数理解析研究所講究録
1038巻 1998年 163-169

加群の積分とその応用

横浜市立大学理学部数学 大阿久俊則 (Toshinori Oaku),
神戸大学理学部数学 高山信毅 (Nobuki Takayama)

この論文では, A_n-加群の積分のアルゴリズムを説明しその応用として, コホモロジ群 $H^k(U, \mathbf{C}_U)$, $(U = \mathbf{C}^n \setminus V(f))$ の計算アルゴリズムを説明する. ここで, f は任意の 0 でない $\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ に属する多項式である.

我々のアルゴリズムは, 微分作用素環でのグレブナ基底の計算および, [12], [13] で与えられている $\mathcal{D}$-加群に対するさまざまな関手の構成アルゴリズムおよび Grothendieck-Deligne comparison theorem [6], [4] を基礎としている.

この小文では, $X \setminus V(f)$ の $\mathbf{C}$-係数コホモロジ群の計算アルゴリズムのみ説明するが, $\mathcal{V}$ を U の上のランク 1 の局所定数層とするときコホモロジ群 $H^k(U, \mathcal{V})$ の計算やさらに一般ランクの局所定数層を係数とするコホモロジの計算も可能である. 詳しくは [14] を参照.

1. アファイン超曲面の補集合のコホモロジ群の計算

ワイル代数

$$A_n = \mathbf{Q}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$$

とは 次の関係式をみたす $2n$ 個の元 x_i, ∂_i $(i = 1, \ldots, n)$ で生成される非可換多項式環である

$$x_i x_j = x_j x_i,\ \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$$
$$\partial_i x_j = x_j \partial_i + \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

グレブナ基底の理論およびアルゴリズムはワイル代数の左イデアルでも, 多項式の場合とほぼ同様である. とくに消去法アルゴリズム (たとえば [1, p.69 Theorem 2.3.4], [3, p.114 Theorem 2] を見よ) や自由分解の構成アルゴリズム (たとえば [1, p.167 Theorem 3.7.13], [5, Theorem 15.10], [15] を見よ) はそのまま ワイル代数の場合にも適用でき, 積分の計算アルゴリズムでも重要な役割を演ずる. しかしながら, 積分の計算自体は, 右加群と左加群のテンソル積の計算であり, 多項式環の方に対応する構成法はない. 積分の構成は近似手続きと理解していいが, b-関数の根の情報が計算複雑度の上限を与えており近似が真の解に一致する条件を与える.

では, さっそくわれわれのアルゴリズムを説明しよう.

Algorithm 1..1 (Computation of the cohomology groups $H^k(U, \mathbf{C}_U)$)
Input : a polynomial $f \in \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]$.
Output : $H^k(U, \mathbf{C}_U)$ for $0 \leq k \leq n$ where $U = \mathbf{C}^n \setminus V(f)$.

1. Find a left ideal I such that
$$\mathbf{Q}[x, \frac{1}{f}] \simeq A_n/I$$
as a left A_n-module.
2. Let J be the formal Fourier transform of I;
$$J = I_{|x_i \mapsto -\partial_i, \partial_i \mapsto x_i}.$$
3. Compute a free resolution of length $n+1$
$$A_n^{p_{-(n+1)}} \xrightarrow{\cdot L^{-(n+1)}} A_n^{p_{-n}} \xrightarrow{\cdot L^{-n}} A_n^{p_{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{\cdot L^{-1}} A_n^{p_0} \to A_n/J \to 0,$$
($p_0 = 1$) of A_n/J by using Schreyer's theorem [5, Theorem 15.10] with an order which refines the partial order defined by the weight vector
$$\begin{array}{ccccccc} \partial_1 & \cdots & \partial_n & x_1 & \cdots & x_n \\ (\ 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1\ ). \end{array}$$
4. Compute the cohomology groups of the complex of $\mathbf{Q}$-vector spaces
$$(A_n/(x_1 A_n + \cdots + x_n A_n) \otimes_{A_n} A_n^{p_{-k}}, \xrightarrow{1 \otimes L^{-k}}).$$
Then, the $(k-n)$-th cohomology group $\mathrm{Ker}\,(1 \otimes L^{k-n})/\mathrm{Im}\,(1 \otimes L^{k-n-1})$ of the complex above tensored with $\mathbf{C}$ gives $H^k(U, \mathbf{C}_U)$.

