数理解析研究所講究録
1038 巻 1998 年 23-30

微分作用素を用いた有理関数の留数計算と Horowitz's algorithm

田島慎一 [1)]　　中村弥生 [2)]

Abstract. 与えられた有理型関数 $u(x)$ に関する留数を考える. この時, 実際には関数 $u(x)$ の特異部のみが必要である事に注目して, $u(x)$ の正則関数の層 $\mathcal{O}_X$ による剰余をとり, それを m とおく.

この m は代数的局所コホモロジー群の元とみなす事ができ, 代数的局所コホモロジー群の $\mathcal{D}$-加群としての性質を用いる事により, m を微分方程式の解として特徴付けることができる. さらに, $\mathcal{D}$-加群としての duality を用いることにより, $u(x)$ の留数計算を効率良く行う事ができる. また, この考えを有理関数の不定積分に応用することにより, Horowitz のアルゴリズムが自然に導かれる事が分かる.

1. 準備

代数的局所コホモロジー群と $\mathcal{D}$-加群についての基本的性質を思い出す.

X を複素平面 $\mathbf{C}$ 上の領域, $\mathcal{O}_X$ を X 上の正則関数の層とする. A を X 上の有限個の点からなる集合とし, $\mathcal{I}_A$ をその定義イデアルとする. これに対し, 集合 A に台を持つ 1 次の代数的局所コホモロジー群は extention 群の帰納極限で定義される.

$$\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X) = \lim_{\ell\to\infty} \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_A^\ell; \mathcal{O}_X).$$

これに対して, 次の関係が成り立つ.

$$\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X[*A]/\mathcal{O}_X. \tag{1}$$

但し, $\mathcal{O}_X[*A]$ は A に極を持つ X 上の有理型関数の層を表す.

$\mathcal{D}_X$ を X 上の正則係数を持つ有限階の線形微分作用素の環の層とする. このとき, 代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は自然に左 $\mathcal{D}$-加群の構造を持ち, 特に連接である.

2. 理論

複素平面 $\mathbf{C}$ 上の有理型関数 $u(x)$ で, 高々有限個の点 $x = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に極を持つものが与えられたとする, i.e.,

$$u(x) = \frac{h(x)}{q(x)}.$$

[1)] 新潟大学工学部情報工学科
[2)] お茶の水女子大学大学院人間文化研究科複合領域科学専攻

但し, $q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}, h(x)\neq 0$. ここで, $A=\{x\in\mathbf{C}|x=\alpha_j, j=1,\ldots,n\}$, $A_j=\{\alpha_j\}$ とおく.

Ω_X を正則微分形式全体とする. ある正則微分形式 $\psi(x)dx\in\Omega_X$ に対し, $\psi(x)u(x)dx$ の A_j における留数を対応させることにより, 次の写像が定義される.

$$\begin{array}{rccl} Res_{A_j}(\cdot,u(x)): & \Omega_X & \to & \mathbf{C} \\ & \psi(x)dx & \mapsto & Res_{A_j}(\psi(x)dx,u(x)) \\ & & & =\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{A_j}\psi(x)u(x)dx \end{array}$$

このとき, 関数 $u(x)$ の極における主要部に注目して, $u(x)$ の $\mathcal{O}_X$ による剰余をとり, それを m とおく, i.e.,

$$m=(\ u(x)\ \ \mathrm{mod}\ \mathcal{O}_X).$$

これを用いて, 上の線形写像は次のように定義しなおすことができる.

$$\begin{array}{rccc} Res_{A_j}(\cdot,m): & \Omega_X & \to & \mathbf{C} \\ & \psi(x)dx & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{A_j}\psi(x)mdx \end{array} \tag{2}$$

さて, (1) より m は A に台を持つ代数的局所コホモロジー群の元とみなすことができる, i.e.,

$$m\in H^1_{[A]}(\mathcal{O}_X).$$

ここで, 代数的局所コホモロジー群 $H^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ はつぎの直和分解をもつ.

$$H^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)=H^1_{[A_1]}(\mathcal{O}_X)\oplus\cdots\oplus H^1_{[A_n]}(\mathcal{O}_X).$$

これに対して, m は

$$m=m_1+m_2+\ldots+m_n$$

と分解することができ, このとき各 $m_j\in\mathcal{H}^1_{[A_j]}(\mathcal{O}_X)$ $(j=1,\ldots,n)$ は

$$m_j=\sum_{\ell=1}^{n_j}\frac{c_{j,\ell}}{(z-\alpha_j)^\ell}\ \ mod\ \mathcal{O}_X$$

と表される.

