

連立代数方程式の減次の可能性について

東京職業能力開発短大 情報処理 鈴木秀男 (Hideo Suzuki)
日本大学 理工学部 数学 小林英恒 (Hidetsune Kobayashi)

Abstract.

連立代数方程式の数値解法において、非常に近接した根が多数現れる場合があるが、そのような近接根を数値的に分離することは難しい。そこで、筆者らは一次分数変換を利用し近接根の分離と減次を行った。ここでは、連立代数方程式に一次分数変換を適用し、近接根が分離できることと減次における誤差について報告する。

1. はじめに

連立代数方程式の数値解法において、非常に近接した根が多数現れる場合がある [1], [2], [3]。そのような近接根を数値的に分離することは難しい。そこで、筆者らは一次分数変換を利用し近接根の分離を行なう方法を考え、この方法が多変数の場合にも適用可能であることを示した [4],[5]。一次分数変換は、近接根付近を拡大し、しかも近接根から十分離れている根については、ある特定の超平面に近づくという性質がある。前者は、連立代数方程式の数値解を重根、近接根も含めて高精度で計算できることを表している [6]。後者は、近接根を含むより低次の多項式を得る減次の可能性を表している。

ここでは、連立代数方程式に一次分数変換を適用し、近接根が分離できることと減次における誤差について報告する。

2. 一次分数変換

n 次元複素射影空間 $P^n(C)$ の斉次座標系 $(X_0 : X_1 : \dots : X_n)$ を用いて表現された m 次斉次多項式 $F(X_0, X_1, \dots, X_n)$ を、 $n+1$ 次正則行列 $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ に対応する射影変換 P_A

$$P_A : (X_0 : X_1 : \dots : X_n) \rightarrow \left(\sum_{i=0}^n a_{0i} X_i : \sum_{i=0}^n a_{1i} X_i : \dots : \sum_{i=0}^n a_{ni} X_i \right) \quad (1)$$

により変換する。行列 A の逆行列 A^{-1} を考えることにより、逆変換 $P_A^{-1} = P_{A^{-1}}$ も同様に定義できる。

このとき、連比にアフィン空間 C^n の点

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (X_1/X_0, X_2/X_0, \dots, X_n/X_0) \quad (2)$$

を対応させることで射影空間の点とアフィン空間の点とが対応付けられる。すなわち、アフィン空間での各座標は一次分数変換の形で与えられる。

超平面 $U_0 = \sum_{i=0}^n a_{0i} X_i = 0$ が元の方程式の根を含まないように射影変換を選んで、この超平面を新たな無限遠超平面とするととき有限部分での方程式の根が元の方程式の根と重複度も含めて1対1に対応する。

3. 一次分数変換の型

適当な複素数 α と実数 ϵ に対し $W(\alpha; \epsilon) = \{z \in C \mid |z - \alpha| < \epsilon\}$ とするとき、複素数 α_j と十分小さい正の実数 $\epsilon_j, j = 1, \dots, n$ に対し

$$W(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = W(\alpha_1; \epsilon_1) \times \dots \times W(\alpha_n; \epsilon_n) \quad (3)$$

とし、この範囲にある根を分離する。ただし、近接根以外の根は近接根から十分離れているものとする。

行列 A の選び方により様々な型の一次分数変換が存在するが、ここでは一次分数変換の具体的な型として

$$\sum_{j \in I} X_j + \left(\sum_{j \in I} \gamma_j - \sum_{j \in I} \alpha_j \right) X_0 = 0 \quad (4)$$

を新たな無限遠超平面に変換するような射影変換を考える。ただし、この超平面上に解は存在しないものとする。ここで、 I は添字の集合であり、 $\gamma_j = k_j \epsilon_j$ ($k_j \geq 1$) である。集合 I の選び方により、種々の無限遠超平面を決めることができる。

逆に、もとの無限遠超平面 $X_0 = 0$ は、この射影変換により

$$\sum_{j \in I} U_j - U_0 = 0 \quad (5)$$

と変換される。具体的には $n+1$ 次正則行列を

$$\begin{pmatrix} \sum_{j \in I} (\gamma_j - \alpha_j) & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_n \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix} \quad (6)$$

