Title	待ち行列への最適参入時期 (決定理論とその関連分野)
Author(s)	小柳, 淳二; 河合, 一
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1043: 92-97
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/62127
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1043 巻 1998 年 92-97

待ち行列への最適参入時期

鳥取大学工学部　小柳　淳二　(KOYANAGI Junji)
鳥取大学工学部　河合　一　(KAWAI Hajime)

1　はじめに

ある作業を行うため待ち行列に並ばなければいけない場合に，他にも作業を抱えている人は，他の作業を行いながら行列の様子を観測し，行列が短くなったときに行列に加わるという行動を取る場合がある．本研究ではこのような状況において総作業時間の最小化という観点から最適政策を考える．本研究で扱っているような状況としては、自分の机でできる仕事がいくつかあり、それとともに、共同で使用している、コピー機械のようなものを使用しなければいけない仕事を抱えている人が、最も早く仕事を終らせたいというような場合や遊園地などで、人気のあるアトラクションの行列が短くなるのを待ちながら他のアトラクションで楽しむなどといった状況が考えられる.

2　モデル

L 個の作業 A と 1 個の 作業 B をまかされている作業者がいるとする．作業 A は作業者専用の場所が存在し，任意の時間に処理を行うことができ，作業 1 つを処理する時間は一般分布 $G(x)$ （平均 γ^{-1}）にしたがっているものとする．作業 B を行うためには他の作業者と共同で利用している共有設備を使うことが必要であり，それが他の作業者によって使用されているとき，行列に並んで順番を待つことができるが、並んでいる間に作業 A を行うことはできないものとする．共有設備の使用時間は、平均処理時間 μ^{-1} の指数分布に従い，それを使用する人の到着率は行列長が i のとき λ_i であるとする．

作業者は作業 A を一つ処理するごとに共有設備を観測し，待ち行列に加わるかどうかを決定することができる．作業 A が残っているときに行列に加わることを決定したならば、作業 B を終えるまで共有設備に滞在し、作業 B の終了後、残りの作業 A を処理するものとする．ただし、作業 A を全て終えたときには作業者は、ただちに共有設備の待ち行列に加わるものとする．作業 A の残り数を l、共有設備の行列長を i として、(l,i) の組を状態と考え、2 種類の作業を終えるまでの総期待処理時間を最小にするように、共有設備に並ぶことを考える．

3　定式化

関数 $V(l,i)$ を最適総期待処理時間とすると、次の最適性方程式を満たす.

$$V(l,i)=\min\left\{\int_0^\infty\left(x+\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(x)V(l-1,j)\right)dG(x),l/\gamma+(i+1)/\mu\right\}\ (l\geq 1) \tag{1}$$

$$V(0,i)=(i+1)/\mu \tag{2}$$

ここで、 $P_{ij}(x)$ は行列長が i から x 時間後に j に変化する確率である．また， $Q_i(x)$ として,待ち行列人数が i の状態から x 時間後の期待人数，すなわち

$$Q_i(x)=\sum_{j=0}^{\infty} jP_{ij}(x)$$

を定義する．

ここで以下の仮定を置く

仮定 1

1. $\lambda_i \geq \lambda_j \ (i \leq j)$

$P_{ij}(x)$ と $Q_i(x)$ に以下の性質が成り立つ．

補題 1 任意の i, k, x に対して

1. $\displaystyle\sum_{j=k}^{\infty}[P_{i+1\,j}(x)-P_{ij}(x)] \geq 0,$
2. $Q_{i+1}(x)-Q_i(x) \leq 1.$

証明.

