

# 浮動小数係数の多変数多項式の Hensel 構成の誤差 解析

筑波大学大学院 理工学研究科 山口 哲  
筑波大学 数学系 佐々木建昭  
(Satoshi Yamaguchi and Tateaki Sasaki)

## 1 はじめに

計算機代数の最近のトピックスは、浮動小数の利用により代数的演算を高速かつ柔軟に実行する、いわゆる近似的代数計算である。浮動小数を用いて近似計算を行う場合、得られる結果の信頼性に注意しなければならない。本稿では、我々が提唱している近似代数を応用する際に必要不可欠な誤差解析を、多くの多項式演算において有用な Hensel 構成に対して行う。特に、たった1回の演算で著しい誤差をもたらすこともある桁落ちについて考察する。Hensel 構成は、与えられた多項式を従変数に関してある点の周りでのべき級数の積に分解する。この展開点の選び方、および初期因子の選び方によって、桁落ち誤差が非常に大きくなったり、あるいは小さくなったりする。なお、多変数多項式のべき級数根に対する Newton 法については、誤差解析が文献 [2] でなされており、本研究は文献 [2] の解析法を範として行ったものである。

## 2 Hensel 構成

本稿では以下の記法・用語を用いる。

- モニック … 主係数が1のこと
- 無平方 … 多項式が重複因子を含まないこと
- $\deg(F)$  …  $F$  の主変数  $(x)$  に関する次数
- $\text{lc}(F)$  …  $F$  の主変数に関する最高次項の係数
- ノルム … 多項式の係数の絶対値の最大値

$\mathbb{C}$  を複素数体とし、 $F$  を多項式環  $\mathbb{C}[x, u_1, \dots, u_n]$  の要素とする。 $F$  を次のように表す。

$$F(x, u_1, \dots, u_n) = f_\ell(u_1, \dots, u_n)x^\ell + \dots + f_0(u_1, \dots, u_n)x^0 \quad (2.1)$$

**補題 2.1 (一般化された Hensel の補題)**  $a_1, \dots, a_n$  は  $\text{lc}(F(x, a_1, \dots, a_n)) \neq 0$  を満たす  $\mathbb{C}$  の要素とし、 $S = (u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n)$  を多項式  $u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n$  から生成さ

れるイデアルとする。C 上の互いに素な  $x$  の多項式  $G^{(0)}(x)$  と  $H^{(0)}(x)$  が

$$F(x, a_1, \dots, a_n) = G^{(0)}(x)H^{(0)}(x) \quad (2.2)$$

を満たすとき、任意の非負整数  $k$  に対し、

$$F(x, u_1, \dots, u_n) \equiv G^{(k)}(x, u_1, \dots, u_n)H^{(k)}(x, u_1, \dots, u_n) \pmod{S^{k+1}} \quad (2.3)$$

$$G^{(k)} \equiv G^{(0)}, \quad H^{(k)} \equiv H^{(0)} \pmod{S} \quad (2.4)$$

を満たす多項式  $G^{(k)}(x, u_1, \dots, u_n)$  と  $H^{(k)}(x, u_1, \dots, u_n)$  が存在する。

[構成法]  $G^{(k)}, H^{(k)}$  が構成できたとして、 $G^{(k+1)}, H^{(k+1)}$  は以下のように構成される。まず、 $0 \leq i \leq \ell = \deg(F)$  なる整数  $i$  について、拡張された Euclid の互除法により、

$$\begin{cases} A_i(x)G^{(0)}(x) + B_i(x)H^{(0)}(x) = x^i \\ \deg(A_i) < \deg(H^{(0)}), \quad \deg(B_i) \leq \deg(G^{(0)}) \end{cases} \quad (2.5)$$

