数理解析研究所講究録
1030巻 1998年 102-112

臨界緯度におけるロスビー波のふるまい

東大理　榎本　剛　(Takeshi Enomoto)
東大理　松田　佳久　(Yoshihisa Matsuda)

1. はじめに

大気中のロスビー波の主たる起源は，大山脈や大陸と海洋の熱的性質の違いにあると考えられている．これらは，地球に対して固定されているから，励起される波の位相速度は0である．東西に一様で南北にのみ変化する東西風の基本場を考えると，東西風速が0で波の位相速度0と一致する緯度がある．これを臨界緯度と呼んでいる．波の位相速度と基本場の東西風速が一致する緯度は，後で見るように，線型ロスビー波を支配する方程式の特異点になっている．以下，本稿では，順圧の場における定常ロスビー波の水平伝播と臨界緯度付近におけるふるまいを扱う．

臨界緯度で波が吸収されるのか，反射されるのかは，流体力学的に興味深い問題である．Dickinson (1970) は，定常線型解を求め，臨界緯度で波は吸収されることを示した．ところが, Warn and Warn (1976) は，臨界緯度付近ではそもそも線型の近似が成り立たないということをスケーリングにより示し，非線型項や粘性項等これまで無視していたプロセスが重要になるということを指摘した．その後，Stewartson (1978) と Warn and Warn (1978) は，臨界緯度付近の非線型項が重要になる層（臨界層）の非粘性の非線型解を導出した．この解によれば，臨界層内の渦度が定常で閉じた猫目型の流線（cat's eye）に沿って受動的に移流されてその分布が変化することにより，臨界層は吸収－反射を繰り返す．長い時間の後，臨界層は完全反射に漸近していく．

SWW 解は，無限小ではないが非常に小さい振幅の波を仮定し，その振幅を用いて臨界層付近のスケーリングをした方程式から得られたものであり，極限においてだけ考えうる解である可能性もある．実際の大気中に存在しうるかどうかは，スケーリングしない方程式に立ち返って調べる必要がある．そこで，スケーリングをしない数値実験を行い，これを SWW 解と比較することにした．

2. SWW 解の性質

ここでは，我々の数値実験と比較する SWW 解の性質についてレビューを行う．SWW 解では，線型定常解が破綻する臨界緯度付近を臨界層と呼び，その外側と区別する．臨界層の外では，定常解が成り立っていると仮定する．臨界層内でも，流線函数は定常だが，渦度については時間発展を考える．SWW 解は，臨界層の外の定常解（外部の解）と臨界層内の非線型定常解（内部の解）を接続するという接続された漸近展開 (matched asymptotic expansion) の方法を用いて導出されたものである．また，臨界層を定義するにあたって，多重スケール（multiple scale）も用いられている．

SWW 解の特徴である渦度の転覆（overturing）は，臨界層内の解に見られるのであるが，展開や接続のために，まずは線型解から見ていくことにする．

2.1 線型解

順圧・非粘性で東西一様なシヤー流 $U = U(y)$ がある β 平面上の基本場におけるロスビー波の伝播について考える．定数 Λ に比例する直線的な基本場のシヤー，

$$U = \Lambda y, \quad \text{(1)}$$

を仮定する．擾乱部分を含めた流線函数は，

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\Lambda y^2 + \epsilon\phi(x, y, t), \quad \text{(2)}$$

と書ける．ここで ϵ は擾乱の振幅である．この系では，絶対渦度，

$$q = \beta y + \nabla^2\psi + \text{const}, \quad \text{(3)}$$

は，粘性や消散を考えないとき保存する．

$$\frac{Dq}{Dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0. \quad \text{.......... (4)}$$

ここで，$u=U-\partial\phi/\partial y$, $v=\partial\phi/\partial x$ である．式 (2) および (3) を式 (4) に代入し，線型化を施すと，流線函数の擾乱 ϕ の方程式，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\phi+\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=0, \quad \text{.......... (5)}$$

が得られる．波型 $\phi=\Re\hat{\phi}\exp\{ik(x-ct)\}$ を仮定すると，式 (5) は，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2+\frac{\beta}{U-c}\right)\hat{\phi}=0, \quad \text{.............. (6)}$$

となる．今，現象の東西スケールが南北スケールよりずっと大きいと仮定すれば，式 (6) は，

$$(U-c)\frac{d^2\hat{\phi}}{dy^2}+\beta\hat{\phi}=0, \quad \text{.................... (7)}$$

となる．式 (7) は，$U=c$ に特異点を持っている．定常な波を考える場合，$U=0$ となる緯度は臨界緯度 $y_c=0$ である．この方程式は，適当な無次元化により，

$$y\hat{\phi}_{yy}+\hat{\phi}=0, \quad \text{.......................... (8)}$$

と書ける．ここで，U は y，β は 1 に無次元化されている．式 (8) は，ベッセルの微分方程式（$y>0$）および変形されたベッセルの微分方程式（$y<0$）に還元でき，解析解を求めることができる．

$$\hat{\phi}=\begin{cases}A\{f(y)\cos x+\pi g(y)\sin x\} & (y>0)\\ Ah(y)\cos x & (y<0)\end{cases}, \quad \text{.... (9)}$$

となる．ここで，$f(y), g(y), h(y)$ は，それぞれベッセル函数 Y_1, J_1 および変形されたベッセル函数 K_1 からなる実函数，

$$\begin{aligned}f(y)&=-\pi y^{1/2}Y_1\left(2y^{1/2}\right),\\ g(y)&=y^{1/2}J_1\left(2y^{1/2}\right), \quad \text{................ (10)}\\ h(y)&=2|y|^{1/2}K_1\left(2|y|^{1/2}\right),\end{aligned}$$

であり，A は定数である．波は考えている領域の北端 $y=y_f>0$ で $\phi=\cos x$ で強制されているものとし（$A=1$），$y\to-\infty$ で $h(y)\to 0$ とする．式 (10) は，$y_c=0$ 付近で，つぎのように近似できる．

$$\begin{aligned}f(y)&\approx 1-y\log y-(2\gamma-1)y,\\ g(y)&\approx y, \quad \text{........... (11)}\\ h(y)&\approx 1+|y|\log|y|+(2\gamma-1)|y|.\end{aligned}$$

ここで，$\gamma\equiv\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)\approx 0.57721$ は，オイラーの定数である．

線型解，式 (9) は log の項を含むので，これを複素数で考えたとき，$y=y_c$ で ψ の位相に跳びが生ずる．これを位相の跳び (phase jump) と呼ぶ．このとき，$u'=-\partial\psi/\partial y$ が不連続になるので，$y_c=0$ において運動量流束 $-\overline{u'v'}$ の跳びも生ずることになる．この $-\overline{u'v'}$ の跳び，

$$\alpha\equiv[-\overline{u'v'}]_-^+, \quad \text{.......................... (12)}$$

