数理解析研究所講究録
1037巻 1998年 37-48

CR写像に対する分類問題について

林本 厚志

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

1. 序

$\mathbb{C}^n$の滑らかな実$2n-d$次元部分多様体MがCR部分多様体であるとは, Mの点pでの正則接空間$H_p(M)$の次元が点pによらず一定であるときをいい, 特にその実次元が$2n-2d$のときMはgenericであるという[5]. 以下断らない限り, Mと$\tilde{M}$は, 実$2n-d$次元のgenericで実解析的な$\mathbb{C}^n$のCR部分多様体で原点を含むものを表し, $F: M \to \tilde{M}$は$F(0)=0$をみたすCR写像を表すものとする.

次の問題を考える.

問題. CR多様体の間のCR写像を, CR幾何学の言葉を使って分類せよ.

ここでは, 上の問題に対して, 次のような解答を与える.

(1) $M, \tilde{M}$の原点での型がある条件をみたせば, Fは定数写像に限る.
(2) 原点での, Fのある方向の微分が0でないなら, Fは原点を含むある開集合上の正則写像の制限である.

(1)については$M, \tilde{M}$が実超曲面の場合にM. S. Baouendi, L. P. Rothschildが次の定理を示している.

定理 (M. S. Baouendi-L. P. Rothschild) [3]. *M, $\tilde{M}$を滑らかな実超曲面とし, Hをそれらの間の滑らかなCR写像とする. M, $\tilde{M}$が, それぞれ点p, $H(p)$でD'Angeloの意味で有限型であるとするなら, Hは定数か又は$Jac(H) \neq 0$である.*

この定理を余次元が高い場合に拡張したのが次の定理1.1である. 定理の中で, M, $\tilde{M}$の原点での型はBloom–Grahamの意味である(定義2.1) [4], [5]. また適当な座標変換をすることにより, genericなCR部分多様体の定義関数は(2.1), (2.2)のようにできるので、原点の十分小さい近傍Uで, $(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap U \subset M$となるものが存在するとして構わない.

定理1.1 [11], [12]. *M, $\tilde{M}$をgenericな$\mathbb{C}^n$のCR部分多様体とし, $(f,g) = (f_1, \ldots, f_{n-d}, g_1, \ldots, g_d)$を, それらの間のCR写像とする. M, $\tilde{M}$の原点での型をそれぞれ$(l_1, \ldots, l_d)$, $(\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_d)$とする. 原点の十分小さい近傍$U$に対し, (f,g)は$(f,g)((\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap U) \subset \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$をみたすとする. このとき, (f,g)は定数か, 又は$l_j \geq \tilde{l}_j, \quad j=1, \ldots, d,$が成り立つ.*

よって, この系として次の分類定理を得る.

分類定理1 [11]. 記号は定理 1.1と同じとする. $l_j < \tilde{l}_j$となるjが存在すれば, (f,g)は定数である.

次に(2)については, M. S. Baouendi, L. P. Rothschildが次のことを示している.

定理 (**M. S. Baouendei–L. P. Rothschild**) **[2]**. M, $\tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実解析的な実超曲面とし, F をそれらの間の滑らかな *CR* 写像とする. $p \in M$, $p' = F(p)$ とする. 次のどちらか一方が成り立つなら, F は p の $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の近傍から $\mathbb{C}^{n+1}$ への正則写像の制限である.

(1) F は 点 p で *finite multiplicity* であり, $\tilde{M}$ は 点 p' で *essentially finite* である.
(2) M は点 p で *essentially finite* であり, F は $F'(\mathbb{C}T_pM) \not\subset H^{\mathbb{C}}_{p'}(\tilde{M})$ をみたす.

この定理のように, 今までの 多くの CR 多様体の間の CR 写像に対する正則拡張定理は, その写像が C^∞ 級であることを仮定していた [2], [3], [1]. それに対して, 固有正則写像の拡張定理の研究を通じて, C^m級 $(m < \infty)$ のCR写像に対する正則拡張定理も示された [15], [7]. 次の分類定理２も, 写像はC^m級 $(m < \infty)$ であるという仮定で成立する. 定理の中で, 実超曲面 M, $\tilde{M}$ の定義関数が (2.1), (2.2) のように正規化されているとき, $F = (F_1, \ldots, F_n) : M \to \tilde{M}$ が原点で Hopf Lemma Property をみたすとは $(\partial F_n/\partial s)(0) \neq 0$ が成立することをいう [1]. (上の M. S. Baouendi, L. P. Rothschild の定理の条件 (2) の $F'(\mathbb{C}T_pM) \not\subset H^{\mathbb{C}}_{p'}(\tilde{M})$ は F が点 p で Hopf Lemma Property をみたすことを表している.) また C^m 級関数 $f_1, \ldots, f_n$ に対して, $\mathrm{sp} < f_1, \ldots, f_n >_{\mathbb{C}} \not\ni 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$ は, $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$ となる $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \backslash (0, \ldots, 0)$ が存在しないことを表す. ここで $\mathcal{I}$ は $z, \bar{z}, s$ で生成されるイデアルとし, 原点での型は Bloom–Graham の意味であるとする [4], [5].

分類定理２ **[13]**. M, $\tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面とし, (f, f_{n+1}) をそれらの間の *CR* 写像とする. $\tilde{M}$は原点で非退化なレビ形式を持ち, M の原点での型は $l\,(< +\infty)$ とする. 次の３つのうち, どれかがみたされれば (f, f_{n+1}) は原点の近傍上の正則写像の制限である.

