数理解析研究所講究録
1031 巻 1998 年 138-148

MODULUS OF CONVEXITY AND CONVERGENCE THEOREMS FOR FAMILIES OF NONEXPANSIVE MAPPINGS

東京工業大学大学院 情報理工学研究科 厚芝 幸子 (Sachiko Atsushiba)

1. Introduction

一つの写像および写像族に対する不動点近似法は盛んに研究されてきている. Mann [10] は Hilbert 空間の写像 T の不動点近似法のために次のような iteration scheme を導入した.

$$x_1 = x \in C,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n \quad \text{for every} \quad n \geq 1, \tag{1}$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は$\alpha_n \in [0,1]$ を満たす実数列である. Reich [13] は Freéchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間でこの iteration scheme を研究し, 弱収束定理を示した. Atsushiba and Takahashi [1] は (1) の iteration scheme の概念をもとに nonexpansive 写像族の iteration scheme を導入し, Hilbert 空間における nonexpansive 写像族の共通不動点への弱, 強収束定理を証明した. 本研究では, [1] で定義されたこの iteration scheme によって写像族の不動点近似法を Banach 空間で考察することを目的とする. そこで, まず始めに Banach 空間の凸部分集合の modulus of convexity を定義し, それを用いることで示せた結果を与える. 次にそれらの結果を用いて証明できた nonexpansive 写像族の共通不動点への強収束定理および弱収束定理を与え, さらに強収束定理の応用について述べることにする.

2. Preliminaries

本研究では以後 E は実 Banach 空間をあらわし, E^*は E の共役空間とし, $\langle y, x^* \rangle$ は $x^* \in E^*$の $y \in E$ での値をあらわすものとする. $x_n \rightharpoonup x$ は sequence $\{x_n\}$ が x に弱収束することをあらわし, 同様に $x_n \to x$ は強収束することをあらわす. また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_nが x に強収束することをあらわす. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. E の部分集合 A にたいして, coA, $\overline{co}A$ と co_pA はそれぞれ, A の凸包, 閉凸包, 集合 $\{\sum_{i=0}^p a_i y_i : y_i \in A, a_i \geq 0, \sum_{i=0}^p a_i = 1\}$ とする.

C を E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C 上の nonexpansive であるとは

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \text{for every} \quad x, y \in C$$

をみたすときである. $F(T)$ は C 上の写像 T の不動点集合とする. 一方,C から C への写像 $T(s)$ からなる写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i),(ii) をみたすとき, C 上の nonexpansive semigroup であるといわれる.

(i) $T(st) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, 49M05.

Key words and phrases. Fixed point, iteration, nonexpansive mapping, weak convergence, strong convergence, invariant mean.

(ii) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq \|x - y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in S$ に対して成立する.
$F(\mathcal{S})$ は $T(t), t \in S$ の共通不動点, すなわち $F(\mathcal{S}) = \bigcap_{t \in S} F(T(t))$ をあらわすものとする.

E が Opial's condition [11] をみたすとは, $x_n \rightharpoonup x \in E$ をみたす任意の点列 $\{x_n\} \subset E$ に対して,

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ をみたす全ての $y \in E$ に対して成立ときをいう. また Banach 空間 E の norm が Gâteaux 微分可能であるとは任意の $x, y \in S_E$ に対して

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2}$$

が存在するときにいう. ここで, $S_E = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ とする. $x \in S_E$に対して, (2) の極限が $y \in S_E$ に関して一様であるとき, Banach 空間 E の norm が Fréchet 微分可能であるという.

3. MODULUS OF CONVEXITY

この節では, はじめに Banach 空間の modulus of convexity の定義を挙げ, Banach 空間の凸部分集合 C の modulus of convexity を定義する. 一様凸な Banach 空間で成立する諸結果が, Bruck [5, 6] によって, Banach 空間の modulus of convexity を用いることで示されているが, この凸部分集合 C の modulus of convexity を用いることで, 狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸部分集合上で同じ形の結果が, 得られたので, これらの結果を対比させながら述べることにする.

Definition 3.1. Let E be a Banach space. We define, the function δ of $[0, 2]$ into $[0, 1]$ as follows:

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} : x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Then, the function δ is called the modulus of convexity of E.

