数理解析研究所講究録
1039 巻 1998 年 12-19

Hlawkaの不等式の拡張

九州工業大学
本田あおい (Aoi HONDA), 岡崎悦明 (Yoshiaki OKAZAKI)
岡山県立大学
高橋泰嗣 (Yasuji TAKAHASHI)

1 はじめに

本稿では R^n（またはヒルベルト空間）における Hlawka の 3 要素不等式を L^1での n 要素不等式に拡張する。この拡張は Hanner の不等式に関係がある。また、別の拡張として、Adamović の不等式に関連した n 要素不等式への拡張も示す。

Hlawka の不等式とは次式である。

$$\|x+y+z\|+\|x\|+\|y\|+\|z\| \geq \|x+y\|+\|y+z\|+\|z+x\| \quad \text{for } x, y, z \in \mathbf{R}^n$$

ここで $x_1=(x+y)/2, x_2=(y+z)/2, x_3=(z+x)/2$ とすると、次の不等式を得る。

$$\begin{aligned}&\|x_1+x_2+x_3\|+\|x_1+x_2-x_3\|+\|x_1-x_2+x_3\|+\|-x_1+x_2+x_3\| \\ &\geq 2(\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|).\end{aligned}$$

ε_i を Rademacher 列（各 ε_i は確率 $\frac{1}{2}$ で ± 1 をとる）とすると上式は

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i x_i\right\| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\|x_i\|$$

と書き直せる。$\mathbf{E}$ は ε_i についての期待値である。この拡張として、次の結果を得た。

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot {}_{n-1}C_{[\frac{n}{2}]} \cdot \sum_{i=1}^{n}\|x_i\| \quad \text{for } x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{L}^1.$$

ここに定数 $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot {}_{n-1}C_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ は最良である。

Adamović による別の拡張は次式である。

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + (n-2)\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} \|x_i + x_j\| \quad \text{for} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^n$$

この n 要素不等式をバナッハ空間 **E** に拡張する。すなわち

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + (n-2)\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} \|x_i + x_j\| \quad \text{for } x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{E}$$

が成り立つか？この不等式は L^1 では成り立つ。

2 Hlawka の不等式と 3 要素 Hanner の不等式

Theorem 1 ([1]) Hlawka の不等式

$$\|x+y+z\| + \|x\| + \|y\| + \|z\| \geq \|x+y\| + \|y+z\| + \|z+x\| \quad x, y, z \in \mathbf{R}^n$$

Hlawka の不等式は因数分解と三角不等式を用いて次のように直接証明できる。

Proof.

$$\begin{aligned}
&(\|x+y+z\| + \|x\| + \|y\| + \|z\| - \|x+y\| - \|y+z\| - \|z+x\|) \\
&\times (\|x+y+z\| + \|x\| + \|y\| + \|z\|) \\
&= (\|y\| + \|z\| - \|y+z\|)(\|x\| - \|y+z\| + \|x+y+z\|) \\
&+ (\|z\| + \|x\| - \|z+x\|)(\|y\| - \|z+x\| + \|x+y+z\|) \\
&+ (\|x\| + \|y\| - \|x+y\|)(\|z\| - \|x+y\| + \|x+y+z\|) \\
&\geq 0\,.
\end{aligned}$$

(S, Σ, μ) を可測空間とする。$x \in L^1$ のノルムは $\|x\| = \int |x(t)|\,d\mu(t)$ で与えられる。

L^1 の場合、n 要素 Hanner の不等式は次のようになる。

Theorem 2 (Kigami, Okazaki and Takahashi [2],[3]) n を自然数、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を独立な Rademacher 列、$x_1, x_2, \ldots, x_n \in L^1$ とする。このとき次式が成立する。

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| \geq \mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \|x_i\|\right|$$

n=3 の場合の Hanner の不等式を三角不等式を用いて変形する。

$$\begin{aligned}
&\|x_1+x_2+x_3\|+\|x_1+x_2-x_3\|+\|x_1-x_2+x_3\|+\|-x_1+x_2+x_3\| \\
&\geq \big|\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|\big|+\big|\|x_1\|+\|x_2\|-\|x_3\|\big|+\big|\|x_1\|-\|x_2\|+\|x_3\|\big|+\big|-\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|\big| \\
&\geq \big|\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+\|x_1\|+\|x_2\|-\|x_3\|+\|x_1\|-\|x_2\|+\|x_3\|-\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|\big| \\
&= 2(\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|)\ .
\end{aligned}$$