2.1. $u(x)$ の各極における主要部の特徴付け

m を annihilate する微分作用素全体は環 $\mathcal{D}_X$ の左イデアルをなす. それを $\mathcal{J}$ とおく, i.e.,

$$\mathcal{J}=\{R\in\mathcal{D}_X|Rm=0\}.$$

このとき次の定理が成り立つ.

Theorem 1

$$\{f \in H^1_{[A_j]}(\mathcal{O}_X) | Rf = 0, \forall R \in \mathcal{J}\} = \{cm_j | c \in \mathbf{C}\}.$$

さらに, $\mathcal{J}$ は次の微分作用素 P, Q で生成される.

$$P = (\prod_j (x-\alpha_j))\frac{d}{dx} + \sum_j r_j(\prod_{\ell \neq j}(x-\alpha_\ell)) - \frac{h'(x)}{h(x)}\prod_j (x-\alpha_j),$$

$$Q = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}.$$

すなわち, 各極 A_j における主要部は, 微分作用素 P, Q に関する $H^1_{[A_j]}(\mathcal{O}_X)$ 上の斉次微分方程式の解として特徴付けることができる.

注意:有理型関数 $u(x)$ の分母 $q(x)$ に対する因数分解の具体的な形がわからない場合でも, 微分作用素 P は次のように表現することができる. まず, $q_s(x)$ を $q(x)$ の square free part, $q'(x) = \dfrac{dq(x)}{dx}$ とおく. このとき, $q_s(x) = \dfrac{q(x)}{GCD(q(x), q'(x))}$ が成り立つ. これを用いて, P は次で与えられる.

$$\begin{aligned} P &= q_s(x)\frac{d}{dx} + q_s(x)(\frac{q'(x)}{q(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)}) \\ &= \frac{q(x)}{GCD(q(x), q'(x))}\frac{d}{dx} + \frac{q'(x)}{GCD(q(x), q'(x))} - \frac{q(x)}{GCD(q(x), q'(x))}\frac{h'(x)}{h(x)}. \end{aligned}$$

2.2. 形式的随伴作用素

微分作用素 $R = \sum a_i(x)\left(\dfrac{d}{dx}\right)^i$ に対して, 形式的随伴作用素 R^* は次で与えられる.

$R^* = \sum \left(-\dfrac{d}{dx}\right)^i a_i(x)$. 正則微分形式 $\phi(x)dx \in \Omega_X$ に対する $R \in \mathcal{D}_X$ の右からの作用を次で決める.

$$(\phi(x)dx)R = (R^*\phi(x))dx$$

この作用によって, Ω_X は右 $\mathcal{D}_X$-加群の構造をもつ.

2.3. 留数計算

$R \in \mathcal{J}$ に対して, $Rm = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint \phi(x)Rmdx &= \frac{1}{2\pi i}\oint (R^*\phi(x))mdx \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

今, イデアル $\mathcal{J}$ に対して, 形式的随伴作用素全体は $\mathcal{D}_X$ の右イデアルをなし, これを $\mathcal{J}^*$ とおく. すると, (2) で定義した線形写像に関して, 次が成り立つ.