Definition 3.2. Let C be a nonempty convex subset of a Banach space E with $diam(C) > 0$ and let r be a real number with $0 < r \leq \frac{1}{2}diam(C)$. We define the function $\delta_{C,r}$ of $[0, 2]$ into $[0, 1]$ as follows:

$$\delta_{C,r}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{r}\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\| : x, y, z \in C \right.$$
$$\left. \|z - x\| \leq r, \|z - y\| \leq r, \|x - y\| \geq \varepsilon r\right\}.$$

We also define $\varepsilon_0(C, r) = \sup\{\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq 2,\ \delta_{C,r}(\varepsilon) = 0\}$. (see also [8])

定義より次のことが容易に得られる.

Lemma 3.3. We obtain that $\delta(0) = 0, 0 \leq \delta(\varepsilon) \leq 1$ for every $\varepsilon \in [0,2]$ and $\delta(\varepsilon)$ is increasing in ε.

Banach 空間 E が狭義凸であるとは, $\dfrac{\|x+y\|}{2} < 1$ が $\|x\| = \|y\| = 1$ かつ $x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ に対して成立するときをいう. Banach 空間 E が一様凸であるとは, $r \geq \varepsilon > 0$ をみたす任意の $r, \varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq r \left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right)$$

が $\|x\| \leq r$, $\|y\| \leq r$ と $\|x-y\| \geq \varepsilon$ をみたす全ての $x, y \in E$ に対して成立する $\delta(\varepsilon/r) > 0$ が存在するときをいう. もちろん, 一様凸であれば狭義凸である.

Banach 空間 E の modulus of convexity δ の基本的な性質として, 次の結果が示されている.

Lemma 3.4. Let E be a uniformly convex Banach space. Then, for any $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$.

Lemma 3.5. Let E be a uniformly convex Banach space. Then, $\delta(\varepsilon) = 0$ if and only if $\varepsilon = 0$.

一様凸な Banach 空間では convex approximate property とよばれる次の性質がみたされることが示されている.

Lemma 3.6. Let E be a uniformly convex Banach space. Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer p such that $coM \subset co_pM + B_\varepsilon(E)$ for all subset M of C.

Lemma 3.3 ~Lemma 3.6 などを用いることで, 次の一様凸な Banach 空間上の結果 (Lemma 3.7~ Lemma 3.9) が Bruck [5, 6] によって示されている.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, Γ を $\gamma(0) = 0$ をみたす狭義凸で連続な凸関数 $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ の集合とする. C から C への写像 T が $type\,(\gamma)$ であるとは, 任意の $x, y \in C$ と $c \in [0,1]$ に対して, $\gamma\big(\|cTx+(1-c)Ty-T(cx+(1-c)y)\|\big) \leq \|x-y\|-\|Tx-Ty\|$ をみたす $\gamma \in \Gamma$ が存在するときをいう. ([5]).

Lemma 3.7. Let E be a uniformly convex Banach space. Then, there exists $\gamma \in \Gamma$ such that every nonexpansive mapping T of C into itself is $of\,type\,(\gamma)$.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, T を C から C への写像とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, C の部分集合 F_ε を次のように定義する.

$$F_\varepsilon(T) = \{x \in C : \|Tx - x\| \leq \varepsilon\}.$$

Lemma 3.8. Let E be a uniformly convex Banach space and let C be a nonempty closed convex subset of E. For any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any nonexpansive mapping T of C into itself,

$$\overline{co}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T).$$

Lemma 3.9. Let E be a uniformly convex Banach space and let C be a nonempty bounded closed convex subset of E. Then

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in C \\ T\in N(C)}} \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i x - T\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i x\right)\right\| = 0,$$

where $N(C)$ denotes the set of all nonexpansive mappings of C into itself.

一方,Banach 空間 E の凸部分集合 C の modulus of convexity $\delta_{C,r}$ の基本的な性質として, 次の結果が得られる.
以後 r は $0 \le r \le \frac{1}{2}diam(C)$ をみたす任意の実数とする.

