}\gamma_\infty^2, \quad (39)$$

だから、(38),(39) 式より a_∞ を求めることができる。

4 理論と数値計算の結果の比較

第3節の理論で用いた仮定の下では、 a_∞ は第1波の η_{max} とよく一致すると予想される。なぜなら、第1波はソリトンに近い形をしており、さらに (30) 式のように初期条件を定めたからである。

地形が $b(x) = 0.1 \operatorname{sech}^2(x/2)$ の場合の η_{max} についての結果が図8(a)である。●が fK-dV 方程式 (1) の数値計算の結果を表し、小さい●が第1波の η_{max} 、大きい●が周期的な状態での η_{max} である。また×印は第3節の理論での a_∞ の値を表し、特に broad forcing, narrow forcing の場合の仮定の下での結果は2つの実線で表してある。なお×印が F が1以下の値に対してしかないのは、 $F \geq 1.1$ に対しては、生成されたソリトンが下流側へ流されてしまう結果となるからである。broad forcing の場合の実線については、第3節の (35) で示した F_{max} 以下の F に対する結果である。 F が大きくなると η_{max} も大きくなるという点では、理論と数値計算の結果は合っている。しかし、定量的には理論と数値解の間にずれが見られる。このずれの原因としては、理論解は初期値による影響を受けやすいことがまず挙げられる。数値計算では図4でみたように第2波以降の波は、変位が0でないところから成長するにもかかわらず変位が0から成長した第1波の波とほぼ同じ成長の仕方を示したが、理論では (30) 式において a を0ではなく正の値にすると a_∞ はより大きい値を持つからである。 $1.1 \leq F \leq 1.3$ の範囲の F ではソリトン列の周期的な放出とみなせるが、これらのソリトンは0でない変位から成長した波であるので、 $a = 0$ の初期値を用いる場合ではうまく説明できないと思われる。