Theorem 2

$$\begin{aligned} &\{\psi(x)dx \in \Omega_X | Res_{A_j}(\psi(x)dx, m) = 0, j = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \{(R^*\phi(x))dx | R^* \in \mathcal{J}^*, \phi(x)dx \in \Omega_X\}. \end{aligned}$$

さらに, $r = r_1 + \cdots + r_n$ とおき, $G = \{\psi(x)dx \in \Omega_X | \psi(x) \in \mathbf{C}[x], \deg\psi(x) \leq r - 1\}$ とおく. ここで, $\mathbf{C}[x]$ は $\mathbf{C}$ 上の x 変数多項式を表す. このとき, $K = \{\psi(x)dx \in \Omega_X | Res_{A_j}(\psi(x)dx, m) = 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$ について, 次のことが分かる.

Corollary 1

$$K \cap G = \langle (P^*1)dx, \ldots, (P^*x^{r-n-1})dx \rangle.$$

即ち, 各 A_j における留数 $Res_{A_j}(\psi(x)dx, m)$ が零となるような微分形式 $\psi(x)dx$ で, 高々 $r-1$ 次の多項式を係数にもつものは, $(P^*1)dx, \ldots, (P^*x^{r-n-1})dx$ の線形結合によって表される.

多変数の場合に関する事

横浜市立大学の大阿久俊則氏によるプログラムにより, 数式処理システム kan を用いて, 多変数の代数的局所コホモロジー群の元を annihilate する微分作用素を計算することができる. これによって, 留数が 0 となる部分を決める事ができるわけであるが, 更に詳しいことに関して, 大阿久氏と共同で研究中である.

3. 有理関数の不定積分

有理関数 $\dfrac{g(x)}{q(x)}$ ($g(x), q(x)$:多項式) の不定積分を次のように分解して考える.

$$\int \frac{g(x)}{q(x)} dx = (\text{有理関数部分}) + (\text{対数関数部分}) + (\text{多項式部分}).$$

多項式部分は $g(x)$ を $q(x)$ で割った商を考えれば良いから, はじめから $\deg g(x) < \deg q(x)$ を仮定しておいてかまわない.

$$\int \frac{g(x)}{q(x)} dx = (\text{有理関数部分}) + (\text{対数関数部分}).$$

有理関数の不定積分を, このように有理関数部分と対数関数部分とに分割して考えるのが, いわゆる Horowitz のアルゴリズムである. ここで有理関数の不定積分と留数計算は次のように対応している.

$$\begin{array}{rcl} \text{不定積分} & \Longleftrightarrow & \text{留数計算} \\ \text{有理関数部分} & \Longleftrightarrow & \text{留数} = 0 \\ \text{対数関数部分} & \Longleftrightarrow & \text{留数} \neq 0 \end{array}$$

Theorem 2 の Corollary 1 を応用することにより, 与えられた有理関数の不定積分の有理関数部分を決定することができる. なお, 対数関数部分の決定に関しては, [6] 等を参照されたい.

3.1. 具体的計算方法

ここでは, 説明をわかりやすくするために, $q(x)$ は 1 次式の積で分解できるとして考える, i.e.,

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_n)^{r_n}.$$

いま, $u(x) = \dfrac{1}{q(x)}$ とおき, $m = (u(x) \bmod \mathcal{O}_X)$ の annihilator ideal を $\mathcal{J}$ とおく. Corollary 1 により, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\varphi(x)dx}{q(x)}$ が有理関数でとれるのは

$$\varphi(x)dx \in \langle (P^*1)dx, \ldots, (P^*x^{r-n-1})dx \rangle$$

の場合である. ここで, mod $q(x)$ で考えて,

$$P^*x^\ell = a_{r-1,\ell}x^{r-1} + a_{r-2,\ell}x^{r-2} + \ldots + a_{1,\ell}x + a_{0,\ell}$$

とおく. また, 上の積分が対数関数でとれるのは,

$$\begin{aligned} g_j(x) &= (x-\alpha_j)^{r_j-1}\prod_{\ell \neq j}(x-\alpha_\ell)^{r_\ell} \\ &= x^{r-1} + b_{r-2,j}x^{r-2} + \ldots + b_{1,j}x + b_{0,j} \end{aligned}$$

の場合である. 但し, $j = 0, \ldots, n-1$ である.