Lemma 3.10. We obtain that $\delta_{C,r}(0) = 0, 0 \le \delta_{C,r}(\varepsilon) \le 1$ for every $\varepsilon \in [0,2]$ and $\delta_{C,r}(\varepsilon)$ is increasing in ε. We also see that $\delta_{E,r}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ for all $r > 0$. (cf. Lemma 3.3)

Lemma 3.11. Let C be a nonempty convex subset of E. For $a \in E$, we can see that $\delta_{\overline{C},r}(\varepsilon) = \delta_{C,r}(\varepsilon)$ and that $\delta_{C+a,r}(\varepsilon) = \delta_{C,r}(\varepsilon)$.

Lemma 3.12. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty compact convex subset of E. Then, for any $\varepsilon > 0$, $\delta_{C,r}(\varepsilon) > 0$. (cf. Lemma 3.4)

Lemma 3.13. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty compact convex subset of E. Then, $\varepsilon_0(C,r) = 0$. Therefore, $\delta_{C,r}(\varepsilon) = 0$ if and only if $\varepsilon = 0$. (cf. Lemma 3.5).

狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸部分集合は Lemma 3.6 と対応する次の性質を持つことが容易に示される.

Lemma 3.14. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty compact convex subset of E. Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer p such that $coM \subset co_pM + B_\varepsilon(E)$ for all subset M of C.

Lemma 3.10〜Lemma 3.14 を用いることで, Lemma 3.7〜Lemma 3.9 と同じ形で, 狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸部分集合で成立する次の結果 (Lemma 3.15〜Lemma 3.17) が得られる.

Lemma 3.15. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty compact convex subset of E. Then, there exists $\gamma \in \Gamma$ such that every nonexpansive mapping T of C into itself is *of type* (γ). (cf. Lemma 3.7)

Lemma 3.16. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty compact convex subset of E. For any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any nonexpansive mapping T of C into itself,

$$\overline{co}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T).$$

(cf. Lemma 3.8)

Lemma 3.17. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty compact convex subset of E. Then,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{y\in C \\ T\in N(C)}} \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i y - T\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i y\right) \right\| = 0$$

where $N(C)$ denotes the set of all nonexpansive mappings of C into itself. (cf. Lemma 3.9)

4. Convergence Theorems

以後 S は semigroup をとし,$B(S)$ は有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし, その norm は supremum-norm とする. また,D は $B(S)$ の部分空間をあらわすものとする. $\mu \in D^*$ に対して,$\mu(f)$ はμの $f \in D$ での値をあらわすが, $\mu(f)$ は$\mu_t(f(t))$ とかくこともある. D が 1 を含むとき,D 上の線形汎関数μは $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすならば D 上の mean といわれる.

S を semigroup とし, C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ をみたすものとする. さらに任意の $x \in C$ に対して $\{T(t)x : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する.D を $B(S)$ の部分空間で 1 を含み,l_s-invariant であり、また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $\langle T(\cdot)x, x^*\rangle \in D$ をみたすものとする. D 上の任意の meanμと任意の $x \in C$ に対して $\langle T_\mu x, y\rangle = \mu_s\langle T(s)x, y\rangle$ が任意の $y \in E^*$ に対して成立する C の元 $T_\mu x$ が唯一存在する ([7, 14]). また, T_μが C から C への nonexpansive 写像になることも知られている. そこで, Atsushiba and Takahashi [1] は次の iteration scheme を導入した.

$$x_1 = x \in C \quad \text{and} \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は$\alpha_n \in [0,1]$ をみたす実数列とし, $\{\mu_n\}$ は D 上の mean の列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$T_n x = \alpha_n x + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x \quad \text{forevery} \quad x \in C$$

とおくと, 写像 T_nは C から C への nonexpansive 写像となる. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $F(\mathcal{S}) \subset F(T_{\mu_n}) \subset F(T_n)$ が成立し, 結局 $F(\mathcal{S}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が成立する. (3) で定義

される iterates $\{x_n\}$ は
$$x_{n+1} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 x_1.$$
と書ける. $S_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1$ とおくと x_{n+1}は
$$x_{n+1} = S_n x_1.$$
と書きあらわすこともできる.

任意の $s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して, $r_s f \in B(S)$ と $l_s f \in B(S)$ を
$$(r_s f)(t) = f(ts), \quad (l_s f)(t) = f(st) \quad \text{for all} \quad t \in S$$
で定義する. また r_s^*と l_s^*でそれぞれ r_sと l_sの共役作用素をあらわす. $s \in S$ のとき, $B(S)$ の部分空間 D が l_s-invariant であるとは, 任意の $f \in D$ に対して $l_s f \in D$ であるときにいう. r_s-invariant も同様に定義される.

Atsushiba and Takahashi [1] は (3) で定義される iteration scheme によって Hilbert 空間の nonexpansive semigroup に対する弱, 強収束定理を証明した. 本研究ではこの iteration scheme による写像族の不動点近似法を Banach 空間で考察し, まず次の弱収束定理を得た.

Theorem 4.1. Let E be a uniformly convex Banach space which satisfies Opial's condition or whose norm is Fréchet differentiable. Let C be a nonempty closed convex subset of E and let S be a semigroup. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C such that $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ and let D be a subspace of $B(S)$ containing constants and l_s-invariant for each $s \in S$. Suppose that for each $x \in C$ and $x^* \in E^*$, the function $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ is in D. Let $\{\mu_n\}$ be a sequence of means on D such that
$$\lim_{n \to \infty} \|\mu_n - l_s^* \mu_n\| = 0$$
for every $s \in S$. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by
$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{\mu_n} x_n \quad \text{for every} \quad n \geq 1,$$
where $\{\alpha_n\}$ is a sequence in $[0,1]$. If $\{\alpha_n\}$ is chosen so that $\alpha_n \in [0,a]$ for some a with $0 < a < 1$, then $\{x_n\}$ converges weakly to a common fixed point z_0 of $T(t), t \in S$. Further, $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{S_m x : m \geq n\} \cap F(\mathcal{S})$.

Banach 空間の (3) で定義される iteration scheme の強収束定理 (Theorem 4.5) の証明に重要な役割を担う補題を挙げる.
Xu [15] の結果の概念をもとにして, 次の補題を得た.

Lemma 4.2. Let $p \in \mathbb{R}^+$ with $p > 1$. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty compact convex subset of E. Then, there is a function $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

which is strictly increasing, convex and continuous on [0, diam (C)], and satisfies that $g(0) = 0$ and

$$\|\lambda(z-x)+(1-\lambda)(z-y)\|^p \leq \lambda\|z-x\|^p + (1-\lambda)\|z-y\|^p - \lambda(1-\lambda)g(\|x-y\|)$$

for all $x, y \in C$ and λ with $0 \leq \lambda \leq 1$.

Lemma 3.15～Lemma 3.17 などを用いて,次の結果 (Lemmas 4.3,4.4) が得られる.

Lemma 4.3. Let C be a nonempty compact convex subset of a strictly convex Banach space E and let S be a semigroup. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C and let D be a subspace of $B(S)$ containing constants and l_s-invariant for each $s \in S$. Suppose that for each $x \in C$ and $x^* \in E^*$, the function $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ is in D. Let $\{\mu_n\}$ be a sequence of means on D such that

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - l_s^*\mu_n\| = 0$$

for every $s \in S$. Then, for any $t \in S$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \|T_{\mu_n}x - T(t)T_{\mu_n}x\| = 0.$$

Lemma 4.4. Let E be a strictly convex Banach space, let C be a nonempty closed convex subset of E and let S be a semigroup. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C such that $\bigcup_{t\in S} T(t)(C) \subset K \subset C$ for some compact subset K of C. Let D be a subspace of $B(S)$ containing constants and l_s-invariant for each $s \in S$. Suppose that for each $x \in C$ and $x^* \in E^*$, the function $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ is in D. Let $\{\mu_n\}$ be a sequence of means on D such that

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - l_s^*\mu_n\| = 0$$

for every $s \in S$. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n \quad \text{for every} \quad n \geq 1,$$

where $\{\alpha_n\}$ is a sequence in $[0,1]$. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N},$$

where $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$ for some a with $0 < a < 1$. Then,

$$\lim_n \|T(t)x_n - x_n\| = 0 \quad \text{for every} \quad t \in S.$$

Lemma 4.2～Lemma 4.4 を用いて, 次の強収束定理を証明できる.