と選べばよい。ここに、 $\delta_i = 1 (i \in I), \delta_i = 0 (i \notin I)$ である。

4. 根の移動

領域 W に含まれる点については、その要素が $x_j = \alpha_j + c_j \epsilon_j$ ($|c_j| \leq 1$) と書けるから

$$u_j = \frac{c_j \epsilon_j}{\sum_{i \in I} (k_i + c_i) \epsilon_i} \quad (7)$$

となる。 $|c_l| \leq 1, \epsilon \ll 1$ であるから k の値をある程度大きくしても、各 u_j は元の空間での値に比べ分離されていることが分かる。とくに $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon$ のときは $u_j = c_j / \sum_{l \in I} (k + c_l)$ となり ϵ に関係しない。また領域 W に含まれない点については

$$\sum_{j \in I} u_j = \frac{1}{1 + \sum_{l \in I} \gamma_l / \sum_{j \in I} (x_j - \alpha_j)} \quad (8)$$

となり、 $O(\sum \gamma_l / \sum (x_j - \alpha_j))$ の割合で右辺の値は 1 へ近づくことが分かる。したがって領域 W に含まれない点は、領域から離れるほど、あるいは ϵ が小さくなるほど超平面 $\sum_{j \in I} u_j - 1 = 0$ に近づくことになる。

5. 一次分数変換による誤差

一次分数変換された連立代数方程式 $g(u) = 0$ を数値計算で解いた場合の誤差については、次が成り立つ。

命題 1

$g(u) = 0$ の近似解を $u = (u_1, \dots, u_n)$ とし、厳密解 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ との差を $\Delta u_j = u_j - \tilde{u}_j$ とする。また、 u をもとの空間へ逆変換したときの誤差を $\Delta x_j = x_j - \tilde{x}_j$ とおくと、次が成り立つ。

$$|\Delta x_j| \sim \sum_{l \in I} \gamma_l |\Delta u_j| \quad (9)$$

□

したがって、 $\sum \gamma_l \ll 1$ となるように γ_l を選べば、変換された方程式を解いて、その近似解を元の空間へ戻しても精度が保証される。

6. 減次による誤差

一次分数変換によって、領域 W から離れている根は、ある特定の超平面に近づく。この性質を利用すれば、近接根を含む低次の多項式が得られる。このような操作を減次といい、減次をするためには、元の連立代数方程式の解は必要なく、近接根領域と近接根以外の根がそれら近接根から十分離れていれば良い。例えば $1 \in I$ で u_1 についての減次は

$$g_j(u_1, \dots, u_n) = h_j(u_1, \dots, u_n) (\sum u_l - 1) + r_j(u_2, \dots, u_n) \quad (10)$$

により行われ、このような操作を繰り返して適用することによりさらに次数を減らすことが出来る。そして、減次に関して次の命題が成り立つ。

命題 2

連立代数方程式の交点は、非特異点とする。このとき近接根に対応する $(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ に対して $g_1(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n) = 0, \dots, g_n(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n) = 0$ が成り立ち $g_j(u_1, \dots, u_n)$ について減次を行った多項式を $h_j(u_1, \dots, u_n)$ とし、 $g_1(\tilde{\alpha}_1 + \Delta_1, \dots, \tilde{\alpha}_n + \Delta_n) = 0, \dots, h_j(\tilde{\alpha}_1 + \Delta_1, \dots, \tilde{\alpha}_n + \Delta_n) = 0, \dots, g_n(\tilde{\alpha}_1 + \Delta_1, \dots, \tilde{\alpha}_n + \Delta_n) = 0$ が成り立つとき

$$|\Delta_j| \sim L \left| e^{n_p - r_p} / \prod_{i=1}^{s_p} \lambda_i^{(p)} \right| \quad (11)$$

の交点を計算する。 $\gamma = 0.00001, k = 10$ として f_1, f_2 を一次分数変換したものを $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$ で表し、 $g_2^{(0)}$ を i 回減次した多項式を $g_2^{(i)}$ で表す。 $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$ の $r_j^{(0)}$ を計算すると $r_1^{(0)} = 0.98e - 6, r_2^{(0)} = 0.1e - 14$ であるから $g_2^{(0)}$ を減次するのが妥当である。 $g_2^{(1)}$ について $r_2^{(1)}$ を計算すると $r_2^{(1)} = 0.5e - 14$ であるから減次を行う。同様に $g_2^{(2)}$ については $r_2^{(2)} = 0.1e - 13$ となり、さらに減次が可能である。しかし、 $g_2^{(3)}$ については $r_2^{(3)} = 0.1e1$ となり、これ以上減次が行えないことを意味している。

