数理解析研究所講究録
1040 巻 1998 年 228-236

高次収束する Steffensen 型反復解法

近藤 弘一 (Koichi Kondo)　　中村 佳正 (Yoshimasa Nakamura)

大阪大学大学院 基礎工学研究科 情報数理系専攻

概 要

Steffensen の反復法は導関数を用いない反復解法で, 非線形方程式 $x=\phi(x)$ の実数根の一つを求めるのに用いられる. 本稿では Steffensen 型の新しい反復解法を提出する. k 次 Shanks 変換を効果的に利用し反復法を定式化する. $k=1$ のときは Steffensen の反復法に帰着する. 新しい反復法の収束次数は $\phi'\neq 0,\pm 1$ のとき $k+1$ 次であり, $\phi'=0,\phi''\neq 0$ のときには $(k+2)2^{k-1}$ 次となる. なお, Shanks 変換の計算では, ε–アルゴリズムの助けにより行列式の直接的な計算を回避している. また, 新しい反復法が Newton 法や Steffensen の反復法より計算量の点でも優れている場合があることを例示する.

1 序論

1 元の非線形方程式 $x=\phi(x)$ の実数根の一つを求める反復解法について考察する. 最も単純な反復解法では, 関数 $\phi(x)$ を用いて反復計算

$$x_{n+1}=\phi(x_n), \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

を行う. 得られる数列 x_n が極限 α をもつとき, α は解の一つとなる. 反復関数 $\phi(x)$ が $|\phi'(\alpha)|<1$ を満たすとき, 数列 x_n は解 α に局所収束する.

Steffensen の反復法 [9]

$$x_{n+1}=\Phi(x_n), \qquad n=0,1,2,\ldots,$$
$$\Phi(x)\equiv x-\frac{\Bigl(\phi(x)-x\Bigr)^2}{\phi(\phi(x))-2\phi(x)+x} \tag{2}$$

は 2 次収束する反復解法である. 局所収束条件として, $|\phi'(\alpha)|<1$ は必ずしも必要ではない [7, pp. 241–246].

ここで, Steffensen の反復法と Newton 法との関連をみたい. まず, $f\equiv\phi-x$ とおいて, 解くべき問題を $f(x)=0$ とする (図 1 参照). さらに, $h\equiv f(x_n)$ とおけば Steffensen の反復法 (2) は

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/\left(\frac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h}\right)$$

と書ける. 右辺の分母を $f'(x_n)$ の近似値とみなし形式的に $h \to 0$ とすれば Newton 法に移行する. しかし, Newton 法の収束に関する Fourier 条件 [7, pp. 70–74] と Steffensen の反復法の収束条件 [4, pp. 93–95] とは異なることに注意したい.

Steffensen の反復法は, Aitken の加速公式 [1] を利用することで, 導関数を用いることなく 2 次収束を実現している. 加速法とは, ある収束の遅い数列 A_n が与えられたとき, その数列に適当な変換を施すことで, より速く同じ値に収束する数列 B_n を得る方法である. Aitken の加速公式は

$$B_n = A_n - \frac{(\Delta A_n)^2}{\Delta^2 A_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

により与えられる. ただし, $\Delta A_n \equiv A_{n+1} - A_n$ である. 注意すべきは, Aitken の加速公式を加速法として用いるときには, 数列は本質的に 1 次収束するにすぎないことである [10, pp. 265–268].

本稿では, Aitken の加速公式 (3) の代わりに, その拡張である Shanks 変換を反復関数に用いることで, Steffensen の反復法を拡張する. 高次収束する反復解法の定式化を試みる. なお, 任意の収束次数を持つ反復解法には, Newton 法の拡張である [3] 等の方法がある.

本研究で提出する反復解法は, 講究録 [6] で既に報告しているが, そこでは収束次数に関する定理の証明を省略している. 本稿ではその証明を与える. また, Kepler 方程式の数値計算例を通じて, 新しい反復法が Newton 法や Steffensen の反復法より計算量の面で優れている場合があることを示す.