ここで $x=x_1+x_2-x_3,\ y=x_1-x_2+x_3,\ z=-x_1+x_2+x_3$ とすると

$$\|x+y+z\|+\|x\|+\|y\|+\|z\| \geq \|x+y\|+\|y+z\|+\|z+x\|.$$

このように Hlawka の不等式は 3 要素 Hanner の不等式（L^1）から導くことができる。すなわち Hlawka の不等式は L^1 で成り立つ。逆に Hlawka の不等式から次のようにして 3 要素 Hanner の不等式を導くことができる。

$$\begin{aligned}
&\|x+y+z\|+\|-x+y+z\|+\|x-y+z\|+\|x+y-z\| \\
&\geq \|(x+y+z)+(x-y-z)\|+\|(x-y+z)+(x+y-z)\| \\
&= \|2x\|+\|2x\| = 4\|x\|
\end{aligned}$$

$u=-x+y+z,\ v=x-y+z,\ w=x+y-z$ として Hlawka の不等式を適用すると

$$\begin{aligned}
&\|x+y+z\|+\|-x+y+z\|+\|x-y+z\|+\|x+y-z\| \\
&= \|u+v+w\|+\|u\|+\|v\|+\|w\| \\
&\geq \|u+v\|+\|v+w\|+\|w+u\| \\
&= \|2z\|+\|2x\|+\|2y\| = 2(\|x\|+\|y\|+\|z\|)
\end{aligned}$$

即ち

$$\|x+y+z\|+\|-x+y+z\|+\|x-y+z\|+\|x+y-z\| \qquad \cdots (*)$$
$$\geq \begin{cases} 4\|x\| \\ 2(\|x\|+\|y\|+\|z\|) \end{cases}$$

一方、3 要素 Hanner の不等式 は

$$\|x_1+x_2+x_3\|+\|x_1+x_2-x_3\|+\|x_1-x_2+x_3\|+\|-x_1+x_2+x_3\|$$
$$\geq |\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\||+|\|x_1\|+\|x_2\|-\|x_3\||+|\|x_1\|-\|x_2\|+\|x_3\||+|-\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\||.$$

である。$\|x_1\|\geq\|x_2\|\geq\|x_3\|$ として一般性を失わないので、左辺は

$$(\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|)+(\|x_1\|+\|x_2\|-\|x_3\|)+(\|x_1\|-\|x_2\|+\|x_3\|)+|-\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\||$$
$$=3\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+|-\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\||$$

次のように場合分けする。

(i) $\|x_1\|\geq\|x_2\|+\|x_3\|$ のとき

right–hand side $=3\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+\|x_1\|-\|x_2\|-\|x_3\|=4\|x_1\|$

(ii) $\|x_1\|\leq\|x_2\|+\|x_3\|$ のとき

right–hand side $=3\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|-\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|=2(\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|)$.

これは（$*$）より得られる。従って、 L^1 では Hlawka の不等式と 3 要素 Hanner の不等式は等価である。

3 Hlawka の不等式の拡張

L^1 における Hlawka の不等式は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i x_i\right\| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\|x_i\| \quad \text{for } x_1, x_2, x_3 \in L^1$$

ただし、$\mathbf{E}$ は Rademacher 列についての期待値である。$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ を独立な Rademacher 列とし、$x_1, x_2, \dots, x_n \in L^1$ とすると Hlawka の不等式の拡張として、次のような不等式が予想される。

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\| \geq K(n)\cdot\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|,$$

K(n) は n に依存する定数

これに関して次の結果を得た。

Theorem 3

n を自然数、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ を独立な Rademacher 列、$x_1, x_2, \dots, x_n$ を L^1 における関数とする。このとき次式が成り立つ。

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}\cdot {}_{n-1}C_{[\frac{n}{2}]}\cdot\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|,$$

ここに定数 $\frac{1}{2^{n-1}}\cdot {}_{n-1}C_{[\frac{n}{2}]}$ は最良である。

Proof. n 要素 Hanner の不等式から出発する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\| &\geq \mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\|x_i\|\right| \\
&= \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{\binom{\text{sum for all choices}}{\text{of}\pm\text{signs}}}\left|\pm\|x_1\|\pm\|x_2\|\pm\cdots\pm\|x_n\|\right| \\
&= \frac{1}{2^n}\left|\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots+\|x_n\|\right| + \sum_{\binom{\text{sum for all choices of}}{\text{one minus sign}}}\left|\|x_1\|+\cdots-\|x_i\|+\cdots+\|x_n\|\right|\cdot \\
&\quad + \sum_{\binom{\text{sum for all choices of}}{\text{two minus signs}}}\left|\|x_1\|+\cdots-\|x_j\|+\cdots-\|x_k\|+\cdots+\|x_n\|\right| + \cdots \\
&\quad + \left|-\|x_1\|-\|x_2\|-\cdots-\|x_n\|\right| .
\end{aligned}$$

三角不等式 $\sum|(\cdots)| \geq |\sum(\cdots)|$ を適用する。−が k 個の項

$$\underbrace{\left|\pm\|x_1\|\pm\cdots\pm\|x_i\|\pm\cdots\pm\|x_n\|\right|}_{\text{k minus signs}}$$