Theorem 4.5. Let E be a strictly convex Banach space, let C be a nonempty closed convex subset of E and let S be a semigroup. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C such that $\bigcup_{t\in S} T(t)\big(C\big) \subset K \subset C$ for some compact subset K of C and $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Let D be a subspace of $B(S)$ containing constants and l_s-invariant for each $s \in S$. Suppose that for each $x \in C$ and $x^* \in E^*$, the function $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$ is in D. Let $\{\mu_n\}$ be a sequence of means on D such that

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - l_s^*\mu_n\| = 0$$

for every $s \in S$. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n \quad \text{for every} \quad n \geq 1,$$

where $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence in $[0,1]$. If $\{\alpha_n\}$ is chosen so that $\alpha_n \in [0,a]$ for some a with $0 < a < 1$, then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point z_0 of $T(t), t \in S$. Further, $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{S_m x : m \geq n\} \cap F(\mathcal{S})$.

5. Applications

この節では Theorem 4.5 の系として容易に証明できる強収束定理を挙げる.(cf. [1])

Baillon [3] によって証明された最初の非線形エルゴード定理の概念をもとに, 次の強収束定理の iteration scheme を導入した. また, この iteration scheme を一般化して (3) で定義される iteration scheme を導入した.

Corollary 5.1. Let E be a strictly convex Banach space and let C be a nonempty closed convex subset of E. Let T be a nonexpansive mapping of C into itself such that $T\big(C\big) \subset K \subset C$ for some compact subset K of C. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{n+1}x_n + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i x_n \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i x_n \end{aligned}$$

for every $n \geq 1$. Then, $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of $T(t), t \in S$.

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ とし,$Q = \{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$を次の (a)~(c) 条件をたす matrix とする.

(a) $\sup_{n\geq 0} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < \infty$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$;

(c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|q_{n,m+1}-q_{n,m}|=0.$

このとき,matrix Q は strongly regular matrix といわれる ([9]). もし,Q が strongly regular matrix であれば, 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して,

$$|q_{n,m}|\to 0, \qquad \text{as} \quad n\to\infty$$

が成立する.([7]).

Reich [12] や Hirano, Kido and Takahashi [7] が証明した収束定理などの概念をもとに次の強収束定理の iteration scheme を導入した.

Corollary 5.2. Let E and C be as in Theorem 5.1. Let T be a nonexpansive mapping of C into itself such that $T\big(C\big)\subset K\subset C$ for some compact subset K of C and let $Q=\{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ strongly regular matrix. Suppose $x_1=x\in C$ and $\{x_n\}$ is given by $x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)\sum_{m=0}^{\infty}q_{n,m}T^m x_n$ for every $n\geq 1$, where $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence in $[0,1]$. If $\{\alpha_n\}$ is chosen so that $\alpha_n\in[0,a]$ for some a with $0<a<1$, then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of $T(t), t\in S$.

Hirano, Kido and Takahashi [7] が証明した収束定理の概念をもとに, 次の強収束定理の iteration scheme を導入した ([2]).

Corollary 5.3. Let E and C be as in Theorem 5.1. Let U and T be nonexpansive mappings of C into itself such that $T\big(C\big)\cap U\big(C\big)\subset K\subset C$ for some compact subset K of C and $F(T)\cap F(U)\neq\emptyset$. Suppose $x_1=x\in C$ and $\{x_n\}$ is given by $x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}U^iT^jx$ for every $n\geq 1$, where $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence in $[0,1]$. If $\{\alpha_n\}$ is chosen so that $\alpha_n\in[0,a]$ for some a with $0<a<1$, then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of T and U.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $S'=\{T(s):0\leq s\leq+\infty\}$ を C から C への写像の族とする. このとき,S' が次の (i)～(iv) をみたすとき, C 上の one-parameter nonexpansive semigroup であるという.