表 1,2 に数値計算結果の一部を示した。

表 1 一次分数変換と減次による数値解

多項式	数値解 (上段が u の値、下段が v の値)	誤差評価値
$g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$	(0.4286532765768426D-01, 0.0000000000000000D+00) (0.9571346723423156D-01, 0.1721915552962335D-40)	
$g_1^{(0)}, g_2^{(1)}$	(0.4286532765768245D-01, - 0.4408103815583578D-38) (0.9571346723422579D-01, 0.5510129769479473D-39)	2.0e-14 2.0e-13
$g_1^{(0)}, g_2^{(2)}$	(0.4286532765769109D-01, 0.9183549615799121D-40) (0.9571346723425345D-01, -0.1721915552962335D-40)	1.3e-13 1.3e-12
$g_1^{(0)}, g_2^{(3)}$	(0.4286532765767457D-01, - 0.2875240227349544D-25) (0.9571346723420052D-01, 0.2877764582246251D-26)	3.3e-13 3.4e-12

表 2 一次分数変換と減次による数値解

多項式	計算時間 (秒)
$g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$	0.11712 (15 本)
$g_1^{(0)}, g_2^{(1)}$	0.94672E-01 (12 本)
$g_1^{(0)}, g_2^{(2)}$	0.49776E-01 (9 本)
$g_1^{(0)}, g_2^{(3)}$	0.44896E-01 (6 本)

注意：計算時間は追跡する総パス数(カッコ内の本数)に費やされた時間である

例 2 次の 10 変数連立代数方程式を考える。

$$f_1 = x_1^4 - 10x_1 + x_{10}^4 - 10x_{10} + x_2^4 - 10x_2 + x_3^4 - 10x_3 + x_4^4 - 10x_4 + x_5^4 - 10x_5 + x_6^4 - 10x_6 + x_7^4 - 10x_7 + x_8^4 - 10x_8 + x_9^4 - 10x_9 + 1/100000$$

$$f_2 = x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2^4 - x_2^2x_3^2 + x_3^4$$

$$f_3 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 - x_3x_4 - 10x_3 + x_4^2$$

$$f_4 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 - x_4x_5 - 10x_4 + x_5^2$$

$$f_5 = x_4^2 - x_4x_5 + x_5^2 - x_5x_6 - 10x_5 + x_6^2$$

$$f_6 = x_5^2 - x_5x_6 + x_6^2 - x_6x_7 - 10x_6 + x_7^2$$

$$f_7 = x_6^2 - x_6x_7 + x_7^2 - x_7x_8 - 10x_7 + x_8^2$$

$$f_8 = x_7^2 - x_7x_8 + x_8^2 - x_8x_9 - 10x_8 + x_9^2$$

$$f_9 = x_{10}^2 - x_{10}x_9 + x_9^2 - x_8x_9 + x_9^2 - 10x_9$$

$$f_{10} = x_1^4 - x_1x_{10} + x_{10}^4 - x_{10}x_9 + x_9^4$$

$\gamma = 0.00001, k = 10$ として一次分数変換を適用すると次のようになる。

$$\begin{aligned} g_1 = & u_1^4 + 0.9090909091u_1^3u_{10} + 0.9090909091u_1^3u_2 + 0.9090909091u_1^3u_3 \\ & + 0.9090909091u_1^3u_4 + 0.9090909091u_1^3u_5 + 0.9090909091u_1^3u_6 \\ & + 0.9090909091u_1^3u_7 + 0.9090909091u_1^3u_8 + 0.9090909091u_1^3u_9 \\ & - 3.090909091u_1^3 - 2.727272727u_1^2u_{10} - 2.727272727u_1^2u_2 \\ & - 2.727272727u_1^2u_3 - 2.727272727u_1^2u_4 - 2.727272727u_1^2u_5 \\ & - 2.727272727u_1^2u_6 - 2.727272727u_1^2u_7 - 2.727272727u_1^2u_8 \\ & - 2.727272727u_1^2u_9 + 3.272727273u_1^2 + 2.727272727u_1u_{10} \\ & + 2.727272727u_1u_2 + 2.727272727u_1u_3 + 2.727272727u_1u_4 \\ & + 2.727272727u_1u_5 + 2.727272727u_1u_6 + 2.727272727u_1u_7 \\ & + 2.727272727u_1u_8 + 2.727272727u_1u_9 - 1.272727273u_1 \\ & + 9.090909091e - 17u_{10}^4 - 0.9090909091u_{10} + 9.090909091e - 17u_2^4 \\ & - 0.9090909091u_2 + 9.090909091e - 17u_3^4 - 0.9090909091u_3 \\ & + 9.090909091e - 17u_4^4 - 0.9090909091u_4 + 9.090909091e - 17u_5^4 \\ & - 0.9090909091u_5 + 9.090909091e - 17u_6^4 - 0.9090909091u_6 \\ & + 9.090909091e - 17u_7^4 - 0.9090909091u_7 + 9.090909091e - 17u_8^4 \\ & - 0.9090909091u_8 + 9.090909091e - 17u_9^4 - 0.9090909091u_9 \\ & + 0.09090909091 \end{aligned}$$

