数理解析研究所講究録
1038巻 1998年 139-145

近似的GCDとハイブリッド有理関数近似の誤差の関係について

甲斐 博 (愛媛大学), 齋藤友克 (上智大学), 野田松太郎 (愛媛大学)

A Relation between Approximate-GCD and Error of Hybrid Rational Function Approximation

Hiroshi Kai[†], Tomokatsu Saito[‡] and Matu-Tarow Noda[†]
[†]Depaertment of Computer Science, Ehime University
[‡]Depaertment of Mathematics, Sophia University

Abstract. An Hybrid Rational Function Approximation (HRFA) algorithm has two procedures: i.e. 1) obtain rational interpolation of given data sets, 2) remove undesired poles of the rational interpolation. Here the approximate-GCD of numerator and denominator polynomials are computed. In this paper, an error caused by the procedure 2) is estimated. The algorithm of approximate-GCD proposed by V.Hribernig and H.J.Stetter is used in HRFA. Then, we show that the error is $O(\alpha)$, where α is a parameter of the approximate-GCD.

1. はじめに

有理関数近似の中でも有理関数補間は、与えられた関数の近似だけでなくデータ列の近似にも有効であり、線形方程式により容易に計算できる。しかし有理関数補間により得られる近似は、近似する関数が近似区間で連続であるにもかかわらず、不必要な極を持つことがある。

不必要な極を持たない有理関数補間は [1] 等で理論的に述べられているが、実際の計算法としては何も示されていない。また不必要な極を持たない有理関数補間が [2, 3] で提案されているが、数値誤差の問題がある [7]。

我々は不必要な極に対応する分母の多項式の零点は分子の多項式の零点に非常に近いという数値実験による結果を得た。すなわち分子と分母の多項式は近似的な共通因子を持つ。そこで、有理関数補間の分子と分母の多項式の近似的共通因子を求め、得られた近似的共通因子を近似除算により取り除く操作を行った。この方法をハイブリッド有理関数近似 (HRFA) と呼ぶ [9]。

近似的共通因子を取り除く操作により得られた有理関数近似は、与えた関数値やデータ列の値と一致しなくなる。従って HRFA に対して有理関数補間の誤差評価は適用できない。そこで HRFA と近似される関数の間の誤差を確定することは、HRFA の実際的応用の上から必須となる。

HRFA の誤差は有理関数補間の誤差と不必要な極を取り除く時の誤差の和で表される。ここで不必要な極を取り除く時の誤差が未知である。

この点に着目し、我々はすでに不必要な極を取り除く時の誤差の評価の方法として、Padé 近似の性質を用いる誤差評価を行っている [5]。しかし誤差を評価できる区間が小さく制約が大きいという問題があった。本論では、V.Hribernig,H.J.Stetter により提案された近似的 GCD を HRFA のアルゴリズムにおいて用いることを考える。V.Hribernig,H.J.Stetter により提案された近似的 GCD は **3** 節で示す。近似的 GCD の パラメータ α を用いて、不必要な極を取り除く時の誤差は $O(\alpha)$ で与えられることを示す。

2. ハイブリッド有理関数近似

実数区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ の有理関数近似は次のようにして求める。有限個の離散点列 $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_k = b$ を与え、対応する関数値 $f_i = f(x_i), \quad i = 1, \cdots, k$ を計算する。これらの点列を正確に通る有理関数

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^j}$$

を決定する。ここで $k = m + n + 1$ である。この有理関数を (m,n) 有理関数と呼び、便宜上 $b_0 = 1$ と規格化する。多項式の係数 a_j, b_j は一般に浮動小数であり、線形方程式等により簡単に求め得る。

しかし結果として得られる有理関数は、区間内で連続であるとはいえず、むしろ一般に分母の零点の存在により不連続になる。$f(x)$ は連続なので $[a,b]$ 内に現れる有理関数補間の極は不必要な極である。我々は不必要な極に対応する $q_n(x)$ の零点は $p_m(x)$ の零点に非常に近いという数値実験による結果を得た。

係数が整数なら、分子と分母の GCD を計算することにより、特異性を除き、有理関数を既約にすることができる。一方、係数が浮動小数の場合は、従来からの手法のみではこのような処理は不可能で、有理関数近似はあまり実用的な手法とはなりにくかった。しかし、浮動小数係数を持つ 2 つの多項式間の共通因子を求めるための近似的 GCD 算法 [11] を用いると、整数係数の場合のように有理関数を既約に（但し、近似的に）し得る可能性がある。これをハイブリッド有理関数近似（HRFA : Hybrid Rational Function Approximation) と呼ぶ。HRFA は以下のようにまとめられる。