ステップ 1 は次の Procedure 2..1 で詳しく説明する. ステップ 2, 3, 4 は 次の Procedure 3..1 で詳しく説明する. ステップ 2, 3, 4 は A_n/I の積分の計算
$$H^{k-n}(A_n/(\partial_1 A_n + \cdots + \partial_n A_n) \otimes^{\mathbf{L}}_{A_n} A_n/I),$$
にほかならない p ことを注意しておく. $\mathcal{D}$-加群の理論では, このベクトル空間の複体 $A_n/(\partial_1 A_n + \cdots + \partial_n A_n) \otimes^{\mathbf{L}}_{A_n} A_n/I$ のことを
$$\int_{\mathbf{C}^n} A_n/I = \int_{\mathbf{C}^n} \mathbf{Q}[x, 1/f]$$
と書くことも多い. さらに, この複体の $k-n$ 次コホモロジ群を $\int^{k-n}_{\mathbf{C}^n} A_n/I$ と書く.

2. $\mathbf{Q}[x, 1/f]$ の計算アルゴリズム

アルゴリズム 1..1 のステップ 1 を説明しよう ([11]).

Procedure 2..1 (Computing the differential equations for $1/f$; step 1 of Algorithm 1..1).

Input: f.
Output: a left ideal I of A_n such that $\mathbf{Q}[x, 1/f] \simeq A_n/I$.

1. (Computation of the annihilating ideal of f^s)
   Compute
   $$\langle t - f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial_t + \partial_1, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\partial_t + \partial_n \rangle \cap \mathbf{Q}[t\partial_t]\langle x, \partial_x \rangle.$$
   Replacing $t\partial_t$ by $-s-1$, we obtain the left ideal $\mathrm{Ann}\, f^s$ in $\mathbf{Q}[s]\langle x, \partial_x \rangle$.
2. (Computation of the b-function of f)
   Compute the generator $b(s)$ of
   $$\langle \mathrm{Ann}\, f^s, f \rangle \cap \mathbf{Q}[s]$$
   by an elimination order $x, \partial_x > s$.
3. Let r_0 be the minimum integral root of $b(s) = 0$. Put $I = (\mathrm{Ann}\, f^s)_{s \to r_0}$. Then, we have $\mathbf{Q}[x, \frac{1}{f}] \simeq A_n/I$.

多項式 $b(s)$ を f の b-関数と呼ぶ.

例 2..1 $f = x(1-x)$ に対して,

$$\mathrm{Ann}\, f^s = \langle x(1-x)\partial_x - s(1-2x) \rangle$$

となる. f の b-関数は $s+1$ であり,

$$[(1-2x)\partial_x + 4(1+s)] f^{s+1} = (s+1) f^s,$$

なる関係式をみたす. したがって,

$$\mathbf{Q}[x, 1/f] \simeq \mathbf{Q}\langle x, \partial_x \rangle / \langle x(1-x)\partial_x + (1-2x) \rangle$$

となる.

例 2..2 $f = x^3 - y^2$ とおく. 次の同型 $\mathbf{Q}[x, y, 1/f] \simeq A_2/I$ をみたすような左イデアル I を探そう. 次は kan/k0 の出力結果である.

```
In(9)= a = annfs(x^3-y^2,[x,y]);
Computing the Groebner basis of
[ v*t+x^3-y^2 , -v*u+1 , -3*u*x^2*Dt+Dx , 2*u*y*Dt+Dy ]
with the order u, v > other elements.

In(10)=a :
[3*x^2*Dy+2*y*Dx , -6*(-1-s)-2*x*Dx-3*y*Dy-6]
```

```
In(11)=b=ReducedBase(Eliminatev(Groebner(Append[a,y^2-x^3]),
                                   [x,y,Dx,Dy]));
In(12)= b:
[   -216*s^3-648*s^2-642*s-210 ]
In(13)=Factor(b[0]):
[ [ -6 , 1 ], [6*s+5 , 1 ], [6*s+7 , 1 ], [s+1 , 1 ]  ]
```

$s=-1$ が b-関数の最小整数根なので,

$$\mathbf{Q}[x,y,1/f] \simeq A_2/\langle 3x^2\partial_y + 2y\partial_x, -2x\partial_x - 3y\partial_y - 6\rangle$$

となる.

3. 積分の計算アルゴリズム

最後に積分

$$H^{k-n}(A_n/(\partial_1 A_n + \cdots + \partial_n A_n) \otimes^{\mathbf{L}}_{A_n} A_n/I).$$

を計算するアルゴリズムを説明しよう. このアルゴリズムは [13, Theorem 5.3] を I をフーリエ変換したイデアル J に適用したものである.