このとき, $t = 0, \ldots, r-1$ に対して, 各 $a_{t,\ell}$, $b_{t,j}$ からなる列ベクトルをそれぞれ U_ℓ, V_j とおく. 但し, $b_{r-1,j} = 1$ とおく. また, 与えられた有理関数 $\dfrac{g(x)}{q(x)}$ に対して, $g(x)$ の $1, \ldots, x^{r-1}$ に対する係数からなる列ベクトルを W とおく. すると,

$$W = \sum_\ell c_\ell U_\ell + \sum_j d_j V_j$$

を満たす定数 $c_\ell, \ell = 0, \ldots, r-n-1$, $d_j, j = 0, \ldots, n-1$ を求めることができ, よって $g(x)$ は

$$g(x) = \sum_\ell c_\ell (P^*x^\ell) + \sum_j d_j g_j(x)$$

と書くことができる.

いま, P^* は

$$P^* = -(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}\frac{d}{dx}\frac{1}{(x-\alpha_1)^{r_1-1}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n-1}}$$

の形で表すことができるから, 整数 m に対して,

$$\int \frac{P^*x^m dx}{q(x)} = -\frac{x^m}{(x-\alpha_1)^{r_1-1}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n-1}}$$

と計算される. 一方,

$$\begin{aligned} \int \frac{g_j(x)}{q(x)}dx &= \int \frac{1}{x-\alpha_j}dx \\ &= \log(x-\alpha_j) \end{aligned}$$

である. よって, 有理関数 $\dfrac{g(x)}{q(x)}$ の不定積分は次の様に簡単に計算できる.

$$\begin{aligned}\int \frac{g(x)}{q(x)}dx &= \sum_\ell c_\ell \int \frac{P^*x^\ell}{q(x)}dx + \sum_j d_j \int \frac{g_j(x)}{q(x)}dx \\ &= -\sum_\ell c_\ell \frac{x^\ell}{\prod_j (x-\alpha_j)^{r_j-1}} + \sum_j d_j \log(x-\alpha_j) + constant.\end{aligned}$$

3.2. 例

有理関数 $u(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)^3(x-3)}$ について考える.

$m = (\dfrac{1}{x^2(x-1)^3(x-3)}\ mod\ \mathcal{O}_X)$ に対する annihilator ideal $\mathcal{J}$ は, 次の微分作用素 P, Q で生成される.

$$P = x(x-1)(x-3)\frac{d}{dx} + 2(x-1)(x-3) + 3x(x-3) + x(x-1),$$
$$Q = x^2(x-1)^3(x-3).$$

また, これらの形式的随伴作用素は

$$P^* = -x(x-1)(x-3)\frac{d}{dx} + (x-1)(x-3) + 2x(x-3),$$
$$Q^* = x^2(x-1)^3(x-3)$$

であたえられる. P^*, Q^* のなすイデアルを $\mathcal{J}^*$ とおく. また, $A = \{x = 0, 1, 3\}$, $A_1 = \{0\}$, $U_2 = \{1\}, A_3 = \{3\}$ とおく.

まず, この m に関して, $Res_{A_j}(\psi(x)dx, m) = 0$ なる $\psi(x)dx$ を実際に求める. 各 A_j における留数 $Res_{A_j}(\varphi(x)dx, m)$ は, $\varphi(x) \in Image(Q^*)$ の場合, 明らかに零である. また, $\deg\varphi(x) \geq 6$ の場合は, $\varphi(x)$ を $x^2(x-1)^3(x-3)$ で割った余りを改めて $\varphi(x)$ として考えれば良いから, $\varphi(x)$ は高々 5 次方程式としてよい. ここで, $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ の P^* による像を mod $x^2(x-1)^3(x-3)$ で考える.

