Title	一般化された価値と費用をもつ縄張りのゲーム (決定理論とその関連分野)
Author(s)	寺岡, 義伸; 北條, 仁志
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1043: 241-249
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/62107
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1043巻 1998年 241-249

一般化された価値と費用をもつ縄張りのゲーム

大阪府大総科　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
大阪府大総科　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)

1. 問題とモデル

ここで扱う問題は，2個の動物がある縄張りの独占を意図して対立する現象の理論的説明づけから示唆されたゲームであり，対立する2企業間の新製品の独占をめぐる競争や広告の問題といった市場内の対立に応用できるゲームである。

2人のプレーヤ (Player I, II) がある縄張りをめぐって対立する。その対立とは，その縄張りを独占するための努力を投入し，その努力投入をどこまで維持できるかということである。$[0, \infty)$ の中で長く維持できた方のプレーヤがその縄張りを独占できる。この縄張りの時刻 $t \in [0, \infty)$ における価値はプレーヤによって異なり Player i にとっては $v_i(t) \geqq 0$, $i = 1, 2$, となっている。そして勝者は独占できた時点以後価値の総和を入手できることになる。しかしながら，Player i が時刻 t まで努力投入を維持するためには $H_i(t)$ の累積費用

を使わなければならない。各プレーヤにとっては，どの時点まで努力投入を維持すべきかを考えなければならない。

この種の問題にあっては，プレーヤにとって利用できる情報様式に2つの型がある。各プレーヤが相手プレーヤの行動を常に観測でき，どの時刻においても相手がまだ努力投入を続けているのかもう既に断念してしまったのかが情報として知らされる場合をNoisy型とよび，反対に相手が情報防護を行い，相手がもう断念してしまったのかまだ頑張っているのかについては，縄張りを独占できた時点ではじめて知らされる場合をSilent型とよぶ。

後の議論のため，以下のような仮定を設ける。

(1) 各プレーヤにとって許された行動区間は $[0,\infty)$。

(2) Player i にとっての縄張りの価値は，上に有界な連続関数であって，$0 \leqq v_i(t) < \infty$, $t \in [0,\infty)$，かつ $\int_0^\infty v_i(t)dt < \infty$。

(3) $V_i(x) = \int_x^\infty v_i(t)\,dt$ とおく。したがって $V(x)$ は $[0,\infty)$ 上で連続的微分可能，$V(0) > 0$，$V(\infty) = 0$，かつ $V(t) \geqq 0$, $t \in [0,\infty)$。

(4) Player i の累積費用関数 $H_i(t)$ は $[0,\infty)$ 上で連続的微分可能で，$H(0) = 0$ かつ $h(t) = H'(t) > 0$ $t \in (0,\infty)$，さらに $H_i(t) \nearrow \infty$ as $t \nearrow \infty$ としておく。

次に $[0,\infty) \times [0,\infty)$ 上の実数値関数 $M_i(x,y)$ に対して Player I と II が混合戦略として $[0,\infty)$ 上の cdf's $F(x)$ と $G(y)$ を用い

ときの期待値として

$$M_i(F,y)=\int_0^{\infty}M_i(x,y)dF(x)\ ;\quad M_i(x,G)=\int_0^{\infty}M_i(x,y)dG(y),$$

$$M_i(F,G)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}M_i(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$$

という記法を使用する。さらに

$$r_i=\sup\{t\mid V_i(t)>0\}$$

$$\theta_i(z)=\exp\left[-\int_0^{z}\{h_i(t)/V_i(t)\}dt\right]$$

とおく。

2. Silent Game

ここでは，両プレーヤ共互いに相手の行動が観測できない状態にあり，$[0,\infty)$のどの時点まで努力投入をするかをあらかじめ決定し，自分の決めた計画時刻が実現されてみてはじめて，自分が勝者となり得たのかそうでないのかが知らされる場合を扱う。Player I とIIの純戦略をそれぞれ$x\in[0,\infty)$と$y\in[0,\infty)$とする。そうするとこの場合のPlayer i への期待利得を$M_i(x,y)$とすると次のようになる。

$$(2.1)\quad M_1(x,y)=\begin{cases}-H_1(x), & x\leqq y\\ V_1(x)-H_1(x), & x>y\end{cases}\quad ;$$

$$(2.2)\quad M_2(x,y)=\begin{cases}-H_2(y), & y\leqq x\\ V_2(y)-H_2(y), & y>x\end{cases}.$$