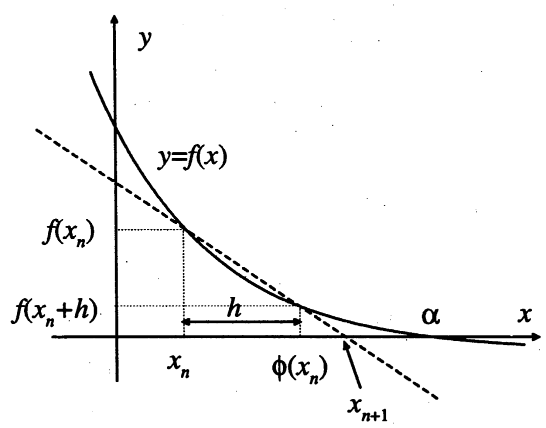


図 1: Steffensen の反復法

2 Shanks 変換による数列の加速法

Shanks 変換 [8] は Aitken の加速公式を拡張したもので, ある自然数 k について, 数列 A_n から数列 $B_n^{(k)}$ への変換公式

$$B_n^{(k)} = H_{k+1}(A_n)/H_k(\Delta^2 A_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

として与えられる. ただし, $H_k(A_n), H_k(\Delta^2 A_n)$ は

$$H_{k+1}(A_n) = \left.\begin{vmatrix} A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{n+k} \\ A_{n+1} & A_{n+2} & \cdots & A_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n+k} & A_{n+k+1} & \cdots & A_{n+2k} \end{vmatrix}\right\} k+1, \quad H_k(\Delta^2 A_n) = \left.\begin{vmatrix} \Delta^2 A_n & \cdots & \Delta^2 A_{n+k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^2 A_{n+k-1} & \cdots & \Delta^2 A_{n+2k-2} \end{vmatrix}\right\} k$$

で定められる Hankel 型行列式である. $k = 1$ のとき (4) は Aitken の加速法に他ならない. Aitken の加速法と同様に Shanks 変換でも, A_n の収束次数が 1 次であれば, $B_n^{(k)}$ の収束次数も 1 次である.

なお, ε–アルゴリズム [11] と呼ばれる計算法を用いれば, 変換公式 (4) の行列式を直接計算する必要はない. 具体的には, まず $\varepsilon_{-1}^{(n)}=0, \varepsilon_0^{(n)}=A_n\ (n=0,1,2,\ldots)$ と定め, 漸化式

$$\varepsilon_{j+1}^{(n)}=\varepsilon_{j-1}^{(n+1)}+\frac{1}{\varepsilon_j^{(n+1)}-\varepsilon_j^{(n)}}, \qquad j=0,1,2,\ldots, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

から $\varepsilon_j^{(n)}$ の列を計算する. すると $B_n^{(k)}=\varepsilon_{2k}^{(n)}, n=0,1,2,\ldots,$ より加速数列が得られる. ちなみに, ε–アルゴリズムによって $B_n^{(k)}$ を得には $k(2k+2n+1)$ 回の乗除算が必要である.

3 Shanks 変換による反復解法

Steffensen の反復法 (2) の拡張を行う. Aitken の加速公式 (3) の代わりに k 次 Shanks 変換 (4) を利用して, 反復計算

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Phi_k(x_n), \qquad n=0,1,2,\ldots, \\ \Phi_k(x) &\equiv A_k(x)/B_k(x) \end{aligned} \tag{6}$$

を導入する. ただし,

$$A_k(x)\equiv \left.\begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_k \\ \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_k & \phi_{k+1} & \cdots & \phi_{2k} \end{vmatrix}\right\} {\scriptstyle k+1}, \qquad B_k(x)\equiv \left.\begin{vmatrix} \Delta^2\phi_0 & \cdots & \Delta^2\phi_{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^2\phi_{k-1} & \cdots & \Delta^2\phi_{2k-2} \end{vmatrix}\right\} {\scriptstyle k},$$

$$\begin{aligned} &\phi_0(x)\equiv x, \qquad \phi_{j+1}(x)\equiv\phi(\phi_j(x)), && j=0,1,\ldots,2k-1, \\ &\Delta^2\phi_j(x)\equiv\phi_{j+2}(x)-2\phi_{j+1}(x)+\phi_j(x), && j=0,2,\ldots,2k-2 \end{aligned}$$

と定める. 以下では, 反復関数 $\Phi_k(x)$ による非線形方程式 $x=\phi(x)$ の反復解法を考察する.