を満たす多項式  $A_i, B_i$  を計算する。仮定より、 $F - G^{(k)}H^{(k)} \equiv 0 \pmod{S^{k+1}}$  であるから、

$$F - G^{(k)}H^{(k)} \equiv \sum_{i=0}^{\ell} \Delta f_i^{(k+1)} x^i \pmod{S^{k+2}} \quad (2.6)$$

とおくと、 $\Delta f_i^{(k+1)}$  は  $u_1, \dots, u_n$  の同次式で各項の全次数は  $k+1$  である。 $G^{(k+1)}, H^{(k+1)}$  は

$$\begin{cases} G^{(k+1)} = G^{(k)} + \sum_{i=0}^{\ell} B_i \Delta f_i^{(k+1)} \\ H^{(k+1)} = H^{(k)} + \sum_{i=0}^{\ell} A_i \Delta f_i^{(k+1)} \end{cases} \quad (2.7)$$

と構成すればよい。□

実際の計算では、 $a_1 = \dots = a_n = 0$  とし、 $G^{(k)}$  と  $H^{(k)}$  を  $u_1, \dots, u_n$  のベキ級数で表すことを考える。まず、 $F(x, 0, \dots, 0) = 0$  の数値解  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  を求める：

$$F(x, 0, \dots, 0) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_\ell)$$

次に、1次因子  $x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_\ell$  を適当な二つのグループに分け、それらの積を  $G^{(0)}, H^{(0)}$  とする。

### 3 $A_i(x)$ と $B_i(x)$ について

文献 [2] によると、 $F(x, u_1, \dots, u_n) = 0$  の  $x$  に関するベキ級数根を Newton 法で計算する場合に発生する桁落ちは、大きく二つのケースに分類できるとある。浮動小数係数を持つ多変数多項式の Hensel 構成においても、それらに対応する桁落ち発生メカニズムがあると思われる。文献 [2] では、ベキ級数展開項の係数の大きさを規定する量として、 $\beta = \frac{\partial}{\partial x} F(x, 0, \dots, 0)$  なる数が重要であった。同様に、Hensel 構成での展開項の大きさを規定する重要なものは、算式 (2.7) の多項式  $A_i(x), B_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, \ell$ ) である。そこで本章では、 $A_i$  と  $B_i$  の大きさ (ノルム) について考察する。

### 3.1 $A_i(x)$ と $B_i(x)$ の具体形

$i < \deg(F)$  の場合 ( $F(x)$  がモニックゆえ、本稿はこれに該当する)、 $A_0(x)$  と  $B_0(x)$  は次のように計算できる (文献 [4] 参照)。

$$\begin{cases} A_i(x) = \text{rem}(x^i A_0(x), H^{(0)}(x)) \\ B_i(x) = \text{rem}(x^i B_0(x), G^{(0)}(x)) \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで  $\text{rem}(F, G)$  は  $F$  の  $G$  による剰余である。 $G^{(0)}(x), H^{(0)}(x)$  を以下のように表す。

$$\begin{cases} G^{(0)}(x) = g_m x^m + \cdots + g_1 x + g_0 \\ H^{(0)}(x) = h_n x^n + \cdots + h_1 x + h_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

このとき、 $A_0(x)$  と  $B_0(x)$  は次のように行列式表現できる (文献 [4] 参照)。

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(x) = \begin{vmatrix} g_m & \cdots & g_1 & g_0 & & x^{n-1} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & g_m & \cdots & g_1 & g_0 & x \\ & & & g_m & \cdots & g_1 & 1 \\ h_n & \cdots & h_1 & h_0 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & h_n & \cdots & h_1 & h_0 & 0 \\ & & & & h_n & \cdots & h_1 & 0 \end{vmatrix} \\ B_0(x) = \text{上記行列式の最後列を } (0, \dots, 0, 0, x^{m-1}, \dots, x, 1)^T \text{ で置き換えたもの} \end{array} \right. / \text{res}(G^{(0)}, H^{(0)}) \quad (3.3)$$