$$\begin{aligned}
P^*1 &= 3x^2 - 10x + 3, \\
P^*x &= 2x^3 - 6x^2, \\
P^*x^2 &= x^4 - 2x^3 - 3x^2, \\
P^*x^3 &= 2x^4 - 6x^3, \\
P^*x^4 &= -x^6 + 6x^5 - 9x^4, \\
&= 3x^4 - 10x^3 + 3x^2 \qquad \mathrm{mod}\ x^2(x-1)^3(x-3), \\
P^*x^5 &= -2x^7 + 10x^6 - 12x^5, \\
&= 4x^4 - 14x^3 + 6x^2 \qquad \mathrm{mod}\ x^2(x-1)^3(x-3).
\end{aligned}$$

このとき, P^*1, P^*x, P^*x^2 が一次独立であることが分かり, $(P^*1)dx$, $(P^*x)dx$, $(P^*x^2)dx$ が $\{\psi(x)dx \in \Omega_X | Res_{A_j}(\psi(x)dx, u(x)) = 0, i = 1, 2, 3, \deg\psi(x) \leq 5\}$ の基底をなすことがわかる.

次に有理関数 $\dfrac{x^5+2x+3}{x^2(x-1)^3(x-3)}$ の不定積分を考える. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{g(x)}{x^2(x-1)^3(x-3)}dx$ が有理関数で求まるのは, 上の結果により $g(x) \in \langle P^*1, P^*x, P^*x^2\rangle$ の場合である. 一方, この不定積分が対数関数で求まるのは,

$$\begin{cases} x(x-1)^3(x-3) &= g_0(x) \\ x^2(x-1)^2(x-3) &= g_1(x) \\ x^2(x-1)^3 &= g_2(x) \end{cases}$$

とおいたとき, $g(x) \in \langle g_0(x), g_1(x), g_2(x)\rangle$ の場合である. x^5+2x+3, P^*1, P^*x, P^*x^2, $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ の 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 に対する係数のなすベクトルをそれぞれ W, U_0, U_1, U_2, V_0, V_1, V_2 とおく. すると,

$$W = U_0 - \frac{9}{2}U_1 + 2U_2 + 4V_0 - \frac{13}{2}V_1 + \frac{7}{2}V_2$$

とあらわすことができる. これより,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5+2x+3}{x^2(x-1)^3(x-3)}dx &= \int \frac{P^*1}{x^2(x-1)^3(x-3)}dx - \frac{9}{2}\int \frac{P^*x}{x^2(x-1)^3(x-3)}dx \\ &+ 2\int \frac{P^*x^2}{x^2(x-1)^3(x-3)}dx \\ &+ 4\int \frac{1}{x}dx - \frac{13}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-3}dx \\ &= -\frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{9}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - 2\frac{x}{(x-1)^2} \\ &+ 4\log x - \frac{13}{2}\log(x-1) + \frac{7}{2}\log(x-3) + constant \end{aligned}$$

を得る.

ここに述べた方法により, 有理関数の不定積分は, 分母が 1 次式の積で因数分解されるときには線形代数の知識のみで計算することができ, 一般の場合には, D. Lazard, R. Rioboo の方法とあわせて用いることにより, 比較的簡単に計算することができる. また, この方法はさまざまな数式処理システムを用いて計算することができる.

参 考 文 献

[1] M. Kashiwara. *On the maximally overdetermined system of linear differenial equations,I.* Publ.RIMS,Kyoto Univ. **10** (1975),563-579.

[2] M. Kashiwara. *On the holonomic systems of linear differntial eqauations,II.* Inventiones mathematicae **49** (1978),121-135.

[3] J. Briançon et Ph. Maisonobe. *Idéaux de germes d'opérateur différentiels à une variable* L'Enseignement Math. **30** (1984), 7-38.

[4] S. Tajima. *A calculus of the tensor product of two holonomic systems with support on non-singular plane curves.* Proc Japan Acad.,**63**,Ser.A(1987) 390-391.

[5] S. Tajima. *Note on a tensor product of two holonomic systems with support on plane curve.* Nihonkai Math.J. **2** (1991),117-129.

[6] D. Lazard and R. Rioboo, *Integration of rational functions: rational computation of the logarithmic part*, J. Symbolic Comput. **9** (1990), 113–115.