4 Shanks 変換による反復解法の収束次数

k 次 Shanks 変換を用いた反復解法について次の定理が導かれる.

定理 1. $\phi(x)$ が C^{k+1} 級であり, かつ $\phi'(\alpha)\neq 0,\pm 1$ ならば, k 次 Shanks 変換を用いた反復法 (6) により定まる数列 x_n は α に少なくとも $k+1$ 次収束する.

証明. $x=\phi(x)$ の解を 0 と仮定しても一般性は失われない (証明略) ので, 以後解は 0 とする. 反復関数 $\Phi_k(x)$ を $x=0$ まわりで Taylor 展開し主要項を求める.

$\phi(x)$ の微係数を $c_n\equiv\phi^{(n)}(0)\ (n=1,2,\ldots)$ とする. ただし, 関数の上付き添字は微分の階数を表わす. 新しい関数 $a_{m,j}(x), b_{m,j}(x)$ を

$$\begin{aligned} a_{1,j} &\equiv \phi_j, && m=1, && j=0,1,\ldots,2k, \\ a_{m+1,j} &\equiv a_{m,j}-{c_1}^m a_{m,j-1}, && m=1,2,\ldots,k, && j=m,m+1,\ldots,2k, && (7) \\ b_{m,j} &\equiv a_{m,j+2}-2a_{m,j+1}+a_{m,j}, && m=1,2,\ldots,k, && j=m-1,m,\ldots,2k-2 && (8) \end{aligned}$$

と導入する. 行列式 $A_k(x), B_k(x)$ は

$$A_k(x) = \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,2k} \end{vmatrix}(x), \quad B_k(x) = \begin{vmatrix} b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,k-1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,k-1} & b_{k,k} & \cdots & b_{k,2k-2} \end{vmatrix}(x).$$

と表される.

まず, Steffensen の反復法に相当する $k=1$ の場合を考える. 行列式 $A_1(x)$ の各要素を Taylor 展開すれば

$$a_{1,0}(x) = x, \qquad a_{1,1}(x) = c_1 x + \frac{1}{2}c_2 x^2 + \cdots,$$
$$a_{2,1}(x) = \frac{1}{2}c_2 x^2 + \cdots, \qquad a_{2,2}(x) = \frac{1}{2}{c_1}^2 c_2 x^2 + \cdots$$

となる. 直接行列式に代入して

$$A_1(x) = \frac{1}{2}c_1(c_1-1)c_2x^3 + \cdots$$

を得る. また $B_1(x)$ は

$$B_1(x) = b_{1,0}(x) = (c_1-1)^2 x + \frac{1}{2}({c_1}^2 + c_1 - 2)c_2 x^2 + \cdots$$

である. よって条件 $c_1 \neq 1$ から, $x \to 0$ のとき $\Phi_1(x) = O(x^2)$ となる.

一般の自然数 k に対して $\Phi_k(x) = O(x^{k+1})$ を示す. まず, $a_{m,j}(x)$ の主要項を求める. $a_{m,j}(x)$ は漸化式 (7) と新たに導入する定数 $\beta_i^{(m)}$ を用いて

$$a_{m,j}(x) = \phi_j(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^{(m)} \phi_{j-i}(x), \qquad \beta_i^{(m)} \equiv (-1)^i \sum_{0<p_1<\cdots<p_i<m} c_1^{p_1+p_2+\cdots+p_i} \tag{9}$$