ここで、 $\text{res}(G^{(0)}, H^{(0)})$  は  $G^{(0)}(x), H^{(0)}(x)$  の終結式である。

### 3.2 展開点が特異点の近傍にある場合

$F_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, 0, \dots, 0)$  の各根が互いに十分離れているとき、 $F_0(x)$  の因子である  $G^{(0)}, H^{(0)}$  は近接根を持たず、 $A_0(x)$  と  $B_0(x)$  (したがって、 $A_i(x)$  と  $B_i(x)$  ( $i \geq 1$ )) のノルムは極端に大きくなったり、小さくなったりすることはない。そこで、本稿では  $G^{(0)}, H^{(0)}$  が互いに近接根を持つ場合のみを考える。この場合、 $F(x, u_1, \dots, u_n)$  は原点  $(x, u_1, \dots, u_n) = (0, 0, \dots, 0)$  で近接根をもち、したがって原点の近傍で重根をもつ。すなわち、 $F(x, u_1, \dots, u_n)$  は原点の近傍で特異点をもつ。以下では、簡単のため座標系を少しずらすことにより、次のように仮定する。

**仮定 A** 与式  $F(x, u_1, \dots, u_n)$  はノルムが 1 程度の多項式で、かつ  $(x, u_1, \dots, u_n) = (0, 0, \dots, 0)$  で重根をもつものとする。展開点は原点の近傍、 $(u_1, \dots, u_n) = (\delta_1, \dots, \delta_n), |\delta_i| \ll 1$ , に選び、

$$F'(x, v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, \delta_1 + v_1, \dots, \delta_n + v_n)$$

として、 $F'(x, v_1, \dots, v_n)$  の  $(v_1, \dots, v_n)$  に関する Hensel 構成を考察する。□

簡単のため、以下では  $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n), (\delta_1, \dots, \delta_n)$  をそれぞれ  $(u), (v), (\delta)$  と略記することにする。 $F(x, u)$  の因子のうち、原点で特異となる因子全体を  $\hat{F}(x, u)$ 、原点で非特異となる因子全体を  $\tilde{F}(x, u)$  とする ( $\hat{F}$  と  $\tilde{F}$  は Hensel 構成により  $u$  のべき級数として分離できる) :

$$\begin{cases} F(x, u) = \hat{F}(x, u)\tilde{F}(x, u) \\ \hat{F}(0, 0) = 0, \tilde{F}(0, 0) \neq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

一般性を失うことなく、 $\hat{F}$  と  $\tilde{F}$  は変数  $x$  に関してモニックとする。 $\hat{F}(x, u)$  の  $x$  に関する各項は、仮定から  $u$  に関して定数項を含まないが、一般にはいろいろな形をとりうる。本稿では簡単のため、次の限定された場合のみについて考察する。

**仮定 B** 原点で特異となる部分  $\hat{F}(x, u)$  は次の形とする。

$$\begin{cases} \hat{F}(x, u) = x^\lambda + \hat{f}_{\lambda-1}(u)x^{\lambda-1} + \dots + \hat{f}_0(u) \\ \hat{f}_0(u) = c_0u^\rho + (\text{higher order terms w.r.t. } u), c_0 \neq 0 \\ \hat{f}_{\lambda-i}(u) = c_{\lambda-i}u^{i\rho/\lambda} + (\text{higher order terms w.r.t. } u), i = 1, \dots, \lambda-1 \quad \square \end{cases}$$

仮定 B のもとでは  $\hat{F}'(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}(x, \delta + v)$  は次のように表せる。

$$\begin{cases} \hat{F}'(x, v) = x^\lambda + \hat{f}'_{\lambda-1}(v)x^{\lambda-1} + \dots + \hat{f}'_1(v)x + \hat{f}'_0(v) \\ \|\hat{f}'_0(v)\| = O(\delta^\rho) \\ \|\hat{f}'_{\lambda-i}(v)\| = O(\delta^{i\rho/\lambda}) \text{ あるいは } o(\delta^{i\rho/\lambda}), i = 1, \dots, \lambda-1 \end{cases} \quad (3.5)$$