上記の非0和無限ゲームに対して，純戦略の中で平衡戦略

は存在しない。そこでⅠとⅡはそれぞれ次のようなクラスのcdfs $F(x)$ と $G(y)$ を混合戦略として用いるものとする：

$F(x)$ はある区間 $(0, u) \subset (0, r_1)$ 上の density part $f(x)>0$ と点 $x=0$ での mass part $\alpha_1 \geqq 0$ および点 $x=u$ での mass part $\beta_1 \geqq 0$ から構成される。他方 $G(y)$ は同じ区間 $(0, u)$ 上の density part $g(y)>0$ と点 $y=0$ での mass part $\alpha_2 \geqq 0$ および点 $y=u$ での mass part $\beta_2 \geqq 0$ から構成される。

そうすると 次のような関係を得る：

$$M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha_1 \cdot 0, & y=0 \\ V_2(y)F(y) - H_2(y), & 0<y<u \\ (1-\beta_1)V_2(u) - H_2(u), & y=u \\ V_2(y) - H_2(y), & y>u \end{cases} ;$$

$$M_1(x, G) = \begin{cases} \alpha_2 \cdot 0, & x=0 \\ V_1(x)G(x) - H_1(x), & 0<x<u \\ (1-\beta_2)V_1(u) - H_1(u), & x=u \\ V_1(x) - H_1(x), & x>u \end{cases} .$$

u_i を方程式 $V_i(t) - H_i(t) = 0$ の $[0, \infty)$ での唯一根とし，今 $u_1 \leqq u_2$ とする。そこで $u = u_1$ とおき，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ および $\beta_1 = \{V_2(u) - H_2(u)\} / V_2(u)$; $\beta_2 = 0$ として

$$F^0(x) = \begin{cases} \{H_2(x)/V_2(x)\}, & 0<x<u \\ 1, & x \geqq u \end{cases} ;$$

$$G^{0}(y)=\begin{cases}\{H_1(y)/V_1(y)\}, & 0<y<u\\ 1, & y\geqq u,\end{cases}$$

と選ぶと次式が得られる。

$$M_2(F,y)=\begin{cases}0, & 0\leqq y\leqq u\\ V_2(y)-H_2(y), & y>u\end{cases};$$

$$M_1(x,G)=\begin{cases}0, & 0\leqq x\leqq u\\ V_1(x)-H_1(x), & x>u.\end{cases}$$

以上をまとめて次の定理を得る.

定理1. u_iを方程式 $V_i(t)-H_i(t)=0$ の $[0,\infty)$ における唯1つの根とし, $u=\min(u_1,u_2)$ とする。そうすると

$$F^{0}(x)=\begin{cases}\{H_2(x)/V_2(x)\}, & 0<x<u\\ 1, & x\geqq u\end{cases};$$

$$G^{0}(y)=\begin{cases}\{H_1(y)/V_1(y)\}, & 0<y<u\\ 1, & y\geqq u,\end{cases}$$

ここに点uでの mass parts β_1とβ_2はそれぞれ

$$\beta_1=\max\left\{0,\frac{V_2(u)-H_2(u)}{V_2(u)}\right\};\quad \beta_2=\max\left\{0,\frac{V_1(u)-H_1(u)}{V_1(u)}\right\},$$

によって与えられる混合戦略の対 $(F^{0}(x),G^{0}(y))$ は

$$M_1(F,G^{0})\leqq M_1(F^{0},G^{0})$$

$$M_2(F^{0},G^{0})=0$$

を満足する。

3. Noisy Game

ここでは，両プレーヤ共互いに相手の行動が観測できない状態にあり，一方のプレーヤが断念した瞬間に他方の勝点が確定する場合を扱う。ここでも前節と同様に両者が同時にあきらめた場合は両者ともこの縄張りを放棄したものとする。

Player IとIIの純戦略をそれぞれ $x\in[0,\infty)$，$y\in[0,\infty)$ とし，$M_i(x,y)$ を Player i への期待利得とすると

$$(3.1)\quad M_1(x,y)=\begin{cases}-H_1(x), & x\leqq y,\\ \sup_{x>y}\{V_1(x)-H_1(x)\}=V_1(y)-H_1(y), & x>y;\end{cases}$$

$$(3.2)\quad M_2(x,y)=\begin{cases}-H_2(y), & y\leqq x\\ \sup_{y>x}\{V_2(y)-H_2(y)\}=V_2(x)-H_2(x), & y>x.\end{cases}$$

このゲームも純戦略の中に平衡戦略は存在しない。そこで，IとIIはそれぞれ以下のクラスの cdfs $F(x)$，$G(y)$ を混合戦略として用いることにする。

$F(x)$ は点 $x=0$ での mass part $\alpha_1\geqq 0$，$(0,r)$ 上の density part $f(x)>0$，そして点 $x=r$ での mass part $\beta_1\geqq 0$ より構成され，他方 $G(y)$ は点 $y=0$ での mass part $\alpha_2\geqq 0$，同じ区間 $(0,r)$ 上の density part $g(y)>0$，そして点 $y=r$ での mass part $\beta_2\geqq 0$ より構成される。

そうすると

$$\begin{cases}\alpha_1\cdot 0, & y=0\end{cases}$$

$$M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha_1 V_2(0)+\int_0^y\{V_2(x)-H_2(x)\}f(x)dx-H_2(y)\{1-F(y)\}, & 0<y<r\ ;\\ \alpha_1 V_2(0)+\int_0^r\{V_2(x)-H_2(x)\}f(x)dx-\beta_1 H_2(r), & y=r\\ \alpha_1 V_2(0)+\int_0^r\{V_2(x)-H_2(x)\}f(x)dx+\beta_1\{V_2(r)-H_2(r)\}, & y>r\end{cases}$$

$$M_1(x,G)=\begin{cases}\alpha_2\cdot 0 & x=0\\ \alpha_2 V_1(0)+\int_0^x\{V_1(y)-H_1(y)\}g(y)dy-H_1(x)\{1-G(x)\}, & 0<x<r\\ \alpha_2 V_1(0)+\int_0^r\{V_1(y)-H_1(y)\}g(y)dy-\beta_2 H_1(r), & x=r\\ \alpha_2 V_1(0)+\int_0^r\{V_1(y)-H_1(y)\}g(y)dy+\beta\{V_1(r)-H_1(r)\}, & x>r\ 。\end{cases}$$

ここで、$\frac{d}{dy}M_2(F,y)=0$ for $y\in(0,r)$ とおくと

$$f(y)/\{1-F(y)\}=h_2(y)/V_2(y) \quad \text{for } y\in(0,r)$$

が得られ、したがって

$$f(x)=k\{h_2(x)/V_2(x)\}\theta_2(x),\quad x\in(0,r)$$

を得る。また $\alpha_1+\int_0^r f(x)dx+\beta_1=1$ であるから

$$F^0(x)=\begin{cases}\alpha_1, & x=0\\ 1-(1-\alpha_1)\theta_2(x), & 0<x<r\\ 1, & x\geqq r\ ,\end{cases}$$

ここに $\beta_1=1-F(r-0)$, $\theta_2(x)=\exp[-\int_0^x\{h_2(t)/V_2(t)\}dt]$。

この時

$$M_2(F^0,y)\begin{cases}=0, & y=0\\ =\alpha V_2(0), & 0<y<r\\ <\alpha V_2(0), & y\geqq r\ 。\end{cases}$$

$G(x)$についてもまったく同様の議論が成り立つ。

定理2. 方程式 $V_1(z)=0$, $V_2(z)=0$ の $(0,\infty)$ における唯1つの根をそれぞれ r_1, r_2 とし, $r=\min(r_1, r_2)$ とする。Player I と II の混合戦略をそれぞれ cdf $F^0(x), G^0(y)$:

$$F^0(x)=\begin{cases} 1-\theta_2(x), & 0<x<r \\ 1, & x\geqq r \end{cases};$$

$$G^0(y)=\begin{cases} 1-\theta_1(y), & 0<y<r \\ 1, & y\geqq r \end{cases}$$

とすると, 次の関係が成立する:

$$\begin{cases} M_1(F,G^0)\leqq M_1(F^0,G^0)=0, & \forall F \\ M_2(F^0,G)\leqq M_2(F^0,G^0)=0, & \forall G. \end{cases}$$

注: 上の定理は1つの結果である。しかしこのゲームは Noisy 型である。そこで $V_1(t)-H_1(t)=0$ の根を u_1, $V_2(t)-H_2(t)=0$ の根を u_2 とし, $u_1>u_2$ であると仮定し, Player I が常に $y+\varepsilon$ まで待つという戦略を用いるとすると

$$\begin{cases} M_1(y+\varepsilon,y)=V_1(y+\varepsilon)-H_1(y+\varepsilon) \\ M_2(y+\varepsilon,y)=-H_2(y)<0 \end{cases}$$

が成立する。また $u_2<t<u_1$ を満すtに対して

$$\begin{cases} V_1(t)-H_1(t)>0 \\ V_2(t)-H_2(t)<0 \end{cases}$$

が得られる。したがって Player II にとってみれば自分の利

得を最大にしようとするなら、例え勝ってもu_2以後まで待つのは良い選択とはいえない。その上 Iが常に$y+\varepsilon$なる戦略を用いると常に負けて$H_2(y)$を失う。結局

$$\text{I は } x^0 = y+0 \quad ; \quad \text{II は } y^0 = 0$$

と選ぶと

$$\begin{cases} M_1(t, y^0) = M_1(x^0, y^0) = v(0) \\ M_2(x^0, y) = -H_2(y) \leqq M_2(x^0, y^0) = 0 \end{cases}$$

という結果を得る。Player II にとっては面白くない戦略となってくる。

参考文献

Y. Teraoka & Y. Yamada : Games of production developement in manufacturing, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems Vol. 445, 58-67 (1997).