で波の吸収率 α を定義する．$[\ ]_-^+$ は臨界緯度での跳びを表す．添字の + は $y>0$ での値，− は $y<0$ での値を表す．$-\overline{u'v'}$ は，波の到達していない $y<0$ で明らかに 0 である．$y>0$ のとき，式 (9) および (10) より，$-\overline{u'v'}=-\pi(fg'-f'g)=-\pi$ と一定になる．ここで，ベッセル函数 Y_1, J_1 および変形されたベッセルの函数 K_1 の性質を用いた．なお，式 (11) の近似を用いても，$-\overline{u'v'}$ が一定になることは示せる．$y>0$ で一定のものが $y<0$ でなくなるので，$\alpha=\left(-\overline{u'v'}\right)_+-\left(-\overline{u'v'}\right)_-=\left(-\overline{u'v'}\right)_+=\text{const}$, となり，線型解では波は臨界緯度で吸収される．

2-2 非線型解

式 (4) を無次元化し，現象の東西スケールが南北スケールよりずっと大きいと仮定して $\nabla^2\approx\partial^2/\partial y^2$ と近似すれば，

$$\phi_{yyt}+y\phi_{yyx}+\phi_x+\varepsilon\left(\phi_x\phi_{yyy}-\phi_y\phi_{yyx}\right)=0, \quad \text{... (13)}$$

となる．ここで，下添字は偏微分を表す．定常性を仮定していないので，左辺第 1 項の時間微分の項は残っている．第 2 項は移流項で無次元化の結果，基本場の東西風速が y で表されている．定常波の臨界緯度は $y=0$ になる．第 3 項は β 項で β が 1 に無次元化されている．最後の 2 つの項は非線型項である．これらは波の 2 次の効果を表している．式全体を ε で割ったので，非線型項には ε がかかっている．

式 (13) の各項をスケーリングすると，$t\sim 1/\sqrt{\varepsilon}$

より後は，$|y| \sim \sqrt{\varepsilon}$ で非線型項が無視できない臨界層が存在することが分かる (Warn and Warn, 1976). そこで，t および y を次のようにスケーリングする．

$$Y = y/\sqrt{\varepsilon},\ T = \sqrt{\varepsilon}\,t. \quad \cdots\cdots (14)$$

これを式 (13) に代入し，低次の項を取り出すと，

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial x}\right) Q = 0, \quad \cdots\cdots (15)$$

となる．ここで，渦度と流線は，

$$Q = Y + Q_1, \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\Psi_0 = -\tfrac{1}{2}Y^2 + \cos x, \quad \cdots\cdots (17)$$

と表される．下添字の 0 は，最低次の項であることを表し，1 はより高次な項であることを表す．

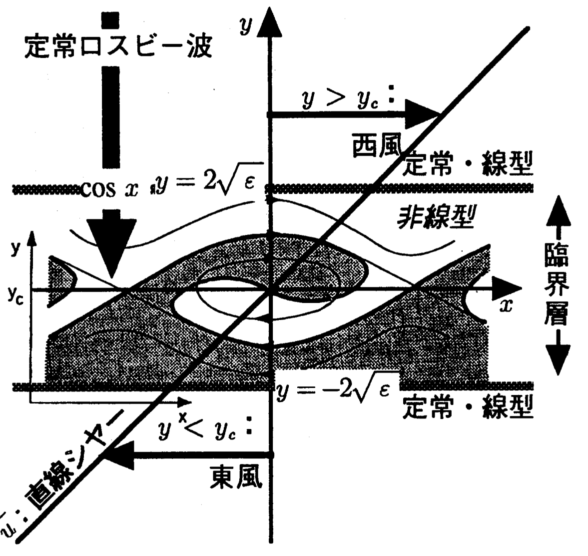

図 1 非線型臨界層のモデル
(Stewartson, 1978; Warn and Warn, 1978)
細実線：Ψ_0，$Q < 0$ に陰影．

流線函数 Ψ_0 は，臨界層の中でも定常であると仮定されている．この流線函数は，Y が多重解をもつことから分かるように，閉じて猫目（Kelvin's cat's eye）のパターンを呈する（図 1）．この簡素な Ψ_0 の形は，軽い棒の先の質点が固定点の周りをぐるぐると回るような非線型振り子のハミルトニアンH と同型である (Ngan and Shepherd, 1997). x を角度，Y を運動量だと思うと，$\frac{1}{2}Y^2$ が運動エネルギー，$-\cos x$がポテンシャルに相当するから，Ψ_0 は $-H$ に当たることになる．非線型振り子の角度－運動量の図も猫目になるが，SWW 解の猫目は位相空間の比喩的な「流れ（flow）」ではなく，実空間の流れである．この「振り子」の周期 $2\pi/\dot{x} = 2\pi/y = \mathcal{O}\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right)$ は，流体粒子が猫目の回りを一周する時間を与える．このことは，基本場のシヤーが強いほど，波の振幅が強いほど，現象の時間スケールが短くなることを示している．

渦度 Q は，猫目に沿って受動的に移流される．渦度の臨界層内の分布の変化に伴って吸収率 α が変化する．SWW 解における α の時間変化を図 2 に示す．吸収率は，はじめ線型解の $-\pi$ から出発し $\alpha = 0$ となる完全反射を経て，α が正の過大反射に達する．過大反射がピークに達した後，α は減少を始め，また吸収に転じる．吸収と反射とを繰り返すが，$|\alpha|$ は時間とともに小さくなり，α は時間とともに完全反射に漸近していく．

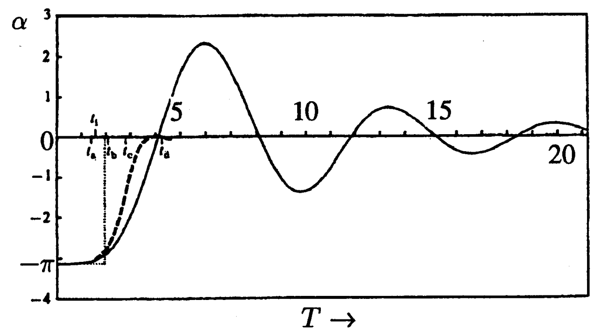

図 2 非線型臨界層における吸収率 α の時間発展
(Killworth and McIntyre, 1985).