このとき、上記のオーダー評価から  $\hat{F}'(x, 0) = \hat{F}(x, \delta)$  の根は大きさが  $O(\delta^{\rho/\lambda})$  程度のもとなる。 $F(x, \delta) = G^{(0)}(x)H^{(0)}(x)$  であるが、Hensel 構成の各因子は  $\hat{F}(x, \delta)$  の  $\lambda$  個の根が  $G^{(0)}(x)$  と  $H^{(0)}(x)$  にどのように分配されるかで大きく異なる。分配のされ方として、以下の二つの場合を考察すれば十分である。

- (I)  $\hat{F}(x, \delta)$  のすべての根が  $G^{(0)}(x)$  に含まれる。
- (II)  $\hat{F}(x, \delta)$  の根のうち  $\mu$  個が  $G^{(0)}(x)$  に、 $\nu$  個が  $H^{(0)}(x)$  に含まれる。  
(ただし、 $\mu + \nu = \lambda$ )

(I) の場合、 $G^{(0)}(x)$  と  $H^{(0)}(x)$  は互いに近接根を持たないから、 $\text{res}(G^{(0)}, H^{(0)}) = O(\delta^0)$  となり、 $A_0(x)$  と  $B_0(x)$  も通常のノルムをもつ多項式となる (文献 [5] 参照)。そこで、以下では (II) の場合について考察する。

### 3.3 $G^{(0)}(x)$ と $H^{(0)}(x)$ が互いに近接根を持つ場合

前節の仮定より、 $G^{(0)}(x)$  と  $H^{(0)}(x)$  は原点付近に大きさが  $O(\delta^{\rho/\lambda})$  の根をそれぞれ  $\mu, \nu$  個もつ。そして、それら以外には近接根をもたない。このことと、終結式  $\text{res}(G^{(0)}, H^{(0)})$  が  $G^{(0)}, H^{(0)}$  のそれぞれの根すべての差の積に等しいことから、終結式の  $\delta$  に関するオーダーとして次を得る。

$$\text{res}(G^{(0)}, H^{(0)}) = O(\delta^{\mu\nu\rho/\lambda}) \quad (3.6)$$

さらに、 $G^{(0)}(x)$  と  $H^{(0)}(x)$  を式 (3.2) のように表すとき、各係数の  $\delta$  に関するオーダーとして次を得る。

$$\begin{cases} |g_0| = O(\delta^{\mu\rho/\lambda}), \\ |h_0| = O(\delta^{\nu\rho/\lambda}), \\ |g_i| = O(\delta^{(\mu-i)\rho/\lambda}) \text{ あるいは } o(\delta^{(\mu-i)\rho/\lambda}) & i = 1, \dots, \mu \\ |h_i| = O(\delta^{(\nu-i)\rho/\lambda}) \text{ あるいは } o(\delta^{(\nu-i)\rho/\lambda}) & i = 1, \dots, \nu \\ |g_{\mu+i}|, |h_{\nu+i}| = O(\delta^0), & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.7)$$

上記のオーダー評価と  $A_0, B_0$  の行列式表現、および  $A_i$  と  $B_i$  の計算式を用いれば、 $\|A_i\|$  と  $\|B_i\|$  の  $\delta$  に関するオーダーを評価することができる。しかし、それは意外と複雑であるので、本稿では以下の性質を述べるにとどめる。

- (1) 終結式の評価式より  $\|A_0\|, \|B_0\|$  は一般に  $\delta$  の負べきのオーダーとなる。
- (2)  $\|A_0\|^{-1}, \|B_0\|^{-1} = o(\delta^{\mu\nu\rho/\lambda})$  である。これは、行列式表現のうしろから2列目による展開を考えれば直ちに分かる。
- (3)  $G^{(0)}$  と  $H^{(0)}$  の低次項が微小係数であることから、 $\|A_i\|$  と  $\|B_i\|$  は  $i$  が大きくなるとともに小さくなる傾向をもつ。