ウエイト w を次のようにきめる.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \partial_1 & \cdots & \partial_n & x_1 & \cdots & x_n \\ w & = & (& 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 &). \end{array}$$

$$F_k = \{f \in A_n \mid ord_w(f) \leq k\}$$

とおく. ここで

$$ord_w(x^a\partial^b) = -|a| + |b|.$$

Procedure 3..1 [13] (Computing the D-module theoretic integral of A_n/I; steps 2, 3 and 4 in Algorithm 1..1)

Input: a left ideal I of A_n. (A/I is holonomic.)

Output: The $-k$-th cohomology groups of $A_n/(\partial_1 A_n + \cdots + \partial_n A_n) \otimes^L_{A_n} A_n/I$ for $0 \leq k \leq n$.

1. Let J be the formal Fourier transform of I;

$$J = I|_{x_i \mapsto -\partial_i, \partial_i \mapsto x_i, (i=1,\ldots,n)}.$$

2. Let G be a Gröbner basis of the left ideal J with the weight vector w. Find the generator $b(\theta_1 + \cdots + \theta_n)$ of

$$\langle in_w(G)\rangle \cap \mathbf{Q}[\theta_1 + \cdots + \theta_n], \quad \theta_i = x_i\partial_i.$$

3. Let k_1 be the maximum integral root of $b(s) = 0$. If there exists no integral root, then quit; the cohomology groups are all zero in that case.
4. Let $<_w$ be a refinement of the partial order by w. Construct a free resolution

$$A_n^{p_{-(n+1)}} \xrightarrow{\cdot L^{-(n+1)}} A_n^{p_{-n}} \xrightarrow{\cdot L^{-n}} A_n^{p_{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{\cdot L^{-1}} A_n^{p_0} \to A_n/J \to 0$$

with $p_0 = 0$ by using the Schreyer orders associated with $<_w$.
5. (Computation of degree shifts) Put $s_1^0 = 0$ and

$$s_i^{k+1} = \max_{1 \le j \le p_{-k}} \left(ord_w(L_{ij}^{-(k+1)}) + s_j^k \right) \quad (1 \le i \le p_{-(k+1)})$$

successively.
6. Compute the cohomology groups of the induced complex

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\cdot \bar{L}^{-2}} \quad & F_{k_1 - s_1^1}/(F_{-1} + xA_n) \oplus \cdots \oplus F_{k_1 - s_{p_{-1}}^1}/(F_{-1} + xA_n) \\ \xrightarrow{\cdot \bar{L}^{-1}} \quad & F_{k_1}/(F_{-1} + xA_n) \xrightarrow{\bar{L}^0} 0 \end{aligned}$$

as a complex of $\mathbf{Q}$-vector space where $xA_n = x_1 A_n + \cdots + x_n A_n$. Then, the $(k-n)$-th cohomology group

$$\mathrm{Ker}\, \bar{L}^{k-n} / \mathrm{Im}\, \bar{L}^{k-n-1}$$

of this complex gives $H^k(U, \mathbf{C}_U)$.

ステップ 2 で, $in_w(\sum_{(a,b)\in I} c_{ab} x^a \partial^b)$ は w-イニシャル多項式

$$\sum_{\langle w,(a,b)\rangle = m} c_{ab} x^a \partial^b, \quad m = \max_{(a,b)\in I} \langle w, (a,b) \rangle$$

を意味する. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbf{Z}^{2n}$ の普通の内積である.

例 3..1 $\mathbf{Q}[x]$ の多項式 $f = x(1-x)$ を考える. A でワイル代数 $\mathbf{Q}\langle x, \partial_x \rangle$ をあらわす. 前節の例でみたように $\mathbf{Q}[x, 1/f] \simeq A/\langle p \rangle$, $p = x(1-x)\partial_x - (2x-1)$ であった. p の形式フーリエ変換は $\hat{p} = -x\partial_x^2 - x\partial_x$ である. $-x$ を左より掛けることにより

$$-x\hat{p} = \theta(\theta - 1) + x\theta, \quad \theta = x\partial_x$$

をえる. したがって, この場合の b-関数 (常微分方程式の古典的な Frobenius の解法にでてくる $x = 0$ での 特性多項式にほかならない) は $s(s-1)$ である. したがって, 近似打ちきりのパラメータ k_1 は 1 である. $A/\langle \hat{p} \rangle$ の自由分解は

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot (x\partial_x^2 - x\partial_x)} A \longrightarrow A/\langle \hat{p} \rangle \longrightarrow 0$$