(1) M は, 原点で非退化なレビ形式を持ち, (f, f_{n+1}) は C^3 級で, 原点で *Hopf Lemma Property* をみたす.
(2) M は, 原点で退化したレビ形式を持ち, $n = 1$. (f_1, f_2) は C^{l+1} 級で, 原点で *Hopf Lemma Property* をみたす.
(3) M は, 原点で退化したレビ形式を持ち, $n \geq 2$. (f, f_{n+1}) は C^m 級 (m は十分大きいが ∞ である必要はない) で, $sp < f_1, \ldots, f_n >_{\mathbb{C}} \not\ni 0 \; (mod\ \mathcal{I}^{m+1})$ をみたす.

これは Chong-Kyu Han の論文 [9] の主定理を利用することにより示される.

２. 定義と基本事項

$T^{\mathbb{C}}_p(M)$ で $T_p(M)$ の複素化, $H^{\mathbb{C}}(M)$ で $H(M)$ の複素化を表す. M の原点での型を定義するために, まず $T^{\mathbb{C}}_0(M)$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{L}^k_0(M)$ $(k \in \mathbb{N})$ を次のように定義する. $L_j \in H^{\mathbb{C}}(M)$ に対して, 微分作用素 $[L_1[L_2 \ldots [L_{k-1}, L_k]] \ldots]_0$ を, $H^{\mathbb{C}}(M)$ で生成される, 原点での長さ k の Lie bracket という. そこで $\mathcal{L}^1_0(M)$ を $H^{\mathbb{C}}_0(M)$ とし, $\mathcal{L}^k_0(M)$ を, $H^{\mathbb{C}}_0(M)$ と, $H^{\mathbb{C}}(M)$ で生成される, 原点での長さ k 以下の Lie bracket で張られる $T^{\mathbb{C}}_0(M)$ の部分ベクトル空間とする.

定義２.１ **[4], [5]**. M を実 $2n - d$ 次元の generic な CR 部分多様体とする. 原点が型 $(l_1, \ldots, l_d)$ を持つとは, 次の３条件が成立することをいう.

(1) $dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}^j_0(M) = 2n - 2d \quad (j < l_1)$,

(2) $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}_0^j(M) = 2n - 2d + i \quad (l_i \le j < l_{i+1})$,
(3) $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}_0^j(M) = 2n - d \quad (j \ge l_d)$.

この時, $\mathrm{type}_0 M = (l_1, \ldots, l_d)$ と書き, 以後 $l_1 < \cdots < l_d < \infty$ と仮定する.
$\mathrm{type}_0 M = (l_1, \ldots, l_d)$ の時, 適当な座標変換をすることにより, M の定義関数は次のように正規化できる.

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} r_1 &= t_1 - h_1(z, \bar{z}, s), \\ & \vdots \\ r_d &= t_d - h_d(z, \bar{z}, s). \end{cases}$$

ここで $z = x + iy \in \mathbb{C}^{n-d}, w = s + it \in \mathbb{C}^d$ であり,

$$\text{(2.2)} \qquad h_j(z, \bar{z}, s) = \sum_{\substack{|\nu|+|\mu| \ge l_j \\ |\nu|,|\mu| \ge 1, |\tau| \ge 0}} h^j_{\nu,\mu,\tau} z^\nu \bar{z}^\mu s^\tau$$

は実解析的である. 特に, M が実超曲面で, 原点で非退化なレビ形式を持つなら, Chern-Moser [6] により, h は次のように正規化できる.

$$\text{(2.3)} \qquad h(z, \bar{z}, s) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j |z_j|^2 + \sum_{\substack{|\nu|,|\mu| \ge 2 \\ \tau \ge 0}} h_{\nu,\mu,\tau} z^\nu \bar{z}^\mu s^\tau.$$

ここで$\lambda_j = +1$ 又は -1 である. $n = 2$ の時は, $\lambda_1 = +1$ とする. 以下 $\mathrm{type}_0(\tilde{M}) = (\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_d)$ のように, $\tilde{M}$ に対する記号は, "∼" をつけて区別する.
M の定義関数が上のように正規化されているときに, M の原点の近傍での, 接 Cauchy-Riemann ベクトル場は次のように書ける.

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + i \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \mu_{l,k} \frac{\partial h_k}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial s_l}, \qquad j = 1, \ldots, n-d.$$

ここで, $\mu_{l,k}$ は $(d \times d)$ 行列 $(I - i(\partial h/\partial s))^{-1}$ の第 (l,k) 成分である. 特に $d = 1$ なら, 次のように書ける.

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + i \frac{\partial h/\partial z_j}{1 - i(\partial h/\partial s)} \frac{\partial}{\partial s} \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

CR 部分多様体 M 上定義された CR 関数は M の定義関数 $r = t - h$ を使って次のように巾級数で表すことができる.