(i) $T(0)=I$;
(ii) $\|T(t)x-T(t)y\|\leq\|x-y\|$ が任意の $x,y\in C$ と $t\in\mathbb{R}^+$ に対して成立する;
(iii) $T(t+s)=T(t)T(s)$ が任意の $t,s\in\mathbb{R}^+$ に対して成立する;
(iv) $t\mapsto T(t)x$ が任意の $x\in C$ に対して連続である.

Baillon [4] が証明した非線形エルゴード定理などの概念をもとに次の強収束定理の iteration scheme を導入した.

Corollary 5.4. Let E and C be as in Theorem 5.1. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ be an one-parameter nonexpansive semigroup on C such that $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ and $\bigcup_{0<t\infty} T(t)(C) \subset K \subset C$ for some compact subset K of C. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} T(t)x_n dt$ for every $n \geq 1$, where $s_n \to \infty$ as $n \to \infty$ and $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence in $[0,1]$. If $\{\alpha_n\}$ is chosen so that $\alpha_n \in [0,a]$ for some a with $0 < a < 1$, then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of $T(t), t \in S$.

Reich [12] や Hirano, Kido and Takahashi [7] が証明した収束定理などの概念をもとに次の強収束定理の iteration scheme を導入した.

Corollary 5.5. Let E and C be as in Theorem 5.1. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ be an one-parameter nonexpansive semigroup on C such that $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ and $\bigcup_{0<t\infty} T(t)(C) \subset K \subset C$ for some compact subset K of C. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) r_n \int_0^{\infty} e^{-r_n t} T(t)x_n dt$ for every $n \geq 1$, where $r_n \to 0$ as $n \to \infty$ and $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence in $[0,1]$. If $\{\alpha_n\}$ is chosen so that $\alpha_n \in [0,a]$ for some a with $0 < a < 1$, then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of $T(t), t \in S$.

$Q = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を次の (i)～(iii) をみたすものとする.

(a) $\displaystyle\sup_{s\geq 0}\int_0^{\infty} |Q(s,t)|dt < \infty;$

(b) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty} Q(s,t)dt = 1;$

(c) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty} |Q(s,t+h) - Q(s,t)|dt = 0 \qquad \text{for every} \quad h \in \mathbb{R}^+.$

このとき, Q は strongly regular kernel といわれる.

Reich [12] が証明した収束定理などの概念をもとに次の強収束定理の iteration scheme を導入した.

Corollary 5.6. Let E and C be as in Theorem 5.1. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ be an one-parameter nonexpansive semigroup on C such that $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ and $\bigcup_{0<t\infty} T(t)(C) \subset K \subset C$ for some compact subset K of C. Let $\{Q(s,t)\}$ be a strongly regular kernel. Suppose $x_1 = x \in C$ and $\{x_n\}$ is given by $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\int_0^{\infty} Q(s_n,t)T(t)x_n dt$ for every $n \geq 1$, where $s_n \to \infty$ as $n \to \infty$ and $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence in $[0,1]$. If $\{\alpha_n\}$ is chosen so that $\alpha_n \in [0,a]$ for some a with $0 < a < 1$, then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of $T(t), t \in S$.

REFERENCES

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating Common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process*, to apper.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating Common Fixed Points of Two Nonexpansive Mappings in Banach Spaces*, to apper in Bull. Aust. Math. Soc.

[3] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), 1511-1514.

[4] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions imparies,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), 75–78.

[5] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107-116.

[6] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **38** (1981), 304-314.

[7] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **12** (1988), 1269-1281.

[8] H. Ishihara and W. Takahashi, *Modulus of convexity, characteristic of convexity and fixed point theorems* Kodai Math. J. **10** (1987), 197-208.

[9] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series,* Acta Math. **80** (1948), 167-190.

[10] W.R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506-510.

[11] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591-597.

[12] S. Reich, *Almost convergence and Nonlinear Ergodic Theorems*, J. Approx. Theory, **24** (1978), 269-272.

[13] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274-276.

[14] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[15] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (12) (1991), 1127–1138.

(S. Atsushiba) DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND COMPUTING SCIENCES, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, O-OKAYAMA, MEGUROKU, TOKYO 152, JAPAN

E-mail address, S. Atsushiba: `atsusiba@is.titech.ac.jp`