と表せる. また合成関数 $\phi_j(x) = \phi_{j-1}(\phi(x))$ の n 階の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}^n \phi_j(x)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^r \phi_{j-1}(\phi)}{\mathrm{d}\phi^r} \sum_{\substack{q_1+\cdots+q_r=n \\ 0<q_r\leqslant\cdots\leqslant q_1}} C(q_1,\ldots,q_r) \frac{\mathrm{d}^{q_1}\phi(x)}{\mathrm{d}x^{q_1}} \cdots \frac{\mathrm{d}^{q_r}\phi(x)}{\mathrm{d}x^{q_r}} \right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

となる. ただし, $C(q_1,\ldots,q_r)$ は $\{q_1,\ldots,q_r\}$ により一意に定まる正の定数である. 例えば, $C(1,\ldots,1) = 1$ である. n 階の微係数 $\phi_j^{(n)}(0)$ は, 定数部分を $\gamma_r^{(n)}$ とおいてまとめると

$$\phi_j^{(n)}(0) = {c_1}^n \phi_{j-1}^{(n)}(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \gamma_r^{(n)} \phi_{j-1}^{(r)}(0), \qquad \gamma_r^{(n)} \equiv \sum_{\substack{q_1+\cdots+q_r=n \\ 0<q_r\leqslant\cdots\leqslant q_1}} C(q_1,\ldots,q_r) c_{q_1} c_{q_2} \cdots c_{q_r} \tag{10}$$

と書ける. (9) と (10) を用いれば, $a_{j,m}^{(n)}(0)$ は次のように変形される;

$$\begin{aligned}
a_{m,j}^{(n)}(0) &= \phi_j^{(n)}(0) + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^{(m)} \phi_{j-i}^{(n)}(0) \\
&= \left({c_1}^n \phi_{j-1}^{(n)}(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \gamma_r^{(n)} \phi_{j-1}^{(r)}(0) \right) + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^{(m)} \left({c_1}^n \phi_{j-i-1}^{(n)}(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \gamma_r^{(n)} \phi_{j-i-1}^{(r)}(0) \right) \\
&= {c_1}^n \left(\phi_{j-1}^{(n)}(0) + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^{(m)} \phi_{j-1-i}^{(n)}(0) \right) + \sum_{r=1}^{n-1} \gamma_r^{(n)} \left(\phi_{j-1}^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^{(m)} \phi_{j-1-i}^{(r)}(0) \right) \\
&= {c_1}^n a_{m,j-1}^{(n)}(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \gamma_r^{(n)} a_{m,j-1}^{(r)}(0) . \qquad (11)
\end{aligned}$$

(7) を n 階微分した式に (11) を代入すると

$$a_{m+1,j}^{(n)}(0) = ({c_1}^n - {c_1}^m) a_{m,j-1}^{(n)}(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \gamma_r^{(n)} a_{m,j-1}^{(r)}(0) \qquad (12)$$

を得る. ここで, $a_{m,j}(x) = O(x^m)$ を仮定する. すなわち,

$$\begin{cases} a_{m,j}^{(n)}(0) = 0, & n < m, \\ a_{m,j}^{(n)}(0) \neq 0, & n = m \end{cases}$$

とする. (12) と条件 $c_1 \neq \pm 1$ を用いれば,

$$\begin{cases} a_{m+1,j}^{(n)}(0) = 0, & n < m+1, \\ a_{m+1,j}^{(n)}(0) \neq 0, & n = m+1 \end{cases} \qquad (13)$$

が示される. ゆえに, $a_{m+1,j}(x) = O(x^{m+1})$ を得る. よって, 任意の自然数 m に対して $a_{m,j}(x) = O(x^m)$ となる.

一方, $b_{m,j}(x)$ については, (8),(11),(13) と $c_1 \neq \pm 1$ より,

$$\begin{cases} b_{m,j}^{(n)}(0) = 0, & n < m, \\ b_{m,j}^{(n)}(0) = ({c_1}^m - 1)^2 a_{m,j}^{(m)}(0) \neq 0, & n = m \end{cases}$$

が求まり, $b_{m,j}(x) = O(x^m)\ (m = 1, 2, \dots)$ を得る.