補題2.1 [2]. *generic な CR 部分多様体 M 上の実解析的な CR 関数 $F : M \to \mathbb{C}$ は, M の定義関数 $r(z, w) = t - h(z, \bar{z}, s)$ を使って次のように書ける.*

$$F(z, \bar{z}, s) = \sum_{|\alpha|+|p| \ge 1} A_{\alpha,p} z^\alpha (s + ih)^p.$$

証明. $M\cap\{y=0\}$ はtotally real な多様体であるから, $F|_{M\cap\{y=0\}}=0$ なら, $F=0$ であることに注意する. F を $M\cap\{y=0\}$ 上, 次のように展開する.

$$F(x,x,s)=\sum_{|\alpha|+|p|\geq 1}\tilde{A}_{\alpha,p}x^{\alpha}s^{p}.$$

次に $A_{\alpha,p}$を, 次をみたすように帰納的に見つける.

$$\sum_{|\alpha|+|p|\geq 1}\tilde{A}_{\alpha,p}x^{\alpha}s^{p}=\sum_{|\alpha|+|p|\geq 1}A_{\alpha,p}x^{\alpha}(s+ih(x,x,s))^{p}.$$

$f(z,\bar{z},s)$ を次のような巾級数とする.

$$f(z,\bar{z},s)=\sum_{|\alpha|+|p|\geq 1}A_{\alpha,p}z^{\alpha}(s+ih(z,\bar{z},s))^{p}.$$

このとき $F-f$ は M 上の CR 関数であり, $(F-f)|_{M\cap\{y=0\}}=0$ であるから, 先の注意により補題が示される. □

補題 2．2 [11]. $(f,g)=(f_1,\dots,f_{n-d},g_1,\dots,g_d):M\to\tilde{M}$を, *generic* な *CR* 部分多様体の間の実解析的 *CR* 写像とする. 原点の十分小さな近傍 U に対して,

$$(f,g)((\{0\}^{n-d}\times\mathbb{R}^d)\cap U)\subset\{0\}^{n-d}\times\mathbb{R}^d$$

が成立するなら, f_j, g_k は次のように展開される.

$$f_j(z,\bar{z},s)=\sum_{|\alpha|\geq 1,|p|\geq 0}a^{j}_{\alpha,p}z^{\alpha}(s+ih)^{p},\quad j=1,\dots,n-d,$$

$$g_k(z,\bar{z},s)=\sum_{|q|\geq 1}b^{k}_{0,q}(s+ih)^{q},\quad b^{k}_{0,q}\in\mathbb{R},\quad k=1,\dots,d.$$

証明の概略. 補題 2.1 から f_j,g_kは次のように展開される.

$$f_j(z,\bar{z},s)=\sum_{|\alpha|+|p|\geq 1}a^{j}_{\alpha,p}z^{\alpha}(s+ih)^{p},$$

$$g_k(z,\bar{z},s)=\sum_{|\beta|+|q|\geq 1}b^{k}_{\alpha,p}z^{\alpha}(s+ih)^{p}.$$

$(f,g)((\{0\}^{n-d}\times\mathbb{R}^d)\cap U)\subset\{0\}^{n-d}\times\mathbb{R}^d$ から $|p|\geq 0$ に対して $a_{0,p}=0$, $|q|\geq 1$ に対して $b^{k}_{0,q}\in\mathbb{R}$ を得る. これらを上の展開式に代入し, それらの式を $\mathrm{Im}g_k=\tilde{h}(f,\bar{f},\mathrm{Re}g)$, $k=1,\dots,d$, に代入することにより, $|\beta|\geq 1,|q|\geq 1$ に対して, $b^{k}_{\beta,q}=0$, $k=1,\dots,d$ を得る. □

C^m 級の CR 関数についても, 同様の議論により次のことが示される. 補題の中で, $\mathcal{I}$ は $z,\bar{z},s$ で生成されるイデアルとする.

補題2．3 [13]. $(f_1,\ldots,f_n,g)=(f,g):M\to\tilde{M}$を, $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面の間の C^m 級の CR 写像で $(f,g)=(0,0)$ をみたすとする．原点の十分小さい近傍 U が存在して,

$$f_j((\{0\}^n\times\mathbb{R})\cap U)\equiv 0 \quad (mod\,\mathcal{I}^{m+1}),$$
$$\mathrm{Im}g((\{0\}^n\times\mathbb{R})\cap U)\equiv 0 \quad (mod\,\mathcal{I}^{m+1})$$

をみたすならば, f_j, g は次のように展開される．

$$f_j(z,\bar{z},s)\equiv\sum_{|\alpha|\geq 1,p\geq 0}a^j_{\alpha,p}z^\alpha\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^p \qquad (mod\,\mathcal{I}^{m+1}), \tag{2.4}$$

$$g(z,\bar{z},s)\equiv\sum_{q=1}^{\infty}b_{0,q}\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^q \qquad (mod\,\mathcal{I}^{m+1}). \tag{2.5}$$

補題2．4． $(f_1,\ldots,f_n,g):M\to\tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面の間の CR 写像で $(f,g)=(0,0)$ をみたすとすると $(\partial g/\partial s)(0)\in\mathbb{R}$.

3．点の型による分類

この節では, 定理 1.1 を証明し, それに対するいくつかの注意を与える．定理の証明には次の補題が必要である．f_j, g_k は補題 2.2 のように展開されているとする．

補題3．1． g_d が恒等的に零ならば, $f_1,\ldots,f_{n-d}$も恒等的に零である．

証明. 仮定の下で, $\tilde{h}_d(f,\bar{f},\mathrm{Re}g)=0$ である．つまり,

$$\sum_{\substack{|\nu|+|\mu|\geq\tilde{l}_d\\|\nu|,|\mu|\geq 1,|\tau|\geq 0}}\tilde{h}^d_{\nu,\mu,\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\geq 1,|p|\geq 0}a_{\alpha,p}z^\alpha(s+ih)^p\Big)^\nu\Big(\sum_{|\alpha|\geq 1,|p|\geq 0}\bar{a}_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha(s-ih)^p\Big)^\mu$$
$$\times\Big(\frac{1}{2}\sum_{|q|\geq 1}b_{0,q}\big[(s+ih)^q+(s-ih)^q\big]\Big)^\tau=0.$$

$|\tau|=0$ の場合を考える．上の式で, $z,\bar{z}$ についての $\tilde{l}_d$次の項は

$$\sum_{\substack{|\nu|+|\mu|=\tilde{l}_d\\|\nu|,|\mu|\geq 1}}\tilde{h}^d_{\nu,\mu,0}\Big(\sum_{|\alpha|=1,|p|\geq 0}a_{\alpha,p}z^\alpha(s+ih)^p\Big)^\nu\Big(\sum_{|\alpha|=1,|p|\geq 0}\bar{a}_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha(s-ih)^p\Big)^\mu=0$$

をみたすから, $|\alpha|=1,|p|\geq 0$ に対して, $a^1_{\alpha,p},\ldots,a^{n-d}_{\alpha,p}=0$ を得る．同様に, $2\tilde{l}_d$次, $3\tilde{l}_d$次, ...に注目することにより, 全てのα,p に対して、$a^1_{\alpha,p},\ldots,a^{n-d}_{\alpha,p}=0$ を得て, 証明が終る．□

次に定理の証明をする．

定理１．１の証明. (f,g) が定数でないとする．$j=1,\ldots,d$ に対して, $Q_j=\{(q_1,\ldots,q_d)\in\mathbb{Z}^d|q_1,\ldots,q_d\geq 0,q_j\geq 1\}$ とおく．もし結論が成り立たないならば, $l_j<\tilde{l}_j$ となる j が存在し, その時 $j_0=\min\{j|l_j<\tilde{l}_j\}$ とする．この時, 不等式

$$l_1<\cdots<l_{j_0}<\tilde{l}_{j_0}<\cdots<\tilde{l}_d$$

が成立する. CR 写像 (f,g) は $\mathrm{Im} g_j = \tilde{h}_j(f,\bar{f},\mathrm{Re} g)$ をみたす, つまり $j=1,\ldots,d$ に対して, 次の式が成立する.

$$(3.1)\quad \frac{1}{2i}\sum_{|q|\geq 1} b^j_{0,q}\left[(s+ih)^q-(s-ih)^q\right]$$
$$=\sum_{\substack{|\nu|+|\mu|\geq \tilde{l}_j\\ |\nu|,|\mu|\geq 1,|\tau|\geq 0}} \tilde{h}^j_{\nu,\mu,\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\geq 1,|p|\geq 0} a_{\alpha,p}z^\alpha(s+ih)^p\Big)^\nu\Big(\sum_{|\alpha|\geq 1,|p|\geq 0}\bar{a}_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha(s-ih)^p\Big)^\mu$$
$$\times\Big(\frac{1}{2}\sum_{|q|\geq 1} b_{0,q}\left[(s+ih)^q+(s-ih)^q\right]\Big)^\tau.$$

$j=j_0,\ldots,d$ に対して, (3.1) の右辺の $z,\bar{z}$ についての最低次数は$\tilde{l}_{j_0}$である. (3.1) の両辺から l_1次, ... , l_{j_0}次 $(<\tilde{l}_{j_0})$ の項を取り出すことにより, 次の関係式を得る.

$$\sum_{|q|\geq 1} b^j_{0,q}s_1^{q_1}\ldots s_k^{q_k-1}\ldots s_d^{q_d}h_k^{(l_k)}=0,\ \ j=j_0,\ldots,d,\ k=1,\ldots,j_0.$$

ここで, $h_k^{(l_k)}$は h_kに含まれる, z と$\bar{z}$についての l_k次の斉次多項式を表す. よって, 任意の $q\in Q_k$ に対して, $b^j_{0,q}=0$ を得て, 次の結論 (B_{j_0}) を得る.

$$(B_{j_0}):\text{任意の } q\in\bigcup_{k=1}^{j_0}Q_k \text{ と } j=j_0,\ldots,d \text{ に対して } b^j_{0,q}=0.$$

補題3.2. 結論 (B_j) $(j_0\leq j\leq d-1)$ から結論 (B_{j+1}) が得られる.

補題3.2の証明. 結論 (B_j) が成り立つと仮定する.

(I) $l_{j+1}<\tilde{l}_{j+1}$のとき. 不等式

$$l_1<\cdots<l_{j_0}<\cdots<l_{j+1}<\tilde{l}_{j+1}<\cdots<\tilde{l}_d$$

が成り立つ. 上の議論で j_0 を $j+1$ に置きかえることにより, 結論 (B_{j+1}) が得られる.