## 4 特異点近傍での展開による桁落ち

前節で述べたように、特異点の近傍以外では極端な桁落ちは生じない。そこで、本章では展開点の特異点の近傍である場合のみを考察する。

### 4.1 解析の概略

桁落ちの解析は文献 [2] に習って行う。本稿では概略のみを述べる。

$$F'(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, v + \delta) \quad (4.1)$$

とおき、 $F'(x, v)$  の各項を  $v$  に関する全次数でまとめて次のように表す。

$$F'(x, v) = F'_0(x) + F'_1(x, v) + \dots + F'_i(x, v) \quad (4.2)$$

ただし、 $F'_i(x, v)$  は  $v_1, \dots, v_n$  に関して全次数が  $i$  のみの項から成るものとする。以下、簡単のため  $F'_i(x, v)$  の ' を省略する。

算式 (2.7) を  $G^{(k+1)} = G^{(k)} + \Delta G^{(k+1)}$ ,  $H^{(k+1)} = H^{(k)} + \Delta H^{(k+1)}$  と表すとき、補正項  $\Delta G^{(k+1)}$  と  $\Delta H^{(k+1)}$  を  $F_1(x, v), \dots, F_\ell(x, v)$  および  $A_i(x), B_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, \ell - 1$ ) の積和の形で表すことができる。そして、 $A_i(x)$  と  $B_i(x)$  の  $\delta$  依存性より、 $\Delta G^{(k)}$  と  $\Delta H^{(k)}$  の計算過程で現れる各項の  $\delta$  依存性を知ることができる。

ここで、展開点を特異点に近づけた場合、すなわち  $\delta \rightarrow 0$  とした場合を考える。 $\|A_0\|$  や  $\|B_0\|$  などは  $\delta$  の負べきに比例するから、 $\delta \rightarrow 0$  とともに  $\Delta G^{(k+1)}$  と  $\Delta H^{(k+1)}$  の計算過程で現れる各項はどんどん大きくなる。さて、特異点が分岐点で  $G^{(k)}$  あるいは  $H^{(k)}$  が代数曲線の一つの分岐に対応する場合には、分岐点での展開は Taylor 級数とならずに

Puiseux 級数 (すなわち、全次数に関して分数べき級数) となるはずだから、 $\delta \rightarrow 0$  とともに  $|\text{展開係数}| \rightarrow \infty$  となるはずである。したがって、大きな桁落ちが生じないと予想される (実際、一つのみ分岐のみの計算を Newton 法で行うと、ほとんど桁落ちが起きないことを文献 [2] が証明している)。しかしながら、それぞれが Taylor 展開できるような因子が互いに交差する特異点の場合 (このような特異点を我々は交差点と呼ぶことにする)、 $G^{(k)}$  と  $H^{(k)}$  がそれぞれの Taylor 展開に対応するように初期因子  $G^{(0)}$  と  $H^{(0)}$  を決めるならば、 $G^{(k)}$  と  $H^{(k)}$  の計算結果は当然 Taylor 級数となる。すなわち、 $\delta \rightarrow 0$  としても結果式の展開係数は有限のままである。ところが、計算の過程では、 $\|A_0\|$  や  $\|B_0\|$  は  $\delta$  の負べきに比例するゆえ、 $\Delta G^{(k)}$  と  $\Delta H^{(k)}$  の計算では  $\delta^{-k\sigma}$  ( $\sigma$  はある正数) のような  $\delta$  依存性をもつ項が現れる。これらの項は全体としてキャンセルしなければならないから、 $\Delta G^{(k)}$  と  $\Delta H^{(k)}$  の計算では  $k$  に比例した桁落ちが起きることになる。