集合 S_n を置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_{n-1} \end{pmatrix}$ の全体とする. $a_{m,j}(x) = O(x^m), b_{m,j}(x) = O(x^m)$ を用いれば,

$$\begin{aligned}
A_k(x) &= \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,i_0} a_{2,1+i_1} \cdots a_{k+1,k+i_k} = O(x^{(k+1)(k+2)/2}), \\
B_k(x) &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot b_{1,i_0} b_{2,1+i_1} \cdots b_{k,k-1+i_{k-1}} = O(x^{k(k+1)/2})
\end{aligned}$$

を得る. よって, $\Phi_k(x) = O(x^{k+1})$ が示された. 以上より, k 次 Shanks 変換を用いた反復解法は, $\phi'(\alpha) \neq 0, \pm 1$ のとき, $k+1$ 次収束する. □

定理 1 では単純な反復関数 $\phi(x)$ が 1 次収束する場合を扱った. $\phi(x)$ が 2 次収束する場合としては, 例えば, 非線形方程式 $f(x) = 0$ を Newton 法の反復関数を用いて $x = \phi(x), \phi(x) \equiv x - f(x)/f'(x)$ と変形する場合が考えられる. このとき次の定理を得る.

定理 2. $\phi(x)$ が $C^{(k+2)2^{k-1}}$ 級であり, かつ $\phi'(\alpha) = 0, \phi''(\alpha) \neq 0$ ならば, k 次 Shanks 変換を用いた反復法 (6) により定まる数列 x_n は α に少なくとも $(k+2)2^{k-1}$ 次収束する.

証明. 定理 1 と同様に解を $x = 0$ と仮定する. $\phi_j(x)$ の Taylor 係数 $\phi_j^{(n)}(0)$ を計算する. (10) と条件 $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ より,

$$\begin{cases} \phi_j^{(n)}(0) = 0, & n < 2^j - 1, \\ \phi_j^{(n)}(0) \neq 0, & n = 2^j \end{cases}$$

が求まる. これより, $\phi_j(x) = O(x^{2^j}), \Delta^2\phi_j(x) = O(x^{2^j})$ を得る. Hankel 型行列式

$$A_k(x) = \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \phi_{i_0}\phi_{1+i_1}\phi_{2+i_2}\cdots\phi_{k+i_k}$$

の各項の主要項 $\phi_{i_0}\phi_{1+i_1}\cdots\phi_{k+i_k} = O(x^{2^{i_0}+\cdots+2^{k+i_k}})$ のうち最も次数が小さい項が $A_k(x)$ の主要項となる. $i_0 = k, i_1 = k-1, i_2 = k-2, \ldots, i_k = 0$ のとき最低次数となるから, $A_k(x) = O(x^{(k+1)2^k})$ を得る. 同様にして $B_k(x) = O(x^{k2^{k-1}})$ が求まり, $\Phi_k(x) = O(x^{(k+2)2^{k-1}})$ が示される. 以上より, $\phi'(\alpha) = 0, \phi''(\alpha) \neq 0$ のとき k 次 Shanks 変換による反復解法は $(k+2)2^{k-1}$ 次収束する. □

5 数値計算例

前節の定理 1,2 で証明した収束次数を次の例題 1,2 を用いて数値的に示す. 例題 3 では, Kepler 方程式における収束するパラメータの範囲や計算量の評価を行う.

非線形方程式

$$f(x) \equiv e^{-x} - x = 0, \qquad \alpha = 0.567143290409781041 29\ldots$$

を考える. しかし, 方程式は $x = \phi(x)$ の形でなければならないので, 例題 1 では $\phi(x) \equiv f(x) + x$ と定め, 例題 2 では Newton 法の反復関数 $\phi(x) \equiv x - f'(x)/f(x)$ を利用する.