(II) $l_{j+1}\geq\tilde{l}_{j+1}$ のとき, 不等式

$$l_1<\cdots<l_{j_0}<\tilde{l}_{j_0}<\cdots<\tilde{l}_j<\tilde{l}_{j+1}\leq l_{j+1}<\cdots<l_d$$

が成り立つので, $L_j\tilde{l}_j<l_{j+1}\leq(L_j+1)\tilde{l}_j$ となる $L_j\in\mathbb{N}$ が存在する. 結論 (B_j) を g_jに代入すると、$\mathrm{Im} g_j$の $z,\bar{z}$ についての最低次数は $l_{j+1}(>L_j\tilde{l}_j)$ である. $\mathrm{Im} g_j=\tilde{h}_j(f,\bar{f},\mathrm{Re} g)$ から $z,\bar{z}$ についての$\tilde{l}_j$次の項を取り出すと,

$$\sum_{\substack{|\nu|+|\mu|=\tilde{l}_j\\ |\nu|,|\mu|\geq 1}}\tilde{h}^j_{\nu,\mu,0}\Big(\sum_{|\alpha|=1,|p|\geq 0}a_{\alpha,p}z^\alpha s^p\Big)^\nu\Big(\sum_{|\alpha|=1,|p|\geq 0}\bar{a}_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha s^p\Big)^\mu=0$$

を得る．よって，$|\alpha| = 1, |p| \geq 0$ に対して，$a^1_{\alpha,p}, \ldots, a^{n-d}_{\alpha,p} = 0$ を得る．同様に $\mathrm{Im} g_j = \tilde{h}_j(f, \bar{f}, \mathrm{Re} g)$ 内の $z, \bar{z}$ についての $2\tilde{l}_j$次，$3\tilde{l}_j$次，…，$L_j\tilde{l}_j$次を見ることにより，$1 \leq |\alpha| \leq L_j, |p| \geq 0$ に対して，$a^1_{\alpha,p}, \ldots, a^{n-d}_{\alpha,p} = 0$ を得る．これらを $\mathrm{Im} g_{j+1} = \tilde{h}_{j+1}(f, \bar{f}, \mathrm{Re} g)$ に代入する．その式の，$z, \bar{z}$ についての l_{j+1}次を取り出し，不等式 $l_{j+1} \leq (L_j+1)\tilde{l}_j < (L_j+1)\tilde{l}_{j+1}$ と合わせると，任意の $q \in Q_{j+1}$ に対して $b^{j+1}_{0,q} = 0$ を得る．これと結論 (B_j) を合わせると，結論 (B_{j+1}) を得る．□

定理の証明に戻る．

結論 (B_{j_0}) は示されていたので補題 3.2 と帰納法により，結論 (B_d) を得る．よって，$g_d = 0$ を得て，補題 3.1 により $f_1, \ldots, f_{n-d} = 0$ を得る．

次の主張が示されれば，(f, g) が定数でないことに矛盾して，定理の証明が終る．

主張． $f_1, \ldots, f_{n-d}$が恒等的に零なら $g_1, \ldots, g_{d-1}$ も恒等的に零である．

仮定により先ず，$j = 1, \ldots, d-1$ に対して，$\mathrm{Im} g_j = 0$，つまり次の式が成立している．

$$(3.2) \qquad \sum_{|q|\geq 1} b^j_{0,q}\left\{(s+ih)^q - (s-ih)^q\right\} = 0,\ j = 1, \ldots, d-1.$$

$\zeta \in \mathbb{N}\ (\zeta \leq d-1)$ に対して、$g_d, \ldots, g_{\zeta+1} = 0$ を仮定する．結論 (B_ζ) と、(3.2) で $j = \zeta$ とした時の，$z, \bar{z}$ についての $l_{\zeta+1}, \ldots, l_d$次を見ることにより，全ての $q \in \bigcup_{k=\zeta+1}^{d} Q_k$ に対して、$b^\zeta_{0,q} = 0$ が成立する．これと，結論 (B_ζ) を合わせることにより，$g_\zeta = 0$ を得る．よって帰納法により主張が得られ，よって定理の証明も終る．□

注意．

(1) $M, \tilde{M}$ が $\mathbb{C}^n$ 内の実解析的な pseudoellipsoid の境界なら $l/\tilde{l} \in \mathbb{N}$ である [10], [14]．しかし，一般には $l/\tilde{l} \notin \mathbb{N}$ である [11], [12]．

(2) $n = 2, d = 1$ のときは $l/\tilde{l} \in \mathbb{N}$ である [11], [12]．

4．CR写像に対する正則拡張定理

この節では CR 写像に対する完全系 (complete system) についての Han の定理を使うことにより，分類定理 2 を証明する．先ず，完全系の定義を与える．

定義 [8]．関数 F が位数 K の完全系をみたすとは，$|\alpha| = K$ となる各多重指数α に対して，実解析的関数 H_αが存在して，

$$D^\alpha F = H_\alpha(z, D^\beta F\,;\ |\beta| \leq K-1)$$

が成立することをいう．

よって，C^K 級の関数が位数 K の完全系をみたすなら，それは実解析的な関数である．写像が位数 K の完全系をみたすとはその各成分が位数 K の完全系をみたすこととする．

次の Han の定理を使う．

Han の定理 [9]. M^{2m+1} を, 非退化レビ形式を持つ実 $2m+1$ 次元実解析的 CR 多様体とし, $\{L_1,\ldots,L_m\}$ を実解析的 CR 構造束の一次独立な切断とする. N を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実解析的な実超曲面で, 非退化レビ形式を持つとし, $n \geq m$ を仮定する. $f: M \to N$ をCR写像とする. 正の整数 K が存在してベクトル $\{L^\alpha f : |\alpha| \leq K\}$ と $(0,\ldots,0,1)$ で $\mathbb{C}^{n+1}$が張られるならば, f は位数 $2K+1$ の完全系をみたす.