渦度の分布の変化に伴って α が変化することは，Taylor の関係，

$$\partial \overline{u}/\partial t = \partial\left(-\overline{u'v'}\right)/\partial y = \overline{v'q'}, \quad \cdots\cdots (18)$$

と吸収率 α の定義，式 (12) から理解できる．図 3 は，v' と q' との相関と α との結び付きを説明する模式図である．ここで $'$ は基本場からのずれを表している．今 $\overline{v} = 0$ なので，$\overline{v'q'} = \overline{vq}$ である．波のない初期状態では，渦度の等値線は緯線（図の水平）に平行であった．猫目に添った渦度の移流により，(*a*) では $q = 0$ の太実線が南北になり，図では立つ（上下になる）ことにより表された波頭ができつつある．猫目の左側の $v > 0$ のところで $q < 0$，$v < 0$ のところで $q > 0$ である．したがって $\overline{v'q'} < 0$ で負

の相関になる．臨界層内を積分しても符号は変わらないので，(*a*) のような渦度のパターンは吸収を表す．

渦度はさらに移流を受け，(*b*) では波頭が横に寝た状態になった．$vq>0$ の領域と $vq<0$ の領域が半々にあり，中ほどの閉じた流線は，左右の側面で $q=0$ のところを横切っている．このとき，$\overline{v'q'}\approx 0$ であるため，この渦度のパターンは完全反射を表す．

(*c*)では，波頭が巻き込んでおり，陰影をつけた $q<0$ の領域は (*a*) と左右が反対の位置にきている．この渦度のパターンは，$\overline{v'q'}>0$ と正の相関になり，過大反射を示している．波頭はさらに巻き込んでいくが，スケールが小さくなるため，v' と q' の相関への寄与は徐々に小さくなっていく．撹拌により層全体が $q=0$ に近づき $\alpha=0$ に漸近する．

猫目に沿った移流のうち，東西移流は基本場が，南北移流は波が担っていることが式 (17) を偏微分することで分かる．臨界層では，基本場と波が対等なのである．SWW 解の巧妙なところは，臨界層という特別な場所にスケーリングをし，渦度と流線函数を分離した点である．渦度の分布の変化は，流線函数にフィードバックする．しかし，このモデルではこれを無視している．その根拠は，臨界層が薄いことである．すなわち，$q\approx\partial^2\psi/\partial y^2$ なので，q の次元は ψ の L_y^{-2} 倍である．また，流線函数は最低次 $\mathcal{O}(1)$ の項だけを取り出しているので，跳びの原因となる項は流線函数には含まれておらず，Q_1 にまとめられている．Q_1 の時間発展は，楕円函数を用いて書き表すことができる．

式 (15)–(17) で表されるシステムでは，渦度の転覆にともなって局所的な順圧不安定が生ずる (Killworth and McIntyre, 1985)．彼等は，不安定波の東西スケールが SWW 解のそれより十分小さいと仮定し，多重スケールを導入した．そして，波の成長率の東西の分布を計算して，不安定が局所的であるかを調べた．順圧不安定は，通常東西平均された渦度の南北傾度がその発生の必要条件であるが，臨界層の場合は東西に長いために，局所的な渦度の南北傾度があたかもその周辺の平均場の量のように働いて，東西に限られた領域で不安定が生ずる．

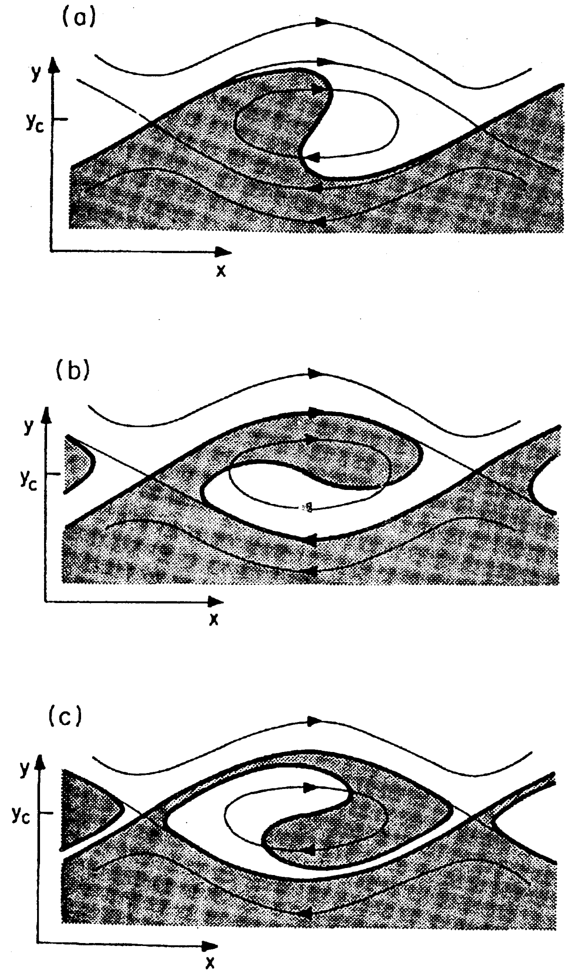

図 3 渦度の移流と吸収率の関係 (Andrews *et al.*,1987).

ところで，SWW 解の筋書は，臨界層のスケーリングが正しいことを前提にしている．Warn and Warn (1978) や Haynes (1985) のような計算は，式 (15) – (17) をもとにしたスケーリングをしたモデルである．つまり，SWW 解を仮定して，臨界層だけを計算する．臨界層は薄いので，南北解像度を高める必要があるため，臨界層だけを計算すれば効率がよい．この方法は，臨界層の中の状態を調べるには有効である．実際，Haynes (1985) は，スケーリングをしたモデルで，渦度の転覆に伴う順圧不安定について調べた．

SWW 解がスケーリングをしないもとの渦度方程式でも実現するかどうかは，スケーリングした方程式で確かめることはできない．漸近展開において，高次の項が小さいことは，ϵ が小さいことで保証さ

れる．概念上は ε をいくらでも小さくとることが可能だが，気象学等への応用を考えたとき，ε がある程度の幅をもってSWW解が成り立たなければ意味がない．また，SWW解の特徴が卓越している範囲で，ε がやや大きくなったときに高次の項の影響がどのように現われるのかは，興味深いことである．

次の節では，我々が行った数値実験の結果を紹介し，SWW解と比較，検討する．我々は，スケーリングをしない渦度方程式を単に時間積分した．Béland (1976, 1978) も同様にスケーリングをしない β 平面上のモデルで数値実験行っているが，SWW解に先行したものであり，SWW解との比較は行われていない．我々は，後の応用を考えて，球面上のモデルを用いたが，臨界層は薄いため，球面の効果は非常に小さいと考えられる．

3. 数値実験

ここでは，我々のスケーリングをしない通常の渦度方程式を時間積分して得られた結果を示し，理論を確認する．モデルは，球面上の順圧スペクトルモデルである．切断は，どの東西波数に対しても同じ南北波数が得られるように，平行四辺形切断を用いた．切断波数は M = 10（東西波数），N = 170 および 85（全波数）である．基本場は，東西一様で南北に直線的に変化する東西風のみである．基本場の東西風は，北半球で西風，南半球で東風としたので，赤道が定常波の臨界緯度になる．弱い強制（波の振幅 $\varepsilon \equiv |\hat{\phi}|/\overline{\psi} = 0.006$）を 45°N に与えて，波を励起する．北向きの波と南向きの波が励起されるが，ここでは南向きの波に着目する．北向きの波を減衰させるために，極を中心としたガウシアン型のレーリー摩擦を加えている．その効果は，臨界緯度付近では無視できる．以下に示す実験は，非粘性の条件で行った．

3-1 線型モデル

ここでは，線型モデルでの吸収の様子を確認する．図4は，波と波の積の効果を無視した線型モデルの実験結果である．図4a の吸収率 α は，完全吸収が $-\pi$ ではなく，-1 になるように規格化してある．波頭が形成されて立っていくのにともなって，α は急速に小さくなっていく．非定常波によるものと考えられる振動が落ち着くと，完全吸収の線型臨界層の形成を示す，$\alpha = -1$ で定常に達する．定常状態の $t = 4032$ hrs における流線函数と絶対渦度の様子を図4 b, c に示す．薄い臨界緯度を図示するために，縦軸は，15°N ～ 15°S の南北に狭い範囲を拡大して描いている．基本場の流線函数は，臨界緯度の赤道を極値としている．臨界緯度付近では，基本場と波とが大きさにおいて対等なので，基本場に波

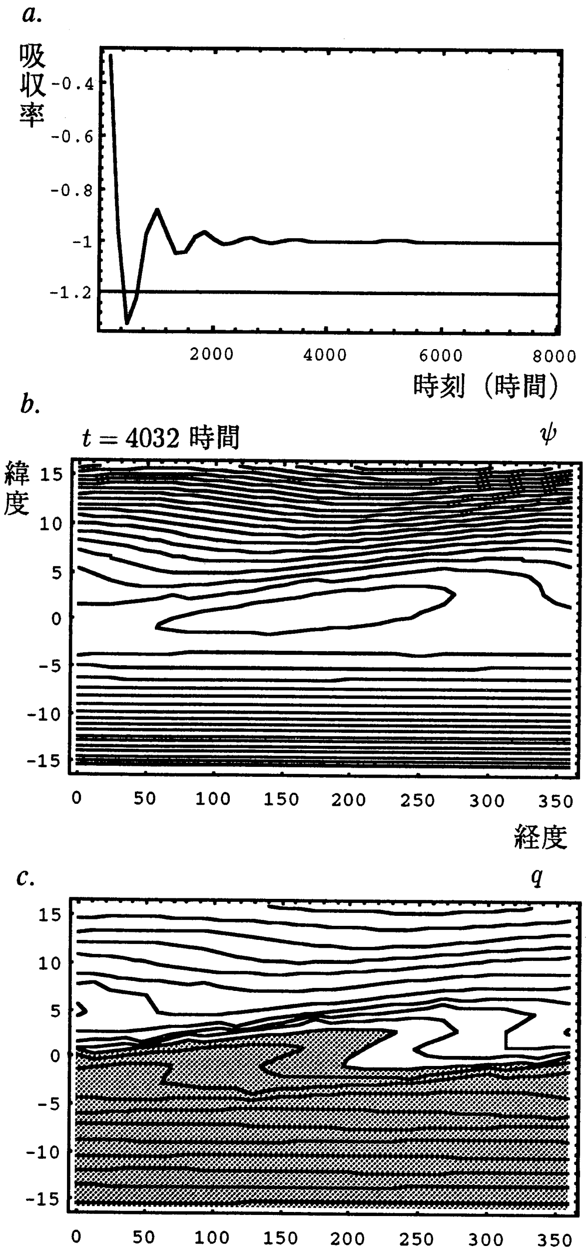

図4 線型モデルでの $\alpha\,(a)$，$\psi\,(b)$，$q\,(c)$

が重なって，全流線函数の等値線は，図4 b のように閉じたものとなる．図4 c の渦度は，閉じた流線に沿って波頭が立った状態にある．図4b と図4c から v と q との相関を考えると，吸収になっていることが分かる．線型では，波数のカスケードは起きないので，波頭が巻き込むことはない．非線型項は，波が波を南北に運ぶ項であり，これが省略されているので巻き込みが起きないと考えることもできる．

次に，線型モデルにおける臨界層への波の集積について調べる．図5は，波の活動度密度 $A=q'^2/2\beta$ の等値線の時間発展を示したものである．ここで，q' は渦度の擾乱成分である．等値線の間隔は，2016, 4032, 6048 hrs において，各々 0.05, 0.2, 0.5, 0.5 である．波が南北伝播し，臨界緯度に達するのにともなって，A が臨界緯度付近に集まってくる．ピークが2つあるのは，q' が東西波数 $k=1$ であり，その2乗（エンストロフィー）に比例する量を描いたためである．流線や渦度は定常になった後でも，波の強制は続いており，臨界層付近の南北に狭い領域に A が集中している．

3-2 非線型モデル

ここでは，非線型モデルでの反射や不安定について確認する．図6は，非線型モデルにおける流線函数と絶対渦度の時間発展を示したものである． $t=2016$ hrs を見ると，線型と同様に閉じた流線（cat's eye）のパターンが現われている．猫目型のパターンの出現にともなって，渦度は移流され，徐々に転覆していく．$t=6048$ hrs からは，高波数の波が重なっているように見える．$t=8046$ hrs では，波頭が壊れている．

図7 a は，スペクトルの波数分布である．薄い色ほど後の時刻を表している．強制している東西波数 $k=1$ 以外に$k=5$ 等が成長していることが分かる．これが順圧不安定によるものかを調べるために，$dq/d\phi$ の図を描いた．図 7b は初期状態である．モデルでは，β は2に無次元化されている． β は ϕ 依存性があるが，臨界層付近では，$dq/d\phi \approx 2 = \text{const}$ である． $dq/d\phi$ の変化が最も大きいのは，渦度の転覆が起きている臨界層内である．図7 c, d は，まだ吸収の段階にある $t=4032$ hrs の様子であるが，臨界層付近で負になっている．これは，不安定の必要十分条件（Killworth and McIntyre, 1985; Haynes, 1985）を満たしていることを示す．しかも，大きさは東西で異なっており，この不安定が局所的に生じることを示唆している．

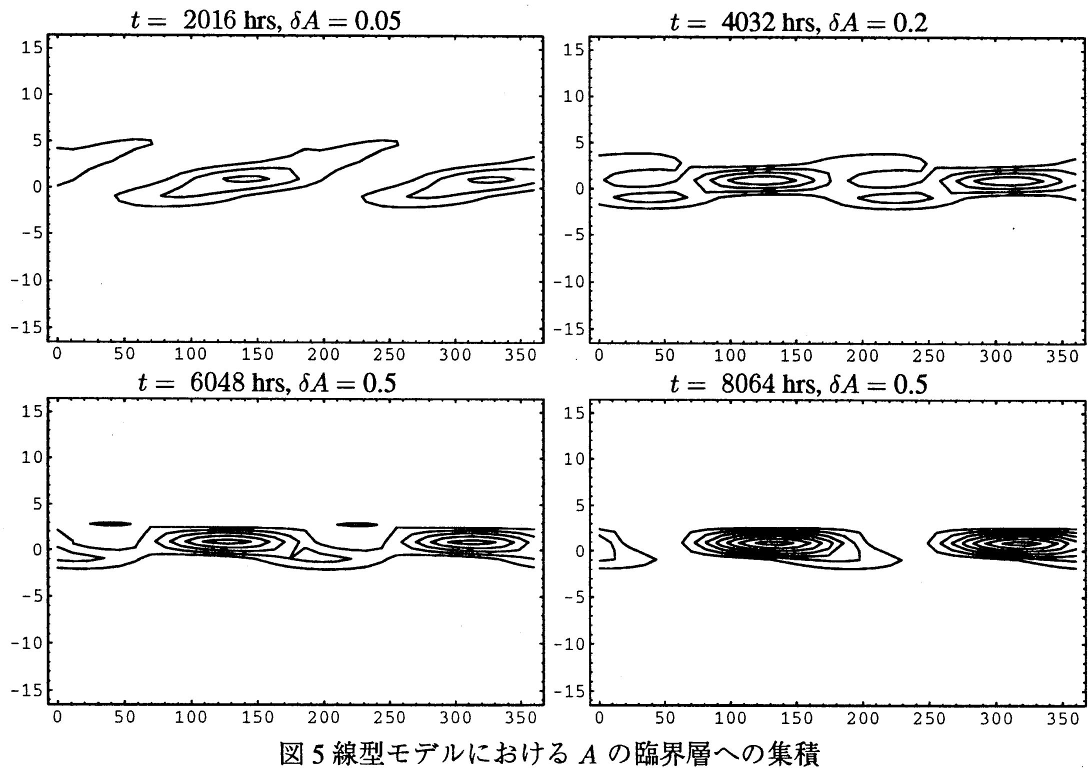

図5 線型モデルにおける A の臨界層への集積

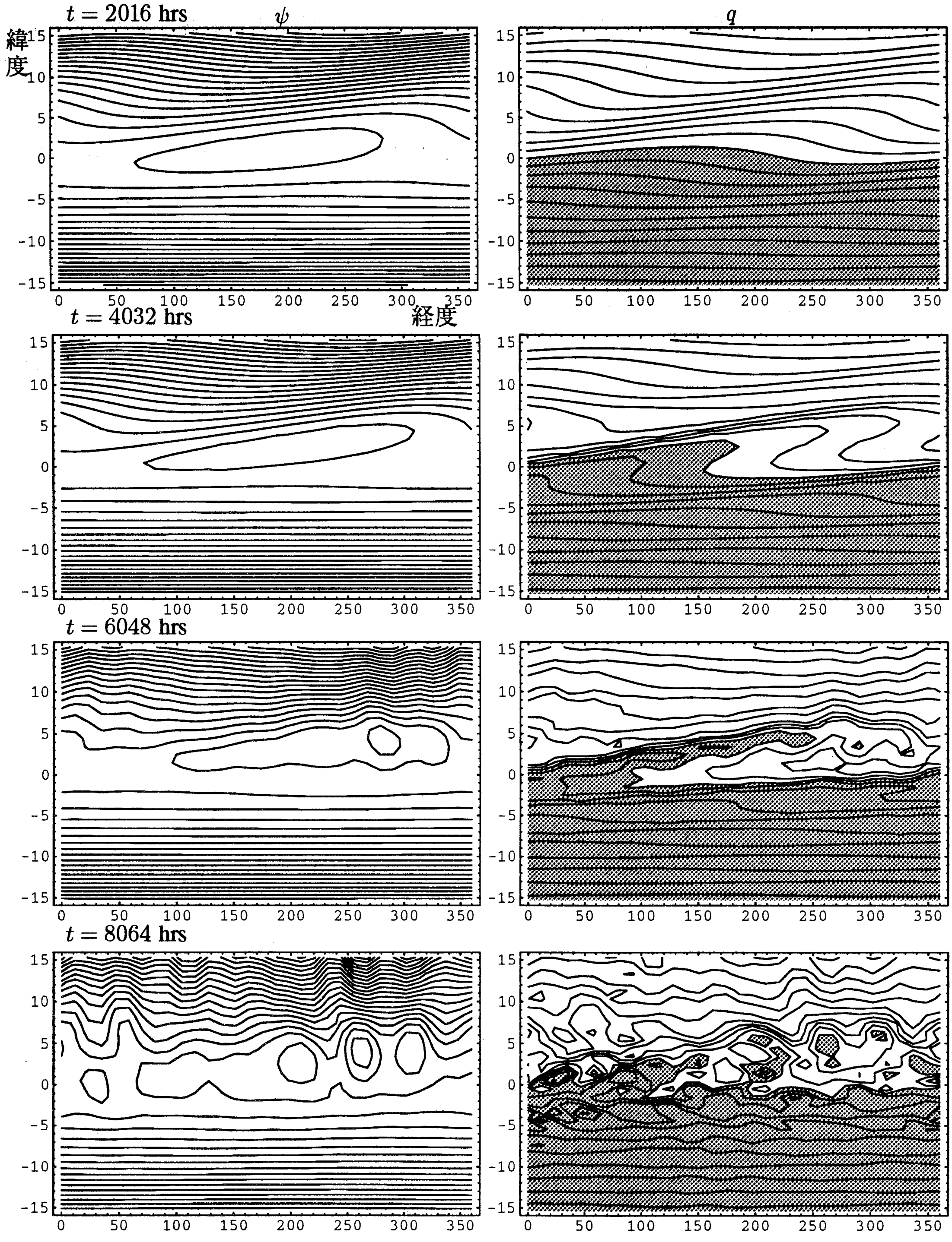

図 6 非線型モデルにおける臨界層の時間発展

4 猫目の傾き

我々の方法では，波の振幅 ε の極限でのふるまいは調べられないが，逆に ε がある程度の大きさをもつ場合に SWW 解がおおむね正しいかを調べることができる．我々の実験で渦度の転覆が見られたことは，SWW 解のスケーリングが妥当であり，臨界層における波のふるまいの第一次近似的な特徴をよくとらえていることが分かる．しかし，ε がある程度の大きさをもつために，渦度の転覆以外の特徴も現われている．ここでは，SWW 解で無視した効果に着目し，これにより生じたと考えられる猫目の傾きについて，それが無視されたどの項から生じたのかを調べる．

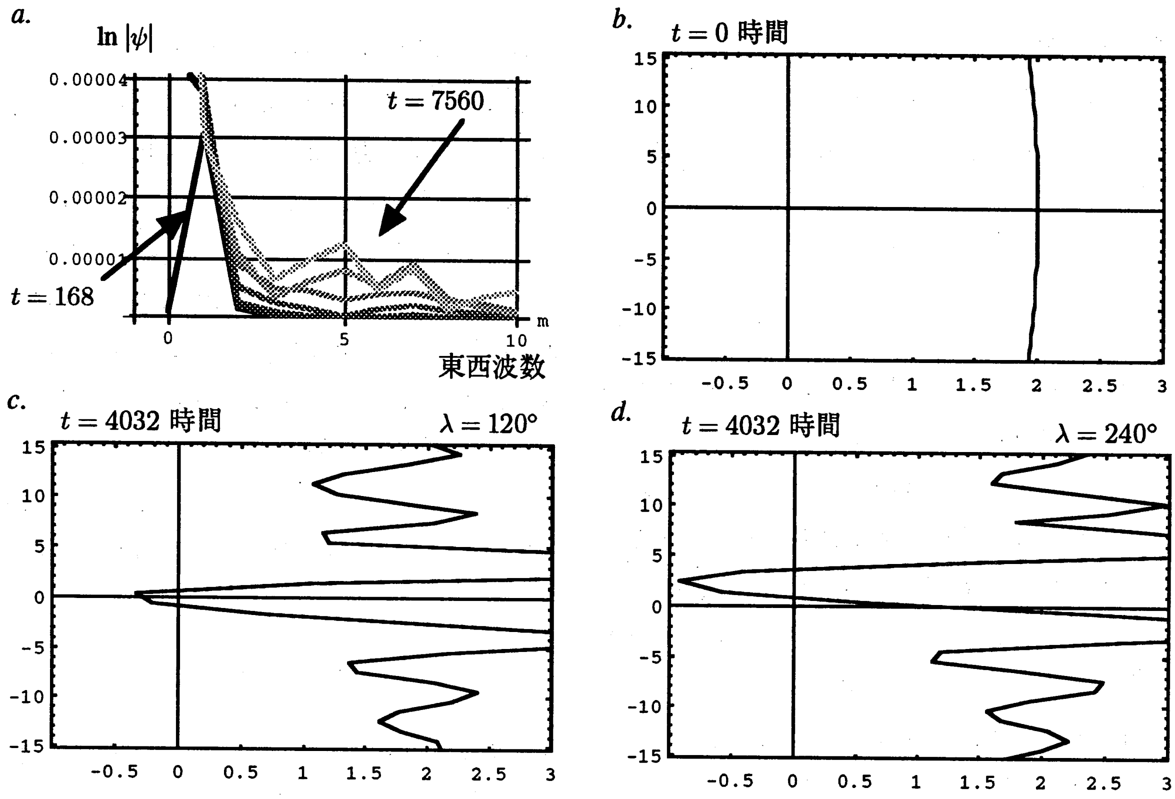

図7非線型モデルにおける不安定波の発生．スペクトルの波数分布 (*a*)，$dq/d\phi$ の南北分布 (*b, c, d*).

4-1 数値実験の結果に見られる特徴

数値実験の結果を見返してみると，猫目のパターンが傾いていることに気がつく．図 4*b* を見ると，猫目は臨界緯度を挟んで対称ではなく，猫目は南西－北東を長軸として傾いており，かつ，強制のある北側に片寄っている．線型モデルでは，波による基本場の変形にともなう臨界緯度の北への移動はないので，これが原因ではない．猫目が傾いており，北に片寄っていることは，猫目が臨界緯度を挟んで対称な形で存在する SWW 解にはない特徴である．図5でも活動度 A のピークは 1°N 付近にあり，全体として北に片寄っている．図6でも始めは同様に傾いているが，渦度の転覆とともに傾きは小さくなっていくように見える．図 7*d* の負のピークが図 7*c* に比べて北にあることも，目が傾いていることにともなうものである．

4-2 漸近展開の高次の項との対応

猫目の傾きは，南向きの群速度を持つ波を反映していることが考えられる．ここでは，SWW 解にこの特徴が含まれないのはなぜなのか，どこで省略されたのか調べる．

式 (2) と 式 (17) を比べると，臨界層内の波は x だけの函数になっている．流線函数は，臨界層の内外で定常であると仮定しているので，t の函数でなくなっている．y の函数ではないのは，式 (11) を式 (14) でスケーリングし，$\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ や$\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}\ \log\varepsilon)$ が小さいことを仮定したためである．この仮定により，臨界層内で $f(y) = h(y) = 1$ とした．

南北波数を ℓ としたとき，波型に ℓy が含まれるとき，波は南北伝播できる．式 (17) だけを見ると，臨界層に波は伝わってきたのではなく，波がそこにあるだけに見える．しかし，臨界層より南には波は進まないと考えているので，$\ell y = 0$ としたと解釈すべきである．これは，長い時間経って波が到達して，臨界層が形成されたときの，定常解を流線函数に仮定していることになる．

数値実験においては，定常解として閉じた流線を設定したのではなく，波の伝播によって時間発展して形成されたものである．そこで流線函数の展開において，時間発展を含む高次の項まで考慮し，傾きの原因を調べてみる．臨界層内の流線函数は，高次

の項を含めて書くと，

$$\Psi(x,Y,T)=\Psi_0(x,Y)-\tfrac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon)Y\cos x$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\left\{(2\gamma-1)Y\cos x+\Psi_1\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon\log\varepsilon), \quad \text{......(19)}$$

となる．ここで，Ψ_1 と Q_1 は，

$$Q_1=-\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial Y^2}, \quad \text{...... (20)}$$