例題 1.

$$\phi(x) \equiv e^{-x} = x.$$

例題 2.

$$\phi(x) \equiv x + \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1} = x.$$

例題 1,2 は定理 1,2 の条件をそれぞれ満足する. 単純な反復法 (1) と新しい反復解法 (6) の $k = 1, 2, 3, 4$ の場合をそれぞれ用いて数値解法を行う. 任意多倍長精度の計算が

必要なため *Mathematica* を利用する．初期値は $x_0 = 0$ とし，反復計算の終了条件には $|f(x_{n^*})| < 10^{-1000}$ を採用する．

$$\log_{10}\left|\frac{x_2 - x_{n^*}}{x_1 - x_{n^*}}\right| \Big/ \log_{10}\left|\frac{x_1 - x_{n^*}}{x_0 - x_{n^*}}\right| \tag{14}$$

を収束次数の近似値とする．表 1,2 に示すように，この近似値は定理 1,2 で示した収束次数の理論値によく合っている．

表 1. 例題 1 における反復回数と収束次数

	反復回数 n^*	収束次数	
		近似値 (14)	理論値
単純な反復法 (1)	4059	1.00†	1
Steffensen の反復法 (2)	10	2.14	2
新しい反復法 (6), $k=2$	7	3.09	3
新しい反復法 (6), $k=3$	5	4.06	4
新しい反復法 (6), $k=4$	4	5.05	5

† x_{10}, x_{11}, x_{12} と x_{n^*} を用いて計算

表 2. 例題 2 における反復回数と収束次数

	反復回数 n^*	収束次数	
		近似値 (14)	理論値
Newton 法	11	2.06	2
新しい反復法 (6), $k=1$	7	3.11	3
新しい反復法 (6), $k=2$	4	8.05	8
新しい反復法 (6), $k=3$	3	20.04	20
新しい反復法 (6), $k=4$	2	‡	48

‡ $x_2 = x_{n^*}$ となるため計算不能

例題 3. Kepler 方程式

$$f(x) \equiv x - l - e\sin(x) = 0$$

を解く．ただし，パラメータ l と e は

$$\begin{cases} l = \dfrac{\pi}{180} \times i, & i = 0, 1, \ldots, 180, \\ e = 0.01 \times j, & j = 0, 1, \ldots, 100 \end{cases}$$

の範囲に設定する．

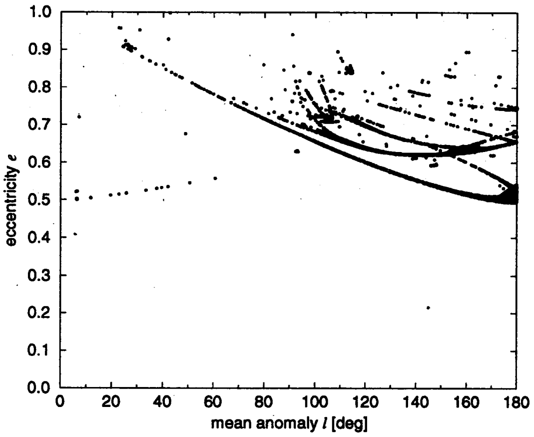
関数 $\phi(x)$ を $\phi(x) \equiv l + e\sin(x)$ と定め，単純な反復法 (1), Steffensen の反復法 (2) と新しい反復法 (6) の $k = 3$ の場合を用いて反復計算を行う．さらに，$\phi(x) \equiv x - f(x)/f'(x)$ とおき直し，Newton 法による反復計算も行う．精度は倍精度とする．初期値は $x_0 = l$ とし，終了条件には $|f(x_{n*})| < 10^{-13}$ を用いる．

単純な反復法は全ての l と e について収束するが，その他の方法では，図 2 で示すパラメータのとき収束しない．Newton 法より Steffensen 型の反復法の方が，より多くのパラメータの組合せについて解に収束することが分かる．