この定理の証明を詳しく見ることにより, M^{2m+1}が退化レビ形式を持つ場合でも成り立つことが分かる. Han の定理の正の整数 K を M のある点での型を使って表すことを考える. 分類定理2は次の定理の系として得られる. 定理の中で, 原点での型は Bloom–Graham の意味であり, 定理内の (I) の場合には $m \geq l+1$ を仮定する.

定理4.1 [12]. $M, \tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$内の実解析的な実超曲面で $(f, f_{n+1}) = (f_1,\ldots,f_n, f_{n+1}) : M \to \tilde{M}$ を C^m 級の CR 写像とする. $\tilde{M}$は原点で非退化なレビ形式を持ち, $type_0 M = l\,(< +\infty)$ とする. 次の2通りを考える.

(I) M は原点で非退化なレビ形式を持つか, 又は $n=1$ で M は原点で退化するレビ形式を持つ.

(II) M は原点で退化するレビ形式を持ち, $n \geq 2$.

(I) の場合、(f, f_{n+1}) が原点で ***Hopf Lemma Property*** をみたすなら, それは位数 $l+1$ の完全系をみたす.

(II) の場合、(f, f_{n+1}) が $sp\langle f_1,\ldots,f_n\rangle_{\mathbb{C}} \not\ni 0 \ (mod\ \mathcal{I}^{m+1})$ をみたすなら, それは位数が有限の完全系をみたす.

証明. 実解析的超曲面の定義関数は (2.1), (2.2), (2.3) のように正規化されているとする. (I) の場合を次の2通りに分ける.

(I-1) M は原点で非退化なレビ形式を持つ.

(I-2) $n=1$ で, M は原点で退化するレビ形式を持つ.

K を Han の定理の整数としたとき, (I-1) は $K=1$, (I-2) は $K = l/2$, (II) は $K < +\infty$ を示せばよい.

(I) の証明. 原点の十分小さい近傍 U に対して, 実解析的な曲線γで, 曲線 $(f, f_{n+1})((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U)$ を原点で m 位まで近似するものをとる. (f, f_{n+1}) は, 原点で Hopf Lemma Property をみたすことから, γは原点での正則接空間 $H_0(\tilde{M})$ に横断的に交わる. よって, Chern-Moser [6] により適当な座標変換をすることによって, $(f, f_{n+1})((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U)$ は原点で $\{0\}^n \times \mathbb{R}$ に位数 m で接すると仮定してよい. つまり補題 2.3 の仮定をみたしていて, f_j, f_{n+1} は それぞれ (2.4), (2.5) のように展開されているとしてよい. この座標変換により, M の定義関数の形は不変であることに注意する.

(I-1) の場合 $K=1$ を示すには,

$$\det \begin{pmatrix} L_1 f_1(0) & \ldots & L_1 f_n(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n f_1(0) & \ldots & L_n f_n(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a^1_{\alpha_1,0} & \cdots & a^n_{\alpha_1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_{\alpha_n,0} & \cdots & a^n_{\alpha_n,0} \end{pmatrix} \neq 0$$

を証明すればよい. ここで$\alpha_k = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ (k 番目の成分のみ1で他は0) とする. 簡単のため, 一番左の項を $\det(\mathrm{Jac}(f)(0))$ と書く. 先ず, $\mathrm{Im} f_{n+1} \equiv \tilde{h}(f, \bar{f}, \mathrm{Re} f_{n+1})$

(mod $\mathcal{I}^{m+1}$), つまり

$$\tag{4.1} \frac{1}{2i}\Big[\sum_{q\geq 1} b_{0,q}\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^q - \sum_{q\geq 1}\bar{b}_{0,q}\big(s-ih(z,\bar{z},s)\big)^q\Big]$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j\Big[\sum_{|\alpha|\geq 1, p\geq 0} a^j_{\alpha,p}z^\alpha\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^p\Big]\Big[\sum_{|\alpha|\geq 1,p\geq 0}\bar{a}^j_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha\big(s-ih(z,\bar{z},s)\big)^p\Big]$$
$$+\text{higher terms} \qquad (\mathrm{mod}\,\mathcal{I}^{m+1}).$$

を考える. $h(z,\bar{z},s)$ は (2.3) のように展開されているので, (4.1) の両辺の $z_i\bar{z}_k (i \neq k)$ の係数を比較することにより次の関係式を得る.

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j\big(a^j_{\alpha_i,0}\big)\big(\bar{a}^j_{\alpha_k,0}\big) = 0.$$

$n=1$ のときはこの式は考えない. (4.1) の両辺の $|z_k|^2$ の係数を比較することにより, 次の関係式を得る.

$$\frac{1}{2}\lambda_k(b_{0,1}+\bar{b}_{0,1}) = b_{0,1}\lambda_k \quad (\text{補題 } 2.4)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j|a^j_{\alpha_k,0}|^2.$$

よって, 次の行列に関する等式を得る.

$$\begin{pmatrix} \bar{a}^1_{\alpha_1,0} & \cdots & \bar{a}^n_{\alpha_1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}^1_{\alpha_n,0} & \cdots & \bar{a}^n_{\alpha_n,0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 a^1_{\alpha_1,0} & \cdots & \tilde{\lambda}_1 a^1_{\alpha_n,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\lambda}_n a^n_{\alpha_1,0} & \cdots & \tilde{\lambda}_n a^n_{\alpha_n,0}\end{pmatrix} = b_{0,1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n.\end{pmatrix}$$

よって, $\det(\mathrm{Jac}(f)(0)) \neq 0$ であることと,

$$b_{0,1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial s}(0) \neq 0$$

であることが同値であることから, 証明が終る.

(I-2) の場合 $L_1^{l/2}f_1(0,0) = a^1_{l/2,0} \neq 0$ を示せばよい. §3 の注意 (2) により $l/2 \in \mathbb{N}$ である. (I-1) と同じように、CR 写像 (f_1, f_2) の各成分は補題 2.3 のように展開されている. 次の関係式から始める.

$$\tag{4.2} \frac{1}{2i}\Big[\sum_{q=1}^{\infty} b_{0,q}\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^q - \sum_{q=1}^{\infty}\bar{b}_{0,q}\big(s-ih(z,\bar{z},s)\big)^q\Big]$$
$$\equiv \Big[\sum_{\alpha\geq 1,p\geq 0} a^1_{\alpha,p}z^\alpha\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^p\Big]\Big[\sum_{\alpha\geq 1,p\geq 0}\bar{a}^1_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha\big(s-ih(z,\bar{z},s)\big)^p\Big]$$
$$+\text{higher terms} \qquad (\mathrm{mod}\,\mathcal{I}^{m+1}).$$

$l \geq 4$ の場合. (4.2) の両辺で $z, \bar{z}$についての $l-1$ 次未満の項を比較することにより $1 \leq \alpha \leq (l/2)-1,\ p \geq 0,\ \alpha + p \leq m$ に対して, $a^1_{\alpha,p} = 0$ を得る. $h^{(l)}$により h に含まれる $z, \bar{z}$についての l 次の斉次多項式を表す. $a^1_{\alpha,p} = 0\ (1 \leq \alpha \leq (l/2)-1,\ p \geq 0,\ \alpha + p \leq m)$ を (4.2) に代入して, $z, \bar{z}$の l 次の項を取り出すことにより, 次の関係式を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{q\geq 1}(b_{0,q}+\bar{b}_{0,q})qs^{q-1}h^{(l)} \\
&\qquad \equiv \sum_{p\geq 0} a^1_{l,p} z^l s^p \sum_{p\geq 1} \bar{a}^1_{0,p} s^p + \sum_{\alpha=1}^{(l/2)-1} \Big(\sum_{p\geq 0} a^1_{l-\alpha,p} z^{l-\alpha} s^p\Big)\Big(\sum_{p\geq m-\alpha+1} \bar{a}^1_{\alpha,p}\bar{z}^{\alpha} s^p\Big) \\
&\qquad\qquad + \sum_{p\geq 0} a^1_{\frac{l}{2},p} z^{\frac{l}{2}} s^p \sum_{p\geq 0} \bar{a}^1_{\frac{l}{2},p} \bar{z}^{\frac{l}{2}} s^p \\
&\qquad + \sum_{\alpha=1}^{(l/2)-1} \Big(\sum_{p\geq m-\alpha+1} a^1_{\alpha,p} z^{\alpha} s^p\Big)\Big(\sum_{p\geq 0} \bar{a}^1_{l-\alpha,p}\bar{z}^{l-\alpha} s^p\Big) + \sum_{p\geq 0} \bar{a}^1_{l,p}\bar{z}^l s^p \sum_{p\geq 1} a^1_{0,p} s^p \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mathrm{mod}\ \mathcal{I}^{m+1})
\end{aligned}
$$

この式で s が入っていない項を比較し, h の展開式から,

$$2|a^1_{\frac{l}{2},0}|^2 = h_{\frac{l}{2},\frac{l}{2},0}(b_{0,1}+\bar{b}_{0,1})$$

を得る.

$l = 2$ の場合. (4.2) の両辺の $z, \bar{z}$についての 2 次の項を比較し, $h_{1,1,0} = 1$ であることを使うと, $2|a_{1,0}|^2 = b_{0,1} + \bar{b}_{0,1}$ を得る. どちらの場合も補題 2.4 を使うことにより,

$$|a^1_{\frac{l}{2},0}|^2 = h_{\frac{l}{2},\frac{l}{2},0}b_{0,1} = h_{\frac{l}{2},\frac{l}{2},0}\frac{\partial f_2}{\partial s}(0)$$

となり, (f_1, f_2) が原点で Hopf Lemma Property をみたすことから, 証明が終る.

(II) の証明 $K < +\infty$ であることを示すには, 次の中に n 個の一次独立なベクトルが存在すればよい.

$$
(4.3)\qquad
\begin{cases}
L^{\theta_1} f(0,s) &= (L^{\theta_1} f_1(0,s), \ldots, L^{\theta_1} f_n(0,s)) \\
L^{\theta_2} f(0,s) &= (L^{\theta_2} f_1(0,s), \ldots, L^{\theta_2} f_n(0,s)) \\
&\ \ \vdots \\
L^{\theta_n} f(0,s) &= (L^{\theta_n} f_1(0,s), \ldots, L^{\theta_n} f_n(0,s)) \\
&\ \ \vdots \\
L^{\theta} f(0,s) &= (L^{\theta} f_1(0,s), \ldots, L^{\theta} f_n(0,s))
\end{cases}
$$

ここで s は実変数, $\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots, \theta$は多重指数で, $|\theta|\ (< \infty)$ は十分大きく, $|\theta_1| \leq \cdots \leq |\theta_n| \leq \cdots \leq |\theta|$ をみたすとする. (4.3) の中に $k(< n)$ 個しか一次独立なものがな

かったとすると, 適当に番号を付け替えることにより, $c_1^{k+1},\dots,c_k^{k+1},\dots,c_1^n,\dots,c_k^n \in \mathbb{C}$ で次の $(n-k)$ 個の関係式をみたすものが存在する.

$$L^\alpha f_{k+1}(0,s) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{k+1} L^\alpha f_j(0,s), \tag{4.4.k+1}$$

$$\vdots$$

$$L^\alpha f_n(0,s) = \sum_{j=1}^{k} c_j^n L^\alpha f_j(0,s). \tag{4.4.n}$$

ここでα は多重指数で $1 \le |\alpha| \le |\theta|$ をみたすものとする.

$$L^\alpha f_j(0,s) \equiv \sum_{p\ge 0} \alpha! a_{\alpha,p}^j s^p \qquad (\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1})$$

であることから, (4.4.k+1), ... , (4.4.n) は

$$\sum_{p\ge 0} a_{\alpha,p}^{k+1} s^p \equiv \sum_{j=1}^{k}\sum_{p\ge 0} c_j^{k+1} a_{\alpha,p}^j s^p \qquad (\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1}),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{p\ge 0} a_{\alpha,p}^{n} s^p \equiv \sum_{j=1}^{k}\sum_{p\ge 0} c_j^{n} a_{\alpha,p}^j s^p \qquad (\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1}).$$

となる. これらを s についての巾級数と見ることにより, $0 \le p \le m - |\alpha|$ に対して

$$a_{\alpha,p}^{k+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{k+1} a_{\alpha,p}^j\ , \dots ,\ a_{\alpha,p}^{n} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{n} a_{\alpha,p}^j$$

を得る. これらの式から次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} f_{k+1}(z,\bar{z},s) &\equiv \sum_{|\alpha|+p\ge 1} a_{\alpha,p}^{k+1} z^\alpha (s+ih)^p \qquad (\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1}) \\ &\equiv \sum_{|\alpha|+p\ge 1} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j^{k+1} a_{\alpha,p}^j \right\} z^\alpha (s+ih)^p \qquad (\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1}) \\ &\equiv \sum_{j=1}^{k} c_j^{k+1} f_j(z,\bar{z},s) \qquad (\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1}). \end{aligned}$$

同様にして,

$$f_{k+2}(z,\bar{z},s) \equiv \sum_{j=1}^{k} c_j^{k+2} f_j(z,\bar{z},s), \dots , f_n(z,\bar{z},s) \equiv \sum_{j=1}^{k} c_j^{n} f_j(z,\bar{z},s) \quad (\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1})$$

が得られる. これらは仮定 $\mathrm{sp} < f_1,\dots,f_n >_{\mathbb{C}} \not\ni 0$ $(\mathrm{mod}\, \mathcal{I}^{m+1})$ に矛盾する. よって, (4.3) 内には n 個の一次独立なベクトルが存在し, (4.3) の各ベクトルに対して, $s=0$ とおくことにより証明が終る. □

References

1. M. S. Baouendi, X. Huang and L. P. Rothschild, *Nonvanishing of the differential of holomorphic mappings at boundary points*, Math. Res. Letters. **2** (1995), 737–750.
2. M. S. Baouendi and L. P. Rothschild, *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent.Math. **93** (1988), 481–500.
3. ———, *Remarks on the generic rank of a CR mappings*, J. Geom. Analysis **2** (1992), 1–9.
4. T. Bloom and I. Graham, *On 'type' conditions for generic real submanifolds of* $\mathbb{C}^n$, Invent.Math. **40** (1977), 217–243.
5. A. Boggess, *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, CRC Press, 1991.
6. S. S. Chern and J. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
7. K. Diederich and J. E. Fornæss, *Proper Holomorphic Mappings Between Real-Analytic Pseudoconvex Domains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **282** (1988), 681–700.
8. C. K. Han, *Rigidity of CR submanifolds and analyticity of CR immersions*, Math. Ann. **287** (1990), 229–238.
9. ———, *Complete differential system for the mappings of CR manifolds of nondegenerate Levi forms*, preprint.
9. A. Hayashimoto, *Application of the* C^ω*-extendability theorem for proper holomorphic mappings to the classification of the mappings between two pseudoellipsoids*, Math. Japonica **44** (1996), 221–237.
11. ———, *On the classification theorem for CR mappings*, preprint.
12. ———, *On proper holomorphic mappings and CR mappings*, Proc. Geometric Complex Analysis (1996), 235–238.
13. ———, *On the complete system for CR mappings and its application*, preorint.
14. M. Landucci, *On the proper holomorphic equivalence for a class of pseudoconvex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1988), 807–811.
15. J. M. Trépreau, *Sur le prolognement des fonctions CR definis sur une hypersurface réel de class* C^2 *dans* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. **83** (1986), 583–592.

Chikusa-ku, Nagoya, 464-01, Japan
E-mail address: ahayashi@math.nagoya-u.ac.jp