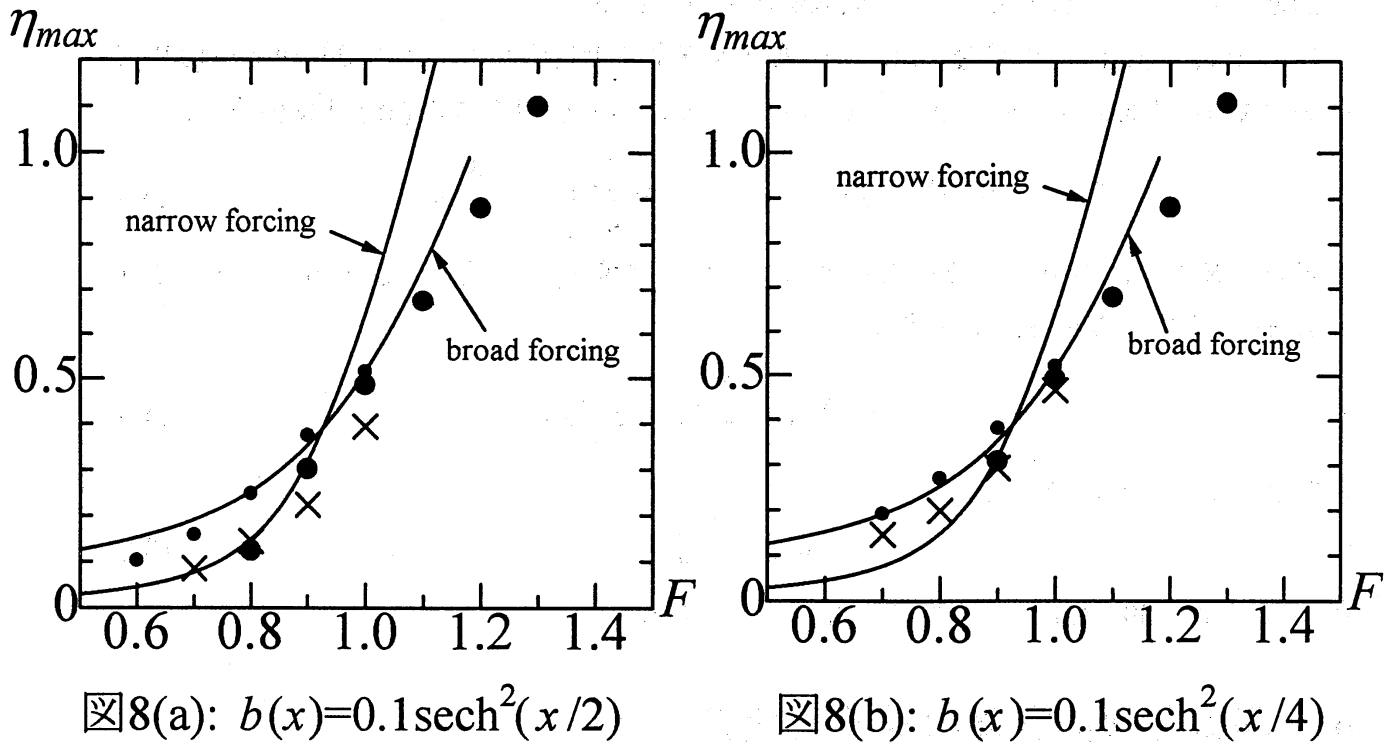


図8: η_{max} についての理論と数値計算の比較

上流側に波の放出される F の上限値は、理論では 1.0 と 1.1 の間であり、特に broad forcing の仮定の下では約 1.18 であった。しかし、数値計算では約 1.3 となっていて、理論での値よりも大きくなっている。この理由は、今のところはっきりとわかっていない。

次に、地形を $b(x) = 0.1 \text{sech}^2(x/4)$ として、より広い幅の山を用いた場合が図 8(b) である。理論解と broad forcing の近似での値はかなり近いので、この場合は broad forcing の仮定が妥当であると思われる。数値解と比較すると、 $F = 0.9, 1.0$ の場合では特に理論と良く合っている。図 8(a) の場合よりも傾斜の緩やかな山を用いていて、ソリトンのパラメーターがゆっくりと変化するという理論での仮定により良く合うので、図 8(a) の場合よりも理論と数値計算の一致が良いと思われる。

5 まとめ

本研究では、地形変化により上流側に周期的に放出される波について、fK-dV 方程式に基づいて理論的及び数値的に調べた。まず、数値計算では放出される波の F の値に対する依存性を調べた。そして、 F の値が 1 に近い場合には周期的な波の放出が見られるが、この波は F の値の大きい方がソリトン列で良く近似されることがわかった。また、 F の値

の1からのずれが大きくなると上流側への周期的な波の放出は見られない。次に、放出される波の η_{max} について、Grimshaw 等のモデル方程式を用いた理論と数値計算の結果との比較を行ない、 F が1に近く、かつ山の幅が比較的広い場合には、良い一致が見られることがわかった。

今後の課題としては、地形の山の幅や高さを変えて理論と数値計算の結果を比較する、数値計算の結果からより妥当な a の初期値を求める、また、次のオーダーまで含んだ摂動方程式を導く、等が挙げられる。

参考文献

- [1] R.Grimshaw and N.Smyth, Resonant flow of a stratified fluid over topography, J.Fluid Mech., vol.169, 429-464 (1986)
- [2] T.Y.Wu, Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances, J.Fluid Mech., vol.184, 75-99 (1987)
- [3] R.Grimshaw, E.Pelinovsky and X.Tian, Interaction of a solitary wave with an external force, Physica.D 77:405-433 (1994)
- [4] S.J.Lee, G.T.Yates and T.Y.Wu, Experiments and analyses of upstream-advancing solitary waves generated by moving disturbances, J.Fluid.Mech., vol.199, 569-593 (1989)