アルゴリズム　ハイブリッド有理関数近似 (HRFA)

入力 : 有限個の点,$x_1, x_1, \cdots, x_k$ と対応する $f_i = f(x_i), i = 1, \cdots, k$,
近似的 GCD のための cutoff 値 $\epsilon (0 < \epsilon \ll 1)$

出力 : $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \cdots, (x_k, f_k)$ を近似する有理関数 $\tilde{r}_{m-l,n-l}(x) = \tilde{p}_{m-l}(x)/\tilde{q}_{n-l}(x)$

方法 :

1. 入力データを近似する (m,n) 有理関数

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^j}, \quad b_0 = 1$$

を求める。ただし、$k = m + n + 1$

2. $p_m(x)$ と $q_n(x)$ の精度 ϵ の近似的 GCD $g_l(x)$ を求める。

$$g_l(x) = \mathrm{ApxGCD}(p_m(x), q_n(x); \epsilon)$$

3. 近似的に既約な有理関数

$$\tilde{r}_{m-l,n-l}(x) = \frac{\tilde{p}_{m-l}(x)}{\tilde{q}_{n-l}(x)} = \frac{\mathrm{quo}(p_m(x), g_l(x))}{\mathrm{quo}(q_n(x), g_l(x))}$$

を求める。ただし、多項式の除算は商を求める計算を行う。

このような手法で求めた有理関数近似の有用性はハイブリッド積分への応用も含めて参考文献 [6, 8, 9] に詳しく述べた。

3. V.Hribernig,H.J.Stetter の近似的 GCD とその HRFA への応用

V.Hribernig, H.J.Stetter により提案された近似的 GCD の HRFA への応用を考える。[4] において多項式の零点の分割 (cluster への分割) とその分割の妥当性が議論されており、cluster の分割の計算において近似的 GCD (near-GCD と呼ばれる) が次のように与えられる。

- f_1 と f_2 に対して、$\mathrm{GCD}(f_1^*, f_2^*) = g$ と $||f_i - f_i^*|| \leq \alpha, i = 1, 2$ を満足する f_i^* が存在するならば、g は精度 α での f_1 と f_2 の near-GCD である。また g は f_1 と f_2 の α-GCD と呼ぶ。

ここで、多項式 $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ のノルム $||p||$ は L1 ノルム $||p|| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ である。

α-GCD を決定する方法はユークリッドの互除法の拡張として与えられる。始めに、ユークリッドの互除法は次のように与えられる。

ユークリッドアルゴリズム (EA)

入力:多項式 f_1, f_2

出力:$\mathrm{GCD}(f_1, f_2)$

方法:

1. $j = 2, 3, \cdots$ に対して、

$$f_{j-1} = f_j q_j + f_{j+1}$$

2. $f_{j+1} = 0$ の時に終了し、$f_j = \mathrm{GCD}(f_1, f_2)$

ここで **EA** において

$$s_j^{(i)} = q_j s_{j-1}^{(i)} + s_{j-2}^{(i)},\ j > i$$
$$s_{i-1}^{(i)} = 0, s_i^{(i)} = 1$$

を同時に求めることができる。ここで、$i = 1, 2$ である。上の式を用いて、入力多項式 f_1 と f_2 は次のように書くことができる。

$$\begin{cases} f_1 &= s_j^{(1)} f_j + s_{j-1}^{(1)} f_{j+1}, \text{ for } j > 1, \\ f_2 &= s_j^{(2)} f_j + s_{j-1}^{(2)} f_{j+1}, \text{ for } j > 2 \end{cases}$$

ここで、

$$||s_{j-1}^{(i)} f_{j+1}|| \le \alpha,\ i = 1, 2 \tag{1}$$

を満たすなら f_j は精度 α の near-GCD(f_1, f_2) である。EA における零判定を (1) 式に置き換え、新たな終了判定条件とする。

以上より次のように α-GCD の計算法をまとめることができる。

入力:多項式 f_1, f_2、パラメータ α

出力:α-GCD(f_1, f_2)

方法:

1. $j = 2, 3, \cdots$ に対して、

$$f_{j-1} = f_j q_j + f_{j+1}$$
$$s_j^{(i)} = q_j s_{j-1}^{(i)} + s_{j-2}^{(i)},\ j > i$$
$$s_{i-1}^{(i)} = 0, s_i^{(i)} = 1$$
$$i = 1, 2$$