$$g_2 = u_1^4 - u_1^2u_2^2 + u_2^4 - u_2^2u_3^2 + u_3^4$$

$$g_3 = u_1u_3 + 0.000001u_2^2 - 0.000001u_2u_3 + 0.000001u_3^2 - 0.000001u_3u_4 - u_3 \\ + 0.000001u_4^2$$

$$g_4 = u_1u_4 + 0.000001u_3^2 - 0.000001u_3u_4 + 0.000001u_4^2 - 0.000001u_4u_5 - u_4 \\ + 0.000001u_5^2$$

$$g_5 = u_1u_5 + 0.000001u_4^2 - 0.000001u_4u_5 + 0.000001u_5^2 - 0.000001u_5u_6 - u_5 \\ + 0.000001u_6^2$$

$$g_6 = u_1u_6 + 0.000001u_5^2 - 0.000001u_5u_6 + 0.000001u_6^2 - 0.000001u_6u_7 - u_6 \\ + 0.000001u_7^2$$

$$g_7 = u_1u_7 + 0.000001u_6^2 - 0.000001u_6u_7 + 0.000001u_7^2 - 0.000001u_7u_8 - u_7 \\ + 0.000001u_8^2$$

$$g_8 = u_1u_8 + 0.000001u_7^2 - 0.000001u_7u_8 + 0.000001u_8^2 - 0.000001u_8u_9 - u_8$$

$$\begin{aligned}
& +0.000001u_9^2 \\
g_9 = & u_1u_9 + 0.000001u_{10}^2 - 0.000001u_{10}u_9 + 0.000001u_8^2 - 0.000001u_8u_9 \\
& +0.000001u_9^2 - u_9 \\
g_{10} = & u_1^4 - 10000000000u_1^3u_{10} - 10000000000u_1^2u_{10}u_9 + 20000000000u_1^2u_{10} \\
& +20000000000u_1u_{10}u_9 - 10000000000u_1u_{10} + u_{10}^4 - 10000000000u_{10}u_9 \\
& +u_9^4
\end{aligned}$$

また、

$$r_1^{(0)} = 1.0e - 16$$

であるから減次が可能である。減次した多項式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
g_1^{(1)} = & u_1^3 + 0.9090909091u_1^2u_{10} + 0.9090909091u_1^2u_2 + 0.9090909091u_1^2u_3 \\
& +0.9090909091u_1^2u_4 + 0.9090909091u_1^2u_5 + 0.9090909091u_1^2u_6 \\
& +0.9090909091u_1^2u_7 + 0.9090909091u_1^2u_8 + 0.9090909091u_1^2u_9 \\
& -2.090909091u_1^2 - 1.818181818u_1u_{10} - 1.818181818u_1u_2 \\
& -1.818181818u_1u_3 - 1.818181818u_1u_4 - 1.818181818u_1u_5 \\
& -1.818181818u_1u_6 - 1.818181818u_1u_7 - 1.818181818u_1u_8 \\
& -1.818181818u_1u_9 + 1.181818182u_1 + 0.9090909091u_{10} \\
& +0.9090909091u_2 + 0.9090909091u_3 + 0.9090909091u_4 \\
& +0.9090909091u_5 + 0.9090909091u_6 + 0.9090909091u_7 \\
& +0.9090909091u_8 + 0.9090909091u_9 - 0.09090909091
\end{aligned}$$

さらに、

$$r_1^{(1)} = 3.6e - 16$$

であるからさらに減次が可能である。減次した多項式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
g_1^{(2)} = & u_1^2 + 0.9090909091u_1u_{10} + 0.9090909091u_1u_2 + 0.9090909091u_1u_3 \\
& +0.9090909091u_1u_4 + 0.9090909091u_1u_5 + 0.9090909091u_1u_6 \\
& +0.9090909091u_1u_7 + 0.9090909091u_1u_8 + 0.9090909091u_1u_9 \\
& -1.090909091u_1 - 0.9090909091u_{10} - 0.9090909091u_2 \\
& -0.9090909091u_3 - 0.9090909091u_4 - 0.9090909091u_5 \\
& -0.9090909091u_6 - 0.9090909091u_7 - 0.9090909091u_8 \\
& -0.9090909091u_9 + 0.09090909091
\end{aligned}$$