## 4.2 実験例

原点を特異点とする次なる 2 変数多項式  $F(x, u)$  について桁落ちの様子を見る。

$$F(x, u) = x^4 - ux^3 - 4u^2x^2 + 4u^2x + 3u^3 - u^2$$

例 1 展開点を原点の近傍  $u = 0.001$  (すなわち  $\delta = 0.001$ ) とする。このとき、 $F'(x, v) = F(x, v + 0.001)$  に対する  $F'(x, 0) = 0$  の解  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  を DKA 法で求めれば次を得る。

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0.0012514735562134 + 0.031572354883953i \\ \alpha_2 = -0.032361324779379 \\ \alpha_3 = 0.0012514735562134 - 0.031572354883953i \\ \alpha_4 = 0.030858377666952 \end{cases}$$

そこで、初期因子  $G^{(0)}, H^{(0)}$  を次のように決める：

$$\begin{cases} G^{(0)}(x) = (x - \alpha_2)(x - \alpha_4) \\ \quad = x^2 + 0.0015029471124269x - 0.00099861798184498 \\ H^{(0)}(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \\ \quad = x^2 - 0.0025029471124268x + 0.00099837977898016 \end{cases}$$

このときの  $G^{(0)}, H^{(0)}$  の終結式を求めてみると、

$$\text{res}(G^{(0)}, H^{(0)}) = 0.0000039839982645989$$

となり、 $O(\delta^2)$  であることがわかる。この初期因子に対する  $A_0(x), B_0(x)$  のノルムは Table 1 のようになる。前章でも述べたように、 $i$  が大きくなるにつれ  $\|A_i\|, \|B_i\|$  が小さくなっていることがわかる。

算式 (2.7) で  $k = 8$  まで計算して得られた結果に対する係数部の相対誤差を Table 2 に示す。これらの計算は、NSlisp-GAL の有効浮動小数 (effective-float 文献 [3] 参照) を用いて行われた。この浮動小数システムでは初期精度を  $1.0e-15$  にとっている (機械イプシロンは  $2.2e-16$ ) から、最小相対誤差が  $1.0e-15$  ということは全く桁落ちを起こしていない項が

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$\ A_i\ $	1005.4959	501.25467	0.50044253	0.49981492
$\ B_i\ $	1005.4959	501.25467	0.50056193	0.50018507

Table 1.  $A_i$  と  $B_i$  のノルム (a)

あるということである。一方、相対誤差の最大値がおおよそ 0.082 ということは、 $G^{(8)}, H^{(8)}$  中の係数部において高々1桁程度の有効桁しかもたない項が存在するということである。初期因子  $G^{(0)}$  と  $H^{(0)}$  は少なくとも機械イプシロン程度の有効桁をもっていたのであるから、 $k$  次因子を計算するまでに十数桁の桁落ちが発生したことになる。

$k$ 次因子	最小相対誤差	最大相対誤差
$G^{(8)}$	1.0e-15	0.082047563026607
$H^{(8)}$	1.0e-15	0.082047563026607

Table 2.  $G^{(8)}, H^{(8)}$  の相対誤差 (a)

例2 例1における多項式  $F(x, u)$  に対して、初期因子  $G^{(0)}, H^{(0)}$  を次のように変更する。

$$\begin{cases} G^{(0)}(x) = (x - \alpha_2) \\ \quad = x + 0.032361324779379 \\ H^{(0)}(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \\ \quad = x^3 - 0.033361324779379 x^2 + 0.00107561666625583 x - 0.000030808380274818 \end{cases}$$

この初期因子の終結式の値は

$$\text{res}(G^{(0)}, H^{(0)}) = 0.00013444515635603$$

となる。この初期因子に対する多項式  $A_i, B_i$  のノルムは Table 3 のようになる。

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$\ A_i\ $	7437.97714	240.702794	7.78946129	0.74792271
$\ B_i\ $	7437.97714	240.702794	7.78946129	0.25207728