を求める。

2. $||s_{j-1}^{(i)} f_{j+1}|| \le \alpha$ ならば、$f_j = \alpha$-GCD(f_1, f_2) である。

入力多項式を有理関数補間の分子と分母の多項式 $f_1 = p_m(x),\ f_2 = q_n(x)$ とすると、α-GCD を取り除いた有理関数近似は

$$\tilde{r}(x) = \frac{s_j^{(1)}}{s_j^{(2)}}$$

で与えられる。

4. HRFA の誤差と近似的 GCD のパラメータ α の関係

関数 $f(x)$ と HRFA$\tilde{r}(x)$ の間の誤差 $E(x)$ は有理関数補間の誤差 $e_i(x) = f(x) - r(x)$ と不必要な極を取り除いた時の誤差 $e_r(x) = r(x) - \tilde{r}(x)$ により、

$$E(x) = f(x) - \tilde{r}(x) = e_i(x) + e_r(x)$$

と表すことができる。

関数 $f(x)$ を $f \in C^k[a, b]$ とした場合、誤差 $e_i(x)$ は次の定理で与えられる。

定理 **(Rivlin)**[10]

$$e_i(x) = f(x) - \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_k)}{k! q_n(x)} [f(\xi) q_n(\xi)]^{(k)} \tag{2}$$

ここで、$\xi(x) \in [a, b]$ である。

しかし $e_r(x)$ の評価は未知である。ここで $e_r(x)$ を近似的 GCD の入力パラメータ α により評価することを検討する。

α-GCD を用いた場合の HRFA に対する $e_r(x)$ は次のように表せる。

$$
\begin{aligned}
e_r(x) &= \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{s_j^{(1)}}{s_j^{(2)}} \\
&= \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p(x) - s_{j-1}^{(1)} f_{j+1}}{q(x) - s_{j-1}^{(2)} f_{j+1}}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\delta p(x) = -s_{j-1}^{(1)} f_{j+1},\ \delta q(x) = -s_{j-1}^{(2)} f_{j+1}$$

と置く。L1 ノルムの性質として $||p|| \leq \alpha$ ならば

$$\max_{|x|\leq 1} |p| \leq \alpha$$

の関係が成り立つので、$\delta p(x)$,$\delta q(x)$ の大きさは同様に

$$\max_{|x|\leq 1} |\delta p(x)| \leq \alpha,\ \max_{|x|\leq 1} |\delta q(x)| \leq \alpha$$

となる。

この時、点 $c \in [-1, 1]$ において、

$$
\begin{aligned}
e_r(c) &= \frac{p(c)}{q(c)} - \frac{p(c) + \delta p(c)}{q(c) + \delta q(c)} \\
&= \left(-\frac{\delta p(c)}{q(c)} + \frac{p(c)}{q(c)} \times \frac{\delta q(c)}{q(c)}\right)\left(1 - \frac{\delta q(c)}{q(c)} + \left(\frac{\delta q(c)}{q(c)}\right)^2 - \left(\frac{\delta q(c)}{q(c)}\right)^3 + \cdots\right) \\
&= O(\alpha)
\end{aligned}
$$

但し、$\left|\frac{\delta q(c)}{q(c)}\right| < 1$ を仮定する。すなわち、条件 $\left|\frac{\delta q(c)}{q(c)}\right| < 1$ をみたさない点、例えば不必要な極の近傍等に対しここで用いた誤差評価方法は適用できない。

また誤差の近似値として第一項目の誤差の絶対値を評価すると、

$$
\begin{aligned}
|e_r(c)| \approx \left|-\frac{\delta p(c)}{q(c)} + \frac{p(c)}{q(c)} \times \frac{\delta q(c)}{q(c)}\right| &\leq \left|\frac{\delta p(c)}{q(c)}\right| + \left|\frac{p(c)}{q(c)} \times \frac{\delta q(c)}{q(c)}\right| \\
&= \frac{\alpha}{|q(c)|}\left(1 + \left|\frac{p(c)}{q(c)}\right|\right)
\end{aligned}
$$