さらに、

$$r_1^{(2)} = 5.5e - 16$$

であるからもう一度減次が可能である。減次した多項式は次のようになる。

$$g_1^{(3)} = u_1 + 0.9090909091u_{10} + 0.9090909091u_2 + 0.9090909091u_3 \\ + 0.9090909091u_4 + 0.9090909091u_5 + 0.9090909091u_6 \\ + 0.9090909091u_7 + 0.9090909091u_8 + 0.9090909091u_9 \\ - 0.09090909091$$

ここで

$$r_1^{(3)} = 0.91$$

となるので、これ以上減次ができない事になる。計算時間と数値結果は、表3~7のようになる。

表3 減次による実用上の誤差と計算時間

連立代数方程式	誤差	計算時間	パス総数
$g_1 = 0, \dots, g_{10} = 0$	—	248.70 秒	8192 本
$g_1^{(1)} = 0, g_2 = 0, \dots, g_{10} = 0$	$1.0e - 16$	165.23 秒	6144 本
$g_1^{(2)} = 0, g_2 = 0, \dots, g_{10} = 0$	$4.0e - 16$	156.51 秒	4096 本
$g_1^{(3)} = 0, g_2 = 0, \dots, g_{10} = 0$	$6.0e - 16$	54.622 秒	2048 本

表4 分数変換と減次による数値解1(u_1 座標)

g_1, \dots, g_{10}	(0.7677740261664204D-01, -0.1640721422510207D+00)
$g_1^{(1)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.7677740261664201D-01, -0.1640721422510204D+00)
$g_1^{(2)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.7677740261664202D-01, -0.1640721422510212D+00)
$g_1^{(3)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.7677740261664166D-01, -0.1640721422510202D+00)

表5 分数変換と減次による数値解1(u_2 座標)

g_1, \dots, g_{10}	(0.1554489002291234D-01, 0.1804793445510371D+00)
$g_1^{(1)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.1554489002291222D-01, 0.1804793445510369D+00)
$g_1^{(2)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.1554489002291261D-01, 0.1804793445510376D+00)
$g_1^{(3)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.1554489002291240D-01, 0.1804793445510365D+00)

表6 分数変換と減次による数値解2(u_1 座標)

g_1, \dots, g_{10}	(0.4777407304657946D-01, 0.1214991310958369D-01)
$g_1^{(1)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.4777407304657941D-01, 0.1214991310958367D-01)
$g_1^{(2)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.4777407304657962D-01, 0.1214991310958373D-01)
$g_1^{(3)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.4777407304657933D-01, 0.1214991310958365D-01)

表7 分数変換と減次による数値解2(u_2 座標)

g_1, \dots, g_{10}	(0.4744851745538312D-01, -0.1336490311661669D-01)
$g_1^{(1)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.4744851745538308D-01, -0.1336490311661667D-01)
$g_1^{(2)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.4744851745538328D-01, -0.1336490311661672D-01)
$g_1^{(3)}, g_2, \dots, g_{10}$	(0.4744851745538299D-01, -0.1336490311661664D-01)

8. おわりに

連立代数方程式に一次分数変換を適用することにより、近接根付近が拡大されるだけでなく、近接根以外の根がある特定の超平面に近づく。この性質を利用し、減次の操作が行え、さらにここで述べたように減次における誤差の評価を与えることもできた。

以上のことから

- 連立代数方程式の場合の減次における誤差評価が可能
- 連立代数方程式の近接根の範囲のみで減次が可能
- 減次により精度を落とさずに計算時間の短縮が可能
- 連立代数方程式の場合における簡単な減次判定が可能
- 係数 $a_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ が 0 のときは精度が保存される

であることが確認できた。

参 考 文 献

- [1] H. Kobayashi & H. Suzuki. : The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations, Proc. of the 1992 International Workshop on Mathematics Mechanization, pp.53-64.
- [2] H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : Numerical calculation of the multiplicity of a solution to algebraic equations. Mathematics of Computation (掲載予定)
- [3] H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations II, Proc. of the 1994 Winter Workshop on Computer Algebra , pp.11-15.
- [4] 小林, 鈴木, 酒井 : 分数変換による近接根の分離について, 数式処理 vol.2 no.2 pp.2-7 (1993)
- [5] H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : Separation of close roots by linear fraction transformation, Proc. of ASIAN symposium on computer mathematics, pp.1-10 (1995)
- [6] 鈴木, 小林 : 一次分数変換を利用した連立代数方程式の高精度計算法, 第 53 回情報処理学会全国大会 講演論文集 1 巻 pp.63-64 (1996)