となる. $k_1 = 1$ であり, また $x\partial_x^2 - x\partial_x$ による degree shift は 1 なので, 不必要な高次部分を打ち切った複体は

$$0 \longrightarrow F_0/(F_{-1} + xA) \xrightarrow{\cdot (x\partial_x^2 - x\partial_x)} F_1/(F_{-1} + xA) \longrightarrow 0$$

である.

$$F_0/(F_{-1}+xA)=\mathbf{Q},\ F_1/(F_{-1}+xA)=\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\partial_x$$

であり, また $F_1/(F_{-1}+xA)$ において $1\cdot(x\partial_x^2-x\partial_x)\equiv 0$ なので

$$H^{-1}=F_0/(F_{-1}+xA)=\mathbf{Q},\quad H^0=F_0/(F_{-1}+xA)=\mathbf{Q}^2$$

となることがわかる. よって $U=\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$ のコホモロジ群は

$$H^0(U,\mathbf{C}_U)=\mathbf{C},\quad H^1(U,\mathbf{C}_U)=\mathbf{C}^2$$

となる. ホモロジ群とコホモロジ群のポワンカレ双対性により, $x=0$ をまわる道および $x=1$ をまわる道が 1 次元コホモロジ群の生成元と対応する.

例 3..2 (Cohomology groups of $\mathbf{C}^2\setminus V(x^3-y^2)$)
　以下は kan/k0 の出力である.

```
In(43)= bb=bfunctionForIntegral([3*x^2*Dy+2*y*Dx,-2*x*Dx-3*y*Dy-6],[x,y]);
In(44)= bb:
[    -216*s^3+432*s^2-264*s+48 ]
In(45)= Factor(bb):
[[-24 , 1 ], [ 3*s-2 , 1 ], [ s-1 , 1 ], [ 3*s-1 , 1 ]]
In(46)=integralOfModule([3*x^2*Dy+2*y*Dx , -2*x*Dx-3*y*Dy-6],[x,y],1,1,2):
```

ここで 1, 1, 2 はそれぞれ, b-関数の最小整数根, 最大整数根, 分解の計算の打ち切り次数である.

```
0-th cohomology:  [    0 , [   ] ]
-1-th cohomology:  [    1 , [   ] ]
-2-th cohomology:  [    1 , [   ] ]
```

この出力は

$$H^0(U,\mathbf{C}_U)=\mathbf{C},\quad H^1(U,\mathbf{C}_U)=\mathbf{C},\quad H^2(U,\mathbf{C}_U)=0$$

を意味する.

参 考 文 献

[1] Adams, W.W. and Loustaunau, P., *An Introduction to Gröbner Bases*, American Mathematical Society, Province, 1994.

[2] Björk, J.E., Rings of Differential Operators. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[3] Cox, D., Little, J. and O'Shea, D., *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Verlag, New York, 1991.

[4] Deligne, P., Équations Différentielles à Points Singuliers Réguliers. Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag, 1970.

[5] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[6] Grothendieck, A., On the de Rham cohomology of algebraic varieties. Publication Mathématique IHES **29** (1966), 95–103.

[7] Hartshorn, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] Hotta, R. and Tanisaki, T., *$\mathcal{D}$-modules and algebraic groups*, (in Japanese), Springer-Verlag, Tokyo, 1995.

[9] Kashiwara, M., On the holonomic systems of linear differential equations, II. Inventiones Mathematica, **49** (1978), 121–135.

[10] Oaku, T., *Gröbner basis and differential equation — An introduction to computational algebraic analysis*, (in Japanese), Sophia University Lecture Notes, Tokyo, 1995.

[11] Oaku, T., Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial. Journal of Pure and Applied algebra, **117 & 118** (1997) 495–518.

[12] Oaku, T., Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules. Advances in Applied Mathematics, **19** (1997), 61–105.

[13] Oaku, T., Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules, II –higher codimensional case, (1997), preprint

[14] Oaku, T. and Takayama, N., An algorithm for cohomology groups of the complement of an affine variety via D-module computation, preprint, 1997.

[15] La Scala, R. and Stillman, M., Strategies for computing minimal free resolutions, to appear in Journal of Symbolic Computations, 1997.

[16] Takayama, N., *Kan: A system for computation in algebraic analysis,* 1991—, Source code available for Unix computers from ftp.math.kobe-u.ac.jp via anonymous ftp. See also www.math.kobe-u.ac.jp/KAN/

[17] Walther, U., Algorithmic computation of local cohomology modules and the cohomological dimension of algebebraic varieties. alg-geom 9710004, `ftp.math.duke.edu`