となる。この結果より、不必要な極を取り除く時に

- $q(c)$ の値が α に近付く
- $f(c) = p(c)/q(c)$ の値が大きい

の場合、$e_r(c)$ は $O(\alpha)$ ではあるがより厳密に見ると $e_r(c)$ は大きくなり HRFA の近似精度が悪くなることが得られる。

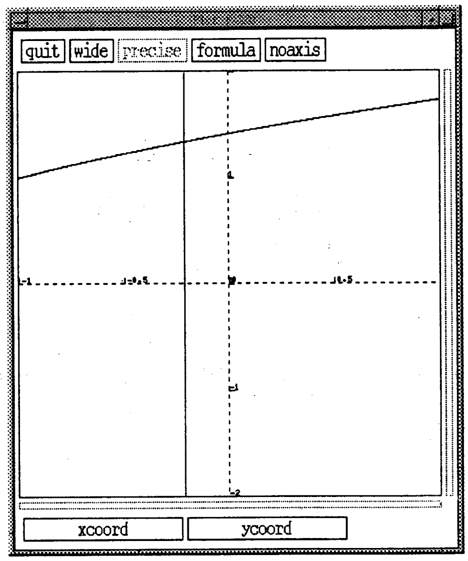

Fig. 1.　有理関数補間 $r_{7,7}(x)$

5. 数値例

不必要な極を取り除いた有理関数近似は与えたデータに対し到達不能になる。ここでは、前節における点 $c \in [-1, 1]$ を有理関数補間の補間点に取り、不必要な極を取り除いた時の誤差評価を行う。

$f(x) = \sqrt{2+x}$ を考える。$m = 7, n = 7$ とし、$x_i = -1 + 2 \times i/(m+n)$ とする。その時、有理関数補間 $r_{7,7}(x) = p_7(x)/q_7(x)$ は、Fig.1 のように表され、不必要な極を持つ。

near-GCD を $\alpha = 10^{-9}$ として求めると

$$\alpha\text{-GCD}(p_7(x), q_7(x)) = x - 0.212$$

が得られる。この時摂動多項式は定義のとおり $||\delta p(x)|| = 2.799 \times 10^{-10} < \alpha$, $||\delta q(x)|| = 1.616 \times 10^{-10} < \alpha$ であると確認できる。また $\min_{x_i} |q_7(x)| = 0.230$, $\max_{x_i} |\delta q(x)| = 1.616 \times 10^{-10}$ であるので、補間点 x_i で $|\delta q(x_i)/q_7(x_i)| < 1$ の条件を満たす。従って α-GCD を求めた結果、各補間点の誤差 $|e_r(x_i)|$ は

$$\begin{aligned} |e_r(x)| &\approx \left| \frac{\delta p(x_i)}{q(x_i)} - \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \frac{\delta q(x_i)}{q(x_i)} \right| \le \frac{10^{-9}}{|q(x_i)|} \left(1 + \left| \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \right| \right) \\ &\le \frac{10^{-9}}{\min q(x_i)} \left(1 + \max_i |f(x_i)| \right) = 1.19 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

と評価できる。

6. 結論

本論では、V.Hribernig,H.J.Stetter により提案された近似的 GCD を HRFA に応用した。近似的 GCD の パラメータ α を用いて、不必要な極を取り除く時の誤差は、$\delta q(x)/q(x)$ となる点 $x \in [-1, 1]$ に対して $O(\alpha)$ で与えることができる。

しかし、次のことが今後の課題として残る。

- 他の近似的GCDをHRFAに用いた場合の誤差評価との比較

参 考 文 献

[1] D. Braess, "Nonlinear Approximation Theory", Springer-Verlag, 1986.

[2] J.-P. Berrut, Rational functions for guaranteed and experimentally well-conditioned global interpolation, Comput. Math. Applic., 15, (1988), 1-16.

[3] J.-P. Berrut and H.D. Mittelmann, Lebesgue constant minimizing linear rational interpolation of continuous function over the interval, Comput. Math. Applic. 33, (1997) 77-86.

[4] V.Hribernig and H.J.Stetter, Detection and Validation of Clusters of Polynomial Zeros, J.Symbolic Computation, 11, 1995.

[5] H. Kai and M.T. Noda, Approximate GCD and Padé Approximation, Proc. of Asian Symposium on Comp. Math., pp.81–90, 1995.

[6] H. Kai and M.T. Noda, Cauchy Principal Value Integral using Hybrid Integral, SIGSAM Bulletin, Vol.31, no.3, pp.37–38, 1997.

[7] 甲斐博, 齋藤友克, 野田松太郎, 有理関数補間の連続性の条件について, Proceedings of 2nd Risa Consortium, pp.43–52, 1997.

[8] M.T. Noda, and E. Miyahiro, A Hybrid Approach for the Integration of a Rational Function, J. CAM, 40, pp.256–268, 1992.

[9] M.T. Noda, E. Miyahiro, and H. Kai, Hybrid rational function approximation and its use in the hybrid integration, in *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII*, eds. R. Vichnevetsky, D. Knight and G. Richter, IMACS, pp.565 – 571, 1992.

[10] T.J. Rivlin, "An Introduction to the Approximation of Functions", pp.120–141, Blaisdell Pub., 1969.

[11] T. Sasaki and M.T. Noda, Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, J. Inf. Proc. 12, pp.159–168, 1989.