Table 3.  $A_i$  と  $B_i$  のノルム (b)

再び算式 (2.7) で  $k = 8$  まで計算して得られた結果の相対誤差が Table 4 である。表から明らかのように、変更された  $G^{(8)}, H^{(8)}$  因子の計算ではほとんど桁落ちが生じていないことが分かる。実際に  $G^{(8)}, H^{(8)}$  を出力してみると分かることだが、本例では  $k$  が大きくなると共に  $\Delta G^{(k)}$  と  $\Delta H^{(k)}$  の係数部は大きくなっている。一方、例1においては  $\Delta G^{(k)}$  と  $\Delta H^{(k)}$  の係数部はそれほど大きくなる。

$k$ 次因子	最小相対誤差	最大相対誤差
$G^{(8)}$	5.1643596591265e-16	1.8630994352729e-15
$H^{(8)}$	8.440649460858e-16	6.0452020344502e-14

Table 4.  $G^{(8)}, H^{(8)}$  の相対誤差 (b)

## 5 まとめ

文献 [2] は  $F(x, u_1, \dots, u_n)$  の  $x$  に関するベキ級数根  $x = \chi_i(u_1, \dots, u_n)$  を Newton 法で計算する場合の桁落ち誤差を解析した。一方、本稿では  $F$  を、Hensel 構成法により

$$F(x, u_1, \dots, u_n) \equiv G^{(k)}(x, u_1, \dots, u_n)H^{(k)}(x, u_1, \dots, u_n) \pmod{(u_1, \dots, u_n)^{k+1}}$$

のように、ベキ級数因子の積に分離する場合の桁落ち誤差を論じた。本稿の方法で、初期因子  $G^{(0)}$  を  $G^{(0)}(x) = x - \alpha_i$  とするならば、 $G^{(\infty)}(x) = \chi_i(u_1, \dots, u_n)$  となるから、本稿は文献 [2] の解析を一般化したものといえる。

ベキ級数根  $\chi_i(u_1, \dots, u_n)$  の計算では、展開点が分岐点の近傍の場合、桁落ちがほとんど起きないが、展開点が交差点の近傍の場合、 $k$  に比例した桁落ちが起きることが示されていた。一方、Hensel 構成において桁落ちが生じる場合はもっと複雑であることが分かった。大雑把に言えば、Hensel 構成因子が互いに交差する二つの Taylor 級数に対応するような場合には、大きな桁落ちが起きるといえる。

しかし、本研究における理論的解析はまだ十分とは言えないゆえ、さらに理論をつめていきたいと考えている。

## 参 考 文 献

- [1] T. Sasaki and F. Kako, Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, preprint (January 1993), 21 pages. (本稿は 1993 年 2 月上旬に投稿されたが、査読報告が届いたのは約 3 年半後の 1996 年 9 月上旬である。直ちに (1996 年 10 月上旬) 修正稿を送付したが、いまだ第 2 回目の査読報告は届いていない。)
- [2] T. Sasaki, T. Kitamoto and F. Kako, "Error analysis of power series roots of multivariate algebraic equation", preprint (March 1994), 30 pages. (本稿は 1994 年 4 月に投稿されたが、査読報告 (ただし実質上無査読) が届いたのは 3 年後の 1997 年 4 月である。直ちに著者らの意見書を提出したが、その後、何の連絡もない。)
- [3] F. Kako and T. Sasaki, Proposal of "effective" floating-point number, preprint (May 1997), 12 pages (submitted for publication).
- [4] 佐々木建昭, 計算代数と計算幾何 (岩波講座 応用数学), 岩波書店, 1993.
- [5] T. Sasaki and M-T. Noda, Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, J. Inf. Process., **12** (1989), 159-168.
- [6] 一松 信, 数値解析 (新数学講座 13), 朝倉書店, 1982.