共有設備の出生死滅過程に一様化を用い $m_{ij}^{(n)}$ をその埋蔵マルコフ連鎖の n ステップ推移確率とすると $m_{ij}^{(n)}$ は以下であらわされる．

$$\Lambda=\lambda_0+\mu \tag{3}$$

$$m_{ij}^{(0)}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (\text{Otherwise}),\end{cases} \tag{4}$$

$$m_{ij}^{(1)}=\begin{cases}(\Lambda-\lambda_0)/\Lambda & (i=j=0)\\ (\Lambda-\mu-\lambda_i)/\Lambda & (j=i)\\ \mu/\Lambda & (j=i-1)\\ \lambda_i/\Lambda & (j=i+1)\\ 0 & (\text{Otherwise}),\end{cases} \tag{5}$$

$$m_{ij}^{(n)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} m_{ik}^{(1)} m_{kj}^{(n-1)}. \tag{6}$$

$m_{ij}^{(n)}$ を用いると

$$P_{ij}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} m_{ij}^{(n)} e^{-\Lambda x}\frac{(\Lambda x)^n}{n!} \tag{7}$$

である．ここで$\displaystyle\sum_{j=k}^{\infty} m_{ij}^{(n)}$ がi に関して増加であることを帰納法により示す．

$m_{ij}^{(0)}$ に対しては、明らかであるので、$\displaystyle\sum_{j=k}^{\infty} m_{ij}^{(n-1)}$ が任意の k に対して i に関して単調増加と仮定する．

$i=0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{\infty} m_{0j}^{(n)} &= \sum_{j=k}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} m_{0r}^{(1)} m_{rj}^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{j=k}^{\infty}\{(\Lambda-\lambda_0)m_{0j}^{(n-1)} + \lambda_0 m_{1j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&= \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{j=k}^{\infty} \mu m_{0j}^{(n-1)} + (\Lambda-\mu)m_{1j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&\le \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{j=k}^{\infty}\{\mu m_{0j}^{(n-1)} + (\Lambda-\mu-\lambda_1)m_{1j}^{(n-1)} + \lambda_1 m_{1j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&\le \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{j=k}^{\infty}\{\mu m_{0j}^{(n-1)} + (\Lambda-\mu-\lambda_1)m_{1j}^{(n-1)} + \lambda_1 m_{2j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} m_{1j}^{(n)}
\end{aligned}
$$

$i>0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{\infty} m_{ij}^{(n)} &= \sum_{j=k}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} m_{ir}^{(1)} m_{rj}^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{j=k}^{\infty}\{\mu m_{i-1\,j}^{(n-1)} + (\Lambda-\lambda_i-\mu)m_{ij}^{(n-1)} + \lambda_i m_{i+1\,j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&\le \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{j=k}^{\infty}\{\mu m_{ij}^{(n-1)} + (\Lambda-\mu)m_{i+1\,j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&\le \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{j=k}^{\infty}\{\mu m_{ij}^{(n-1)} + (\Lambda-\mu-\lambda_{i+1})m_{i+1\,j}^{(n-1)} + \lambda_{i+1} m_{i+2\,j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} m_{i+1\,j}^{(n)}
\end{aligned}
$$

7 から $\displaystyle\sum_{j=k}^{\infty} P_{ij}(x)$ は任意の k に対し、i に関して増加となる．

$Q_{i+1}(x)-Q_i(x)\le 1$ は以下のように証明できる．

$$
Q_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty} jP_{ij}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} j m_{ij}^{(n)} e^{-\Lambda x}\frac{(\Lambda x)^n}{n!} \tag{8}
$$

であるから

$$\sum_{j=1}^{\infty}[jm_{i+1\,j}^{(n)} - jm_{ij}^{(n)}] \leq 1 \tag{9}$$

を帰納法を用いて示す.