でつながっている．$\Psi_1=\Psi_1(x,Y,T)$ は時間発展するが，対応する線型解の項は，式 (11) より，

$$Y\log Y+\pi Y\sin\phi\ (Y>0), \quad \text{......(21)}$$

である．これらは，位相の跳びに関わる項である．線型のとき，あるいは，線型の段階で，式 (19) の擾乱部分 Ψ' が $Y\sim 1$ でどのような形をしているか調べてみる．$Y\sim 1$ で $\log Y\sim 0$ なので，

$$\Psi'=\left\{1-\tfrac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon)Y-(2\gamma-1)\sqrt{\varepsilon}Y\right\}\cos x$$
$$+\pi\sqrt{\varepsilon}Y\sin x=\cos(x+\delta), \quad \text{...... (22)}$$

と書ける．ここで，

$$\delta=\tan^{-1}\left\{\frac{\left(-\pi\sqrt{\varepsilon}Y\right)}{1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon\right)Y-(2\gamma-1)\sqrt{\varepsilon}Y}\right\}$$
$$\approx-\pi\sqrt{\varepsilon}Y=\ell y, \quad \text{...... (23)}$$

と近似できる．これは，$Y=\pm 2$ を臨界層とすると，線型の段階では，$Y=1$ でもまだ南北に波型の構造を残していることを示している．$\ell=-\pi$ は，式 (21) の第 2 項から来たものであり，さらに遡れば，位相の跳びに関わる式 (11) の $g(y)$ を含めたために生じたものである．これは，ちょうど吸収率に対応している．非線型モデルで臨界層が反射に近づくにつれて吸収率は 0 になって $\delta\to 0$ となる．つまり，猫目の傾きは解消されることになる．実際，4-1 で見たように，図 6 にこのことが表れている．

ε	$2\sqrt{\varepsilon}$	$\pi\sqrt{\varepsilon}$
0.006	0.15	0.24
0.02	0.28	0.44
0.1	0.63	0.99

表 1 高次の項の大きさ

我々の実験での $\varepsilon=0.006$ では，SWW 解での高次の項 $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ や $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon)$ はそれほど小さくない．表 1 に振幅 ε，臨界層の厚さ（片側）$2\sqrt{\varepsilon}$，さきほど求めた $|\ell|$ が示してある．現実的な振幅として実験に使われる $\varepsilon=0.02, 0.1$ も併せて示した．$\varepsilon=0.02, 0.1$ はもちろん，ε としてはかなり小さい $\varepsilon=0.006$ でもその 2 乗根は，それほど小さくないので，実験結果に見えるものとして表れたことが分かる．

Ψ_0 は，渦度をかき混ぜる (stir) だけで，混合 (mix) はしない．長い時間経つと，正の渦度と負の渦度とが重なった状態になるが，今，式 (15) を東西平均した，

$$\frac{\partial\overline{Q_1}}{\partial T}=\overline{\sin x\frac{\partial Q_1}{\partial Y}}, \quad \text{...... (24)}$$

は，$\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ や $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon)$ なので小さいとし，式 (19) および式 (20) による流線函数へのフィードバックは考えていない．そのため，波は一時的に吸収されることはあっても，最終的には吸収されない．臨界層では，粘性や乱流によって，Ψ_0 を横切るような流れが生じたときに混合が起こる (Ngan and Shepherd, 1997)．つまり，かき混ぜただけの状態では，渦度は対称に分布しており，東西平均をすれば 0 である．何らかのプロセスで分布が非対称になったときに，平均場の成分が生じる．高次の項は，Ψ_0 の等値線を横切るような流れに他ならず，これらの項が存在することによって，わずかながら波の痕跡が残る．我々の数値実験では，式 (24) のような波の 2 次の効果も含まれているので，流線函数もわずかに変化する．実際，図 6 の吸収率の図で，過大反射は SWW 解から予想されるものより小さい．図 6 の渦度の図では，正負の波頭は非対称に見える．また，図 7a では，波数 $k=0$ も成長している．ここに示した実験では，初めて完全反射に達するまでしか計算していないが，長い時間経過した後の定常状態では，完全反射に近い部分吸収になると予想できる．高次の項により波の運動量が一部基本場へ変換されるためである．この吸収の効果は，SWW 解には含まれていない．なお，順圧不安定により生じた非定常波も吸収をもたらしている可能性がある．

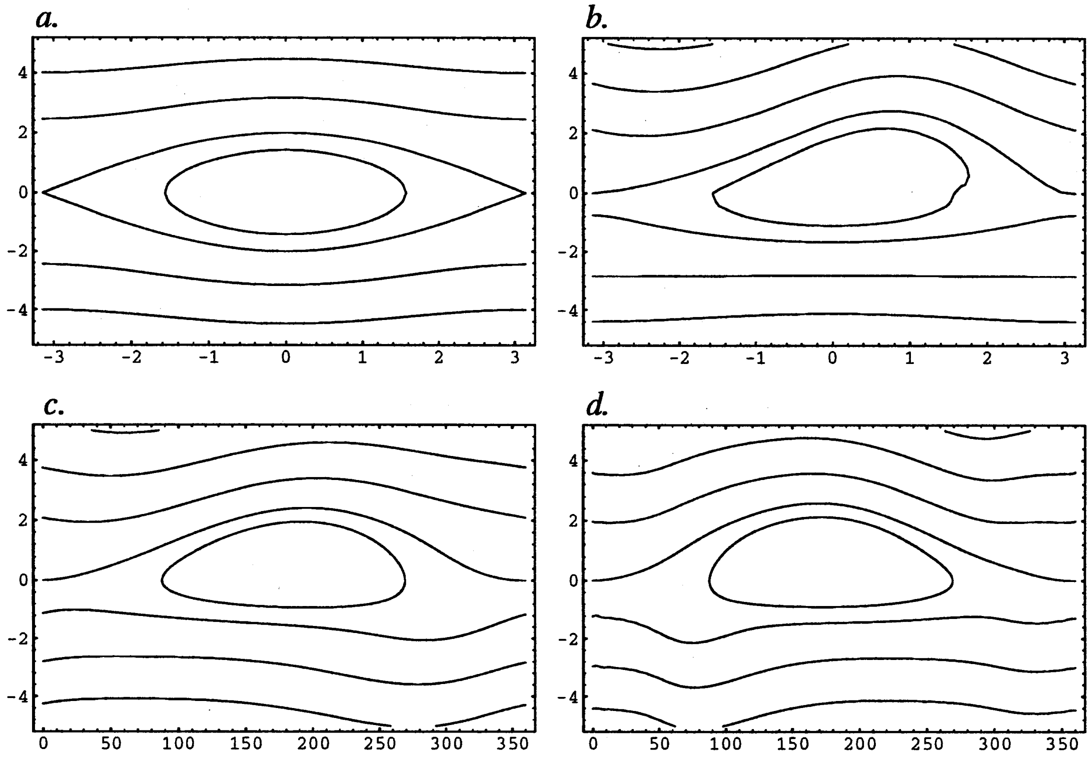

図 8 SWW 解のΨ_0とその変形.

4-3 スケーリングをしたモデルでの確認

図8は，今までとは異なり，SWW 解を仮定したモデルで，臨界層内の流線函数の等値線を描いたものである．図 8*a* は，SWW 解で仮定されている定常な流線函数である．これに高次の項，$O(\sqrt{\varepsilon})$ や $O(\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon)$ を重ねたものが，図 8*b* である．強調のために，$\varepsilon=0.1$ としてある．線型の段階での猫目の傾きが，これら高次の項によるものであることを確認するために，$Y=0$ 近傍で尖ってしまうことは承知の上で描いてみた．閉じた流線の北西側が長く，南西－北東に傾いている．これは，南進する波の等位相線を反映したものであり，我々の数値実験の結果と共通の特徴である．強制のある臨界層の北側の閉じていない等値線が南北に波を打っているところも類似している．逆に臨界層の南側で，流線は緯線にほぼ平行で，波がほとんど届いていない点も共通である．さらに，猫目は若干北にずれている．これは，臨界層の南側に波は伝播できず，臨界層から離れるにつれて振幅が減衰していくためである．

図 8*c*, *d* は，SWW 解の流線に渦度の移流にともなう流線へのフィードバックを加えたもの，つまり，式 (19) で $O(\varepsilon\ \log\varepsilon)$ を省略したものである．ただし，渦度は図 8 *a* の定常な流線に沿って流されており，渦度から流線への一方通行のフィードバックのみを考えている．図 8*c* は $T=2$ の吸収段階での猫目である．これは北西が長く，渦度のフィードバックは，今まで見てきた特徴を強化する方向に働くことが分かる．これに対し，図 8*d* の過大反射の段階（$T=6$）での猫目は，北東が長くなっている．

高次の項まで含めた，波が作る臨界層における流線函数や渦度のパターンの時間発展を標語的にまとめると，

「上がり目，下がり目，ぐるっと回って猫の目」

と洒落ることができよう．すなわち，振幅 ε が無限小でない限り，渦度と流線とは高次の項で結合している．渦度が流線に沿って回ることにともなって，吸収，過大反射に対応して「上がり目，下がり目」と流線の猫目も変形していく．渦度の「ぐるっと回って猫の目」が数値実験で見られたため，SWW 解の近似は妥当であることが分かった．しかし，高次の

項まで含めるとわずかに波は吸収されるため，定常状態における $\alpha=0$ の「完全」反射は ϵ が小さい極限でのみ成り立つものであるということも言える．また，流線の猫目の形から臨界層が吸収なのか反射なのか知る手がかりを得ることもできる．臨界層は薄いために，渦度の転覆の精密な観測は困難であるが，流線函数は比較的観測が容易である．言い替えると，目を見れば，臨界層の「気持ち」が分かる，ということである．

5. おわりに

非線型臨界層の理論は, McIntyre and Palmer (1984) により，成層圏の現象に応用された．成層圏には，冬季に極渦と呼ばれる極を中心とした正の渦度の極大域が形成される．観測される極渦の崩壊は，極渦からのびる渦度の高い舌状の領域をともなっている．このことが，非線型臨界層における渦度の転覆に似ているというのである．ϵ の極限で成り立つ非線型臨界層のメカニズムが，振幅の大きい実際の現象にそのまま適用できないことは，彼等も認めている．我々の実験では，SWW 解の特徴が ϵ がある程度の大きさをもつときにも失われないことを示した．我々の実験は，McIntyre and Palmer (1984) が指摘したアナロジーを支持するものと見ることもできる．その後，極渦の数値実験が行われ，極渦の形成への波の役割や微量物質の輸送の観点から，議論が進められている．

非線型臨界層の理論は，対流圏にも応用されている．Held and Phillips (1989) はロスビー波とハドレー循環との相互作用を論じた．Waugh *et al.* (1994) は，従来の単色波に代えて局所的な強制を与えて，波束を低緯度に臨界層ができるか，臨界層を越えてエネルギーが伝播するか調べた. Brunet and Haynes (1995) は，波列が低緯度の臨界層で東西に拡がらずに反射されうることを示した．

現在，我々は対流圏でのより現実的な実験を目標に，従来の東西一様な基本場に東西波数 $k=1$ の非一様性が重なった基本場での波束の伝播について調べているところである．

参考文献

Andrews, D. G., J. R. Holton, and C. B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*. AcademicPress. 489pp.

Béland, M., 1976: Numerical study of the nonlinear Rossby wave critical level development in a barotoropic zonal flow. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2066–2078.

Brunet, G. and P. H. Haynes, 1995: Low-latitude reflection of Rossby wave trains. *J. Atmos. Sci.*, **53,** 482–496.

Dickinson, R. E., 1970: Development of a Rossby Wave Critical Level. *J. Atmos. Sci.*, **27**, 627–633.

Haynes, P. H., 1985: Nonlinear instability of a Rossby–wave critical layer. *J. Fluid Mech.*, **161**, 493–511.

Held, I. M. and P. J. Phillips, 1989: A barotropic model of the interaction between the Hadley cell and a Rossby wave. *J. Atmos. Sci.*, **47,** 856–869.

McIntyre M. E. and T. N. Palmer, 1984: The 'surf zone' in the stratosphere *J. Atmos. Terr. Phys.*, **46,** 825–849.

Ngan, K. and T. G. Shepherd, 1997: Chaotic mixing and transport in Rossby-wave critical layers. *J. Fluid Mech.*, **334**, 315–351.

Killworth, P. D., and M. E. McIntyre, 1985: Do Rossby-wave critical layers absorb, reflect or overreflect?. *J. Fluid Mech.*, **161**, 449–492.

Stewartson, K., 1978: The evolution of the critical layer of a Rossby wave. *Geophys. Fluid Dyn.*, **9**, 185–200.

Warn T., and H. Warn, 1976: On the Development of a Rossby Wave Critical Level. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2021–2024.

——, 1978: The evolution of a nonlinear Rossby wave critical level. *Stud. Appl. Math.*, **59**, 37–71.

Waugh, D. W., L. M. Polvani and R. A. Plumb, 1994: Nonlinear, barotropic response to a localized topographic forcing: formation of a "tropical surf zone" and its effect on interhemispheric propagation. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 1401–1416.