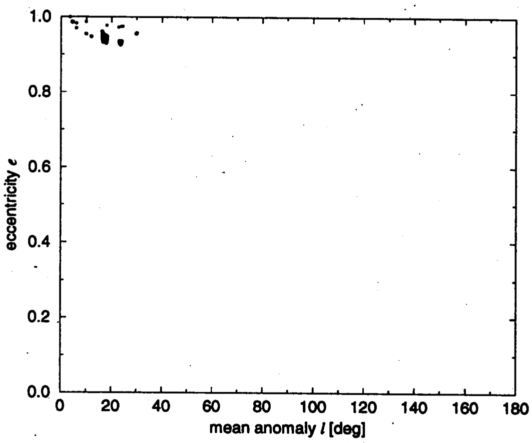
次に, 計算量を評価する. 各方法の反復回数の平均, 最大回数を表 3 に示す. また, 総計算量は ε–アルゴリズムよりも写像 ϕ の回数に大きく依存するため, これも表に記す. ただし, 表には収束しない場合は除いてある. 写像 ϕ の平均回数をみれば, 新しい反復法は他の方法よりも多くの計算を必要としている. しかし, 例えば, $l = 18\pi/180, e = 0.95$ のときには, 新しい反復法の計算量は Newton 法や Steffensen の反復法と比べて少ないと考えられる.

表 3. 例題 3 における反復回数と写像 ϕ の回数

	反復回数		写像 ϕ の回数	
	平均	最大	平均	$l = \frac{18\pi}{180}, e = 0.95$
単純な反復法 (1)	45.49	2903	45.49	33
Newton 法	10.01	900	10.01	30
Steffensen の反復法 (2)	3.85	30	11.55	90
新しい反復法 (6), $k = 3$	1.84	10	12.88	21



(a) Newton 法



(b) Steffensen の反復法
新しい反復法 $k = 3$

図 2. 例題 3 において反復が収束しないパラメータ l, e の組合せ

6 結論

本稿では, 非線形方程式 $x = \phi(x)$ に用いられる Steffensen の反復法の拡張を行った. k 次 Shanks 変換を反復関数の定義に利用することで, 高次収束する反復解法を定式化した. 新しい反復解法は導関数を必要としない反復法であり, 局所収束性に関して以下の定理が導かれた. k 次 Shanks 変換による反復法は, $\phi'(\alpha) \neq 0, \pm 1$ のとき $k+1$ 次収束する (定理 1). $\phi'(\alpha) = 0, \phi''(\alpha) \neq 0$ のときには $(k+2)2^{k-1}$ 次収束する (定理 2). また, Kepler 方程式について新しい反復解法は Newton 法に比べて広い範囲のパラメータに対して正しく解に収束すること, Steffensen の反復法より計算量が減少するケースがあることが確かめられた.

なお, 本研究集会後, 長田直樹先生により, 数列の加速法を利用した反復解法のいくつかが [2] において紹介されているとの指摘を受けた. [2] の文献によると本稿と同様な反復解法は [5] で論じられているようである.

謝辞

本研究に対して,有意義な議論や助言を頂戴した長田直樹先生(日本女子大学文理学部),田邊國士先生(統計数理研究所),吉田春夫先生(国立天文台),研究発表の機会をいただいた主催者の先生方に感謝したい.なお,本報告の結果の一部は中村を研究代表とする文部省科学研究費 08211106, 08874013, 09440077, 09559011 の援助を得てなされた.

参考文献

[1] A. C. Aitken, On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **46** (1926), 289–305.

[2] C. Brezinski and M. R. Zaglia, Extrapolation Methods: Theory and Practice, North-Holland 1991.

[3] J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's method, SIAM Rev. **36** (1994), 272–276.

[4] P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[5] A. Iserles, Complex dynamics of convergence acceleration, IMA J. of Numer. Anal. **11** (1991), 205–240.

[6] 近藤弘一, 中村佳正, ニュートン・ステファンセン・シャンクス, 京都大学数理解析研究所講究録 **1020** (1997), 28–38.

[7] A. M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, New York, 1966.

[8] D. Shanks, Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences, J. Math. and Phys. **34** (1955), 1–42.

[9] J. F. Steffensen, Remarks on iteration, Skand. Aktuar Tidskr. **16** (1933), 64–72.

[10] J. F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice-Hall, 1964.

[11] P. Wynn, On a device for computing the $e_m(S_m)$ transformation, Math. Tables Aids Comput. **10** (1956), 91–96.

近藤 弘一
e-mail: `kon@sigmath.es.osaka-u.ac.jp`
中村 佳正
e-mail: `naka@sigmath.es.osaka-u.ac.jp`