$n=0$ のときは明らかであるので $\sum_{j=1}^{\infty}[jm_{i+1\,j}^{(n-1)} - jm_{ij}^{(n-1)}] \leq 1$ とする.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}[jm_{i+1\,j}^{(n)} - jm_{ij}^{(n)}] \\
&\leq \frac{1}{\Lambda}\Big[\mu + \sum_{j=1}^{\infty}\{(\Lambda-\mu-\lambda_{i+1})jm_{i+1\,j}^{(n-1)} + \lambda_{i+1}jm_{i+2\,j}^{(n-1)} \\
&\qquad - (\Lambda-\mu-\lambda_i)jm_{ij}^{(n-1)} - \lambda_i jm_{i+1\,j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&\leq \frac{1}{\Lambda}\Big[\mu + \sum_{j=1}^{\infty}\{(\Lambda-\mu-\lambda_i)jm_{i+1\,j}^{(n-1)} + \lambda_i jm_{i+2\,j}^{(n-1)} - (\Lambda-\mu-\lambda_i)jm_{ij}^{(n-1)} - \lambda_i jm_{i+1\,j}^{(n-1)}\}\Big] \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

2 番目の不等号は $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i$ かつ $\sum_{j=1}^{\infty} jm_{i+1\,j}^{(n-1)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} jm_{ij}^{(n-1)}$ から成立する. よって

$$Q_{i+1}(x) - Q_i(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Lambda x}\frac{(\Lambda t)^n}{n!} = 1.$$

これらの性質を用いて以下の補題が成立する.

補題 2 $V(l,i)$ は次の性質を満たす.

1. $V(l+1,i) - V(l,i) \leq 1/\gamma$,
2. $V(l,i+1) - V(l,i) \leq 1/\mu$.

証明.

1. の証明

$l=0$ の時,

$$V(1,i) - V(0,i) \leq 1/\gamma + (1+i)/\mu - (1+i)/\mu = 1/\gamma.$$

$l \geq 1$ の時, $\min\{x,y\} - \min\{u,v\} \leq \max\{x-u, y-v\}$ を用いて

$$\begin{aligned}
V(l+1,i) - V(l,i) &\leq \max\Big\{\int_0^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(x)(V(l,j) - V(l-1,j))\Big)dG(x), 1/\gamma\Big\} \\
&\leq \max\Big\{\int_0^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(x)\gamma^{-1}\Big)dG(x), 1/\gamma\Big\} = 1/\gamma.
\end{aligned}$$

2. の証明

$l=0$ の時は明らか,

$l \geq 1$ の時

$$
\begin{aligned}
&V(l,i+1)-V(l,i)\\
&\leq \max\Big\{\int_0^\infty\Big(\sum_{j=0}^\infty (P_{i+1\,j}(x)V(l-1,j)-P_{ij}(x)V(l-1,j))\Big)dG(x),1/\mu\Big\}
\end{aligned}
$$

において

$$
v(l,j)=\begin{cases} V(l,j)-V(l,j-1) & j\geq 1\\ V(l,0) & j=0\end{cases}
$$

を考えると,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\Big(\sum_{j=0}^\infty (P_{i+1\,j}(x)V(l-1,j)-P_{ij}(x)V(l-1,j))\Big)dG(x)\\
&=\int_0^\infty\Big(\sum_{j=0}^\infty (P_{i+1\,j}(x)\sum_{k=0}^{j}v(l-1,k)-P_{ij}(x)\sum_{k=0}^{j}v(l-1,k))\Big)dG(x)\\
&=\int_0^\infty\Big(\sum_{k=0}^\infty (\sum_{j=k}^\infty P_{i+1\,j}(x)-\sum_{j=k}^\infty P_{ij}(x))v(l-1,k)\Big)dG(x)\\
&\leq\int_0^\infty\Big(\sum_{k=1}^\infty (\sum_{j=k}^\infty P_{i+1\,j}(x)-\sum_{j=k}^\infty P_{ij}(x))\mu^{-1}\Big)dG(x)\\
&=\int_0^\infty (Q_{i+1}(x)-Q_i(x))\mu^{-1}dG(x)\leq \mu^{-1}
\end{aligned}
$$

となり 2. が証明できる.

上の補題から次の定理を得る.

定理 1 もし, ある (l,i) で行列に加わるのが最適ならば(m,n), (ただし$(m\leq l, n\leq i)$) でも加わることