京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	Block Normを用いた配置問題の商品開発への応用 (決定理論とその関連分野)
Author(s)	金, 正道; 久志本, 茂
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1043: 114-121
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/62124
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
1043 巻 1998 年 114-121

Block Norm を用いた配置問題の商品開発への応用

金 正道（金沢大・自然科学）
久志本 茂（金沢大・教育）

Abstract

n 個の対象に対して p 個の特性について測られた p 種類の特性値からなる多変量データを解析するとき、個体間の距離を定義して多変量解析などの手法を用いて分析することが多い。距離としては分析の手法,データの種類によってさまざまな距離が用いられている。また、実際の多変量データを解析するとき、次元 p が大きいときは元の多変量データに対して主成分分析を行ない次元を下げて分析を進めることもよく行なわれる。本報告では、元の多変量データに対して主成分分析を用いて次元を下げたデータに対し、距離としては block norm を用いて配置問題である Multicriteria Problem を商品開発の例で考える。

1 はじめに

平面において n 個の需要点 $\boldsymbol{y}_i \in \boldsymbol{R}^2$, $i = 1, 2, \cdots, n$ と block norm $\|\cdot\|$ が与えられているとする。このとき新たに単一の施設を配置しようとすることを考える。$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ を新たに配置する施設を表す変数とするとき、Multicriteria Problem（MCP） は次のように定式化される。

$$\text{(1)} \qquad \min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2} (\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_1\|, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_2\|, \cdots, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_n\|)$$

MCP は efficient point または quasiefficient point を求める配置問題で、この定式化は配置する施設が公共の施設の場合に用いられる。上のような配置問題を考えるとき需要点は施設の利用者の位置であり、ノルムは道路距離の近似である。需要点の集合を $Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n\}$ とする。

定義 1 *efficient*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : \textit{efficient} \\
&\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \\
&\nexists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2 \\
&\text{s.t. } \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_i\| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_i\|,\ i = 1, \cdots, n \\
&\qquad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_j\| < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\| \quad \text{for some } j
\end{aligned}$$

$E(Y)$ をすべての efficient points の集合とする。

定義 2 *alternately efficient*

efficient point $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} : \textit{alternately efficient} \\
&\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \\
&\exists \boldsymbol{y} \ne \boldsymbol{x} \\
&\text{s.t. } \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_i\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_i\|,\ i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

$AE(Y)$ をすべての alternately efficient points の集合とする。

定義 3 *strictly efficient*

efficient point $\boldsymbol{x}$ が alternately efficient でないとき strictly efficient という。

$SE(Y)$ をすべての strictly efficient points の集合とする。

定義 4 *quasiefficient*

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : \textit{quasiefficient}\\ &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\\ &\nexists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2\\ &\text{s.t. } \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_i\| < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_i\|,\ i=1,\cdots,n\end{aligned}$$

$QE(Y)$ をすべての quasiefficient points の集合とする。定義より明らかに $Y \subset SE(Y) \subset E(Y) \subset QE(Y)$ である。すべての efficient points（strictly, alternately, quasiefficient）を求める計算量の意味で最適なアルゴリズムは M. Kon[2] において与えられている。本論文では efficient points を考える。

一方、さまざまな距離やノルムを用いた MCP が考えられている [1,2,4,6,8]。例えば、ℓ_1 距離（直角距離）[1,8], ℓ_p 距離 [8], one-infinity norm[6], block norm[2,4] が用いられている。しかし、実際の施設の配置の問題以外に応用はほとんどない。

本論文では、既製服市場における商品開発を block norm を用いた MCP を使って考える。多変量データを考える。多変量データはいくつかの変数の得点の組をもった新商品の候補と消費者からなる。ただし、同じ単位で測られている。商品の得点はその商品の特性を表し、消費者の得点は消費者の好みを表す。このデータに対して分散・共分散行列から主成分分析を行い、第二主成分までを考える。これらの主成分からなる $\boldsymbol{R}^2$ において block norm を用いた MCP を考える。このとき需要点は消費者の主成分得点である。また、block norm は主成分のもとの変数への回帰係数を用いて主成分分析によって失われた情報を補うように定められる。Efficient set $E(Y)$ は the Stairs Algorithm[2] によって求めることができる。もし、商品 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ が efficient でなかったら、$\boldsymbol{x}$ より望ましい efficient な商品 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在するということである。おそらく、消費者は自分の好みに近い商品を買うので efficient な商品 $\boldsymbol{y}$ は efficient でない商品 $\boldsymbol{y}$ より売れると予想される。ゆえに、 efficient set $E(Y)$ は売れる商品の集合とみなすことができる。新商品の候補で efficient でないものは efficient であるような商品で修正コストが最小になるように修正する。このような修正された商品を求める反復法を用いたアルゴリズムも提案する。

2 節において、block norm の基本的性質を与え、3 節において block norm を用いた MCP の既製市場における商品開発への応用を考える。

2 Block Norm

本節では、記号を準備し、block norm の定義とその基本的な性質を与える。

$B \subset \boldsymbol{R}^2$ を原点を内部に含み、原点に対して対称で有界な凸多面体とする。

$$\boldsymbol{a}_j = (a_j^1, a_j^2),\ j = 1, 2, \cdots, 2m$$

を B の端点とし、$\boldsymbol{a}_{2m+1} = \boldsymbol{a}_1$ とする。各 $\boldsymbol{a}_j$ に対し α_j を次を満たす角度とする。

$$\boldsymbol{a}_j = \|\boldsymbol{a}_j\|_2(\cos\alpha_j, \sin\alpha_j)$$

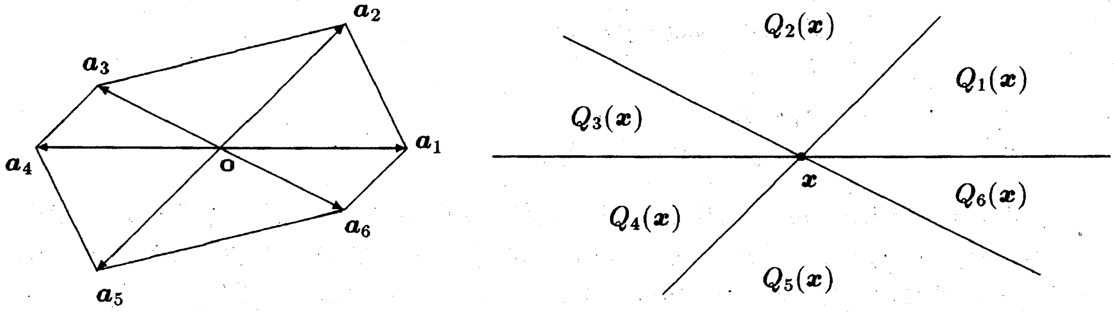
ここで $\|\cdot\|_2$ はユークリッドノルムである。また、

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \pi$$

であるとし、$\alpha_{m+j} = \pi + \alpha_j,\ j = 1, 2, \cdots, m$ とする。$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し

$$Q_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \mathcal{C}\{\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}\},\ j = 1, 2, \cdots, 2m$$

とする（図 1）。ここで $\mathcal{C}\{\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}\} = \{\lambda \boldsymbol{a}_j + \mu \boldsymbol{a}_{j+1} : \lambda, \mu \geq 0\}$ である。また、各 $Q_j(\boldsymbol{x})$ に対して $Q_j^-(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} - Q_j(\boldsymbol{x})$ とする。



Unit ball($m = 3$)

図 1.

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して block norm $\|\boldsymbol{x}\|$ は次のように定義される。

(2)
$$\|\boldsymbol{x}\| = \inf\{\mu > 0 : \boldsymbol{x} \in \mu B\}$$

これより B は単位円であり、$\|\cdot\| : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は凸関数である。また、$\|\boldsymbol{x}\|$ は次のように表すことができる [5,7]。

(3)
$$\|\boldsymbol{x}\| = \min\left\{\sum_{j=1}^{m} |\gamma_j| : \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \boldsymbol{a}_j\right\}$$

これによって $\|\boldsymbol{x}\|$ は原点から $\boldsymbol{a}_j,\ j = 1, , \cdots, 2m$ の方向のみを使って $\boldsymbol{x}$ まで行く最も短い道の長さと解釈できる。(3) より次の補題が得られる [2]。

補題 1 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2) \in Q_j(\mathbf{o})$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\| = \frac{x^1(a_{j+1}^2 - a_j^2) + x^2(a_j^1 - a_{j+1}^1)}{a_j^1 a_{j+1}^2 - a_{j+1}^1 a_j^2}.$$

補題 1 より $\|\cdot\|$ は各 $Q_j(\mathbf{o})$ 上 linear であり、次の補題を得る。

補題 2 $\boldsymbol{x} \in Q_j(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z} \in Q_{m+j}(\boldsymbol{y})$ である $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2), \boldsymbol{y} = (y^1, y^2), \boldsymbol{z} = (z^1, z^2)$ に対して

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|.$$

証明 一般性を失うことなく $\boldsymbol{y} = (0, 0)$ とする。補題 1 より次を得る。

$$\|\boldsymbol{x}\| = \frac{x^1(a_{j+1}^2 - a_j^2) + x^2(a_j^1 - a_{j+1}^1)}{a_j^1 a_{j+1}^2 - a_{j+1}^1 a_j^2}$$

$$\|\boldsymbol{z}\| = \frac{z^1(a_{m+j+1}^2 - a_{m+j}^2) + z^2(a_{m+j}^1 - a_{m+j+1}^1)}{a_{m+j}^1 a_{m+j+1}^2 - a_{m+j+1}^1 a_{m+j}^2}$$

$\boldsymbol{a}_{m+j} = -\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} \in Q_j(\mathbf{o})$ であるので補題 1 より次を得る。

$$\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{z}\| = \frac{(x^1 - z^1)(a_{j+1}^2 - a_j^2) + (x^2 - z^2)(a_j^1 - a_{j+1}^1)}{a_j^1 a_{j+1}^2 - a_{j+1}^1 a_j^2} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|.$$

よって、示された。 □

3 商品開発への応用

本節では、block norm を用いた MCP の応用として既製市場における商品開発を考える。

既製服市場のを考える。商品はいくつかの変数によって特徴づけられているとする。ある企業が新商品を開発しよとしていて、新商品の候補 A,B,C,D がある。これらの商品よりよい商品があるだろうか？次に、6 人の消費者に対して商品と同じ変数同じ単位で好みを測定した（表 1)。

表 1 好みに関するアンケート調査の結果

個体＼特性	x_1 シンプル	x_2 若々しい	x_3 女性的	x_4 普段着向	x_5 男性的	x_6 派手
商品 A	7	8	4	4	8	6
商品 B	1	1	7	2	5	9
商品 C	2	7	9	3	8	4
商品 D	3	5	5	4	8	5
消費者 1	9	9	6	9	9	2
消費者 2	1	7	1	5	8	7
消費者 3	8	5	5	7	6	3
消費者 4	2	3	5	1	7	8
消費者 5	1	4	8	4	3	5
消費者 6	3	8	9	6	3	1
平均	3.7	5.7	5.9	4.5	6.5	5.0
標準偏差	3.09	2.54	2.47	2.37	2.17	2.58

この結果に対して分散・共分散行列から主成分分析を行なったところ次のような結果を得た。

表 2 主成分得点

個体	(z_1:第一主成分, z_2:第二主成分)
商品 A	$(7.99, -5.35) = \boldsymbol{y}_A$
商品 B	$(-1.53, -1.68) = \boldsymbol{y}_B$
商品 C	$(4.98, 0.02) = \boldsymbol{y}_C$
商品 D	$(4.73, -3.32) = \boldsymbol{y}_D$
消費者 1	$(13.90, -2.89) = \boldsymbol{y}_1$
消費者 2	$(4.11, -6.56) = \boldsymbol{y}_2$
消費者 3	$(9.65, -2.28) = \boldsymbol{y}_3$
消費者 4	$(0.30, -4.01) = \boldsymbol{y}_4$
消費者 5	$(2.29, 1.85) = \boldsymbol{y}_5$
消費者 6	$(8.03, 3.88) = \boldsymbol{y}_6$
平均	$(5.45, -2.03)$
標準偏差	$(4.59, 3.20)$

$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_6$ は MCP を考えるときの需要点, すなわち $Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_6\}$, である。$\boldsymbol{y}_i$ は消費者 i の好みを表し、$\boldsymbol{y}_A$、$\boldsymbol{y}_B$、$\boldsymbol{y}_C$、$\boldsymbol{y}_D$ はそれぞれ商品 A,B,C,D を表す（図 3)。第二主成分までの累積寄与率は 0.80 である。第一主成分、第二主成分に対応する固有値、固有ベクトルは次のようになる。

表 3　固有値, 固有ベクトル

	z_1	z_2
x_1	0.58	−0.21
x_2	0.46	−0.02
x_3	−0.02	0.70
x_4	0.47	0.06
x_5	0.15	−0.53
x_6	−0.46	−0.43
固有値	21.09	10.25

また、各 x_j, z_k に対して x_j と z_k の相関係数は次のようになる。

表 4　相関係数

	z_1	z_2
x_1	0.86	−0.21
x_2	0.83	−0.03
x_3	−0.04	0.91
x_4	0.90	0.08
x_5	0.32	−0.77
x_6	−0.82	−0.53

この結果より、第一主成分はデザインのあり方、第二主成分は女性や男性へのアピールを表していると考えることができる。

次に block norm を定義する単位円 B を定める。まず、各 z_k, x_j に対して z_k の x_j への回帰係数を求めると次のようになる。

表 5　回帰係数

	$z_1 \quad z_2$
x_1	$(1.28, -0.22) = \boldsymbol{a}_1$
x_2	$(1.50, -0.03) = \boldsymbol{a}_2$
x_3	$(-0.07, 1.18) = \boldsymbol{a}_3$
x_4	$(1.75, 0.11) = \boldsymbol{a}_4$
x_5	$(0.68, -1.14) = \boldsymbol{a}_5$
x_6	$(-1.45, -0.66) = \boldsymbol{a}_6$

これを用いて $B = \mathcal{K}\{\pm\boldsymbol{a}_1, \pm\boldsymbol{a}_2, \cdots, \pm\boldsymbol{a}_6\}$ によって block norm を定義する (図 2)。ここで $S \subset \boldsymbol{R}^2$ に対して $\mathcal{K}S$ は S によって張られる凸包である。つまり 2 つの主成分に集約された空間で $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ を商品を表す点とると $\boldsymbol{x}$ と消費者 i の好みをあらわす点 $\boldsymbol{y}_i$ との距離 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i\|$ は主成分に影響多く与える特性を表すベクトル $\boldsymbol{a}_j$ だけを基準にして測った商品 $\boldsymbol{x}$ が消費者 i の好み $\boldsymbol{y}_i$ から離れている度合である。このように定めた block norm は主成分分析によって元のデータが集約されたとき損失した情報を補っていると考え

ることができる。

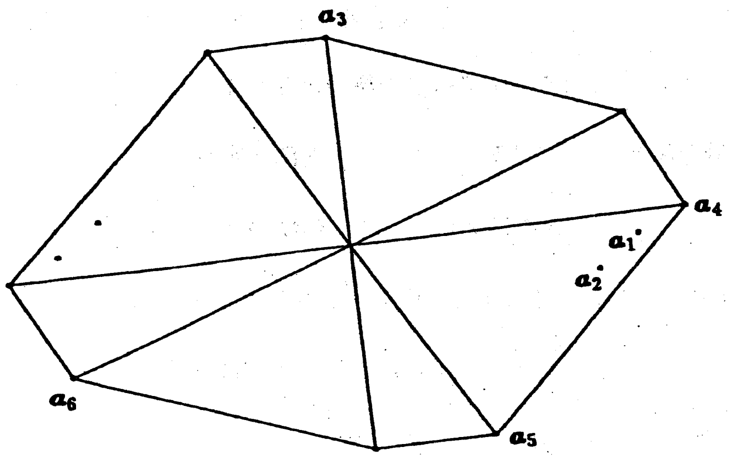


図 2　block norm を定義する単位円 B

図 3 は MCP を解いた結果である。

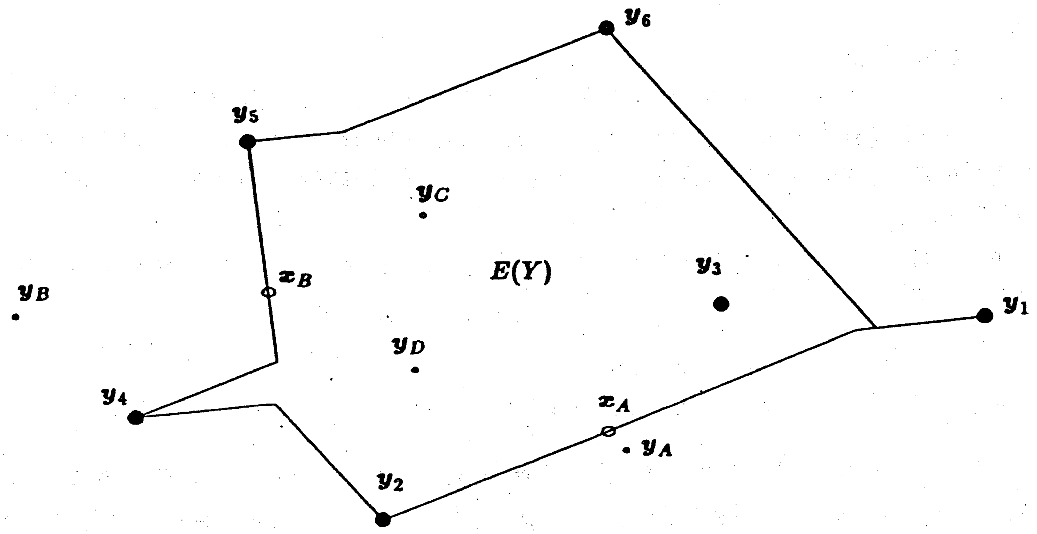


図 3　MCP の結果 $E(Y)$

上の結果より、商品 C,D は efficient であるが商品 A,B は efficient ではない。したがって、商品 A,B を修正する。ここで、商品 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に修正するためのコストを $c = c(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|)$ とし、c は $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ に関して狭義単調増加であると仮定する。商品 $\boldsymbol{y}_A$ を修正するとき、修正された商品 $\boldsymbol{x}_A \in E(Y)$ は修正コストが最小になるように決められる。商品 $\boldsymbol{y}_B$ に対しても同様に考える。平行移動によって、一般性を失うことなく $\boldsymbol{y} = \mathbf{o}$ とする。一般に、前節の Y と block norm に対して、考えるべき問題は次のようになる。

$$(4)\qquad \begin{array}{ll} \min & c(\|\boldsymbol{x}\|) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in E(Y) \end{array}$$

$c(\|\boldsymbol{x}\|)$ は $\|\boldsymbol{x}\|$ に関して狭義単調増加であるので (4) は次の問題と同値である。

$$\begin{array}{ll} \min & \|\boldsymbol{x}\| \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in E(Y) \end{array} \tag{5}$$

$E(Y)$ は有界閉集合である [2,4] ので問題 (5) には最適解が存在する。

定理 1 $\boldsymbol{x}^*$ を問題 (5) の最適解とし、$intE(Y)$ を $E(Y)$ の内部とする。

$$\mathbf{o} \notin E(Y) \Longrightarrow \boldsymbol{x}^* \notin intE(Y)$$

証明$\boldsymbol{x}^* \in intE(Y)$ と仮定する。このとき、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$\{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2 : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \varepsilon\} \subset E(Y) \tag{6}$$

である。また、ある j' に対して $\mathbf{o} \in Q_{j'}(\boldsymbol{x}^*)$ である。次に

$$\overline{\boldsymbol{x}} \in Q_{j'}(\boldsymbol{x}^*) \bigcap Q_{j'}^-(\mathbf{o}) \bigcap \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2 : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\| = \varepsilon\} \tag{7}$$

を考える。(6) より $\overline{\boldsymbol{x}} \in E(Y)$ であり、(9) より $\mathbf{o} \in Q_{j'}(\overline{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{x}^* \in Q_{j'}^-(\overline{\boldsymbol{x}})$ である。補題 2 より次を得る。

$$\|\boldsymbol{x}^*\| = \|\boldsymbol{x}^* - \overline{\boldsymbol{x}}\| + \| - \overline{\boldsymbol{x}}\| = \varepsilon + \|\overline{\boldsymbol{x}}\| > \|\overline{\boldsymbol{x}}\|$$

これは $\boldsymbol{x}^*$ の最適性に矛盾する。 □

$\mathbf{o} \in E(Y)$ のときは $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{o}$ である。$\mathbf{o} \in E(Y)$ 　であるかどうかは [2,4] における $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ が efficient であるための必要十分条件で調べることができる。The Stairs Algorithm[2] によって $E(Y)$ は多角形である $E(Y)$ の境界を表す点列によって与えられる。$\mathbf{o} \notin E(Y)$ のときは定理 1 より問題 (5) は次のような最近点問題に帰着される。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ 　で$\mathbf{o} \notin [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$, ここで $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = \{(1-\lambda)\boldsymbol{x}_1 + \lambda\boldsymbol{x}_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, であるとする。

$$\begin{array}{ll} \min & \|\boldsymbol{x}\| \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] \end{array} \tag{8}$$

この問題は次のアルゴリズムによって解ける。原点を通る $\boldsymbol{a}_j, j = 1, 2, \cdots, m$ 方向直線と $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$ との交点および $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を $\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ まで順番に $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_q$ とする。$f(\lambda) = \|(1-\lambda)\boldsymbol{x}_1 + \lambda\boldsymbol{x}_2\|, 0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $\boldsymbol{p}_i = (1-\lambda_i)\boldsymbol{x}_1 + \lambda_i\boldsymbol{x}_2, i = 1, 2, \cdots, q-1$ とし、λ_i における $f(\lambda)$ の右側微係数を $\partial_+ f(\lambda_i)$ とする。補題 1 より $\|\boldsymbol{x}\|$ は各 $[\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_{i+1}]$ 上で linear であり、$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$ 上 piecewise linear な凸関数である。

アルゴリズム

1. $r = 1$ とする。
2. $\partial_+ f(\lambda_r) > 0$ なら終了。 $\boldsymbol{p}_r$ が最適解である。$\partial_+ f(\lambda_r) = 0$ なら終了。 $\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}]$ が最適解である。$r = q-1$ なら終了。$\boldsymbol{p}_q = \boldsymbol{x}_2$ が最適解である。そうでなかったら $r = r+1$ とし Step 2 へ。

上のアルゴリズムより修正コストが最小になるような商品として$\boldsymbol{x}_A = (7.72, -4.90), \boldsymbol{x}_B = (2.49, -1.44)$ を得る（図 3)。

参考文献

[1] L. G. Chalmet, R. L. Francis and A. Kolen, *Finding Efficient Solutions for Rectilinear Distance Location Problems Efficiently*, Eur. J. Oper. Res., **6** (1981), 117-124.

[2] M. Kon, *Efficient Solutions for Multicriteria Location Problem under The Block Norm*, Math. Japonica, **47** (1999), to appear.

[3] 奥野 忠一, "続多変量解析法", 日科技連 (1976)

[4] B. Pelegrin and F. R. Fernandez, *Determination of Efficient Points in Multiple-Objective Location Problems*, Nav. Res. Logist. q., **35**(1988), 697-705.

[5] I. -F. Thisse, J. E. Ward and R. E. Wendell, *Some Properties of Location Problems with Block and Round Norms*, Oper. Res., **32**(1984), 1309-1327.

[6] J. E. Ward and R. E. Wendell, *Characterizing Efficient Points in Location Problems under the One-Infinite Norm*, in, J. -F. Thisse and H. G. Zoller, Eds., *Locational Analysis of Public Facilities*, North Holland , Amsterdam(1983), 413-429.

[7] J. E. Ward and R. E. Wendell, *Using Block Norms for Location Modeling*, Oper. Res., **33**(1985), 1074-1090.