には、$\|x_i\|$ の係数は +1 が ${}_{n-1}C_k$ 個、−1 が ${}_{n-1}C_k$ 個あるので、${}_{n-1}C_k - {}_{n-1}C_{k-1} \geq 0$ ならば

$$\sum_{\left(\substack{\text{sum for all choices of}\\ \text{k minus signs}}\right)} (\cdots) = \left({}_{n-1}C_k - {}_{n-1}C_{k-1}\right) \times \left(\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|\right)$$

が成り立つ。${}_{n-1}C_k - {}_{n-1}C_{k-1} < 0$ ならば

$$\sum_{\left(\substack{\text{sum for all choices of}\\ \text{k minus signs}}\right)} (\cdots) = \left({}_{n-1}C_{k-1} - {}_{n-1}C_k\right) \times \left(\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|\right).$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\text{the right–hand side} \geq \frac{1}{2^n} \cdot 2\{1 + (n-2) + \left({}_{n-1}C_2 - {}_{n-1}C_1\right) + \left({}_{n-1}C_3 - {}_{n-1}C_2\right) + \cdots \\ + \left({}_{n-1}C_k - {}_{n-1}C_{k-1}\right)\}\left(\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|\right) \\ = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot {}_{n-1}C_k \cdot \sum_{n=1}^{n} \|x_1\|,\end{aligned}$$

ここで k は ${}_{n-1}C_k - {}_{n-1}C_{k-1} \geq 0$ を満たす最大の整数、即ち $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ (n/2 を超えない最大の整数) である。

$L^1[0,1]$ において、$x_1 = \cdots = x_n = 1$ とすると等号成立する。故にこの定数は最良である。証明終

4 別の拡張

Adamovic は $\mathbf{R}^n$ において次の不等式を示した。

Theorem 4 (Adamović [4])

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + (n-2)\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i + x_j\| \quad \text{for } x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^n$$

この不等式は n=3 の場合として Hlawka の不等式を含む。この不等式を Banach 空間に拡張する。

Theorem 5

E を Banach 空間とする。任意の $x, y, z \in E$ について次の不等式が成り立つと仮定する。(E における 3 要素 Hlawka 不等式である。)

$$\|x+y+z\|+\|x\|+\|y\|+\|z\| \geq \|x+y\|+\|y+z\|+\|z+x\|$$

このとき、任意の n と $x_1, \ldots, x_n \in E$ について次の不等式が成り立つ。

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + (n-2)\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| \geq \sum_{1\leq i<j\leq n}\|x_i+x_j\|$$

これは帰納法で証明できる。(c.f. [5])

Proof.

(i) n = 3 のとき成り立つ。

(ii) n で成り立つと仮定すると、n+1 の場合

$$\|x_1+\cdots+x_{n-1}+(x_n+x_{n+1})\|+(n-2)(\|x_1\|+\cdots+\|x_{n-1}\|+\|x_n+x_{n+1}\|)$$
$$\geq \sum_{1\leq i<j\leq n-1}\|x_i+x_j\|+\sum_{i=1}^{n-1}\|x_i+(x_n+x_{n+1})\|$$
$$\geq \sum_{1\leq i<j\leq n-1}\|x_i+x_j\|+\sum_{i=1}^{n-1}(\|x_i+x_n\|+\|x_i+x_{n+1}\|+\|x_n+x_{n+1}\|-\|x_i\|-\|x_n\|-\|x_{n+1}\|)$$
$$= \sum_{1\leq i<j\leq n+1}\|x_i+x_j\|+(n-2)\|x_n+x_{n+1}\|-\sum_{i=1}^{n-1}\|x_i\|-(n-1)(\|x_n\|+\|x_{n+1}\|),$$

ここで $\|x_i+x_n+x_{n+1}\|$ の項に n=3 の場合の不等式を適用している。整理して次式を得る。

$$\|x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n+x_{n+1}\|+(n-1)(\|x_1\|+\cdots+\|x_{n-1}\|+\|x_n\|+\|x_{n+1}\|)$$
$$\geq \sum_{1\leq i<j\leq n+1}\|x_i+x_j\|.$$

References

[1] D.S.Mitrinovic, J.E.Pecaric and A.M.Fink, Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Academic Publishers

[2] A.Kigami Y.Okazaki and Y.Takahashi, A Generalization of Hanner's inequality and the type 2 (cotype 2) constant of a Banach space, Bulletin of the Kyushu Institute of

Thechnology (Mathematics, Natural Science) No.42(March 1996), 29-34.

[3] A.Kigami Y.Okazaki and Y.Takahashi, A Generalization of Hanner's inequality, Bulletin of the Kyushu Institute of Thechnology (Mathematics, Natural Science) No.43(March 1996),9-13.

[4] Adamović,D.D., Généralisation d'une identité de Hlawka et l'inégalité correspondante, Mat. Vesnik 1 (16) (1964), 39-43.

[5] Vasić,P.M., Les inégalités pour les fonctions convexes d'order n, Mat. Vesnik 5 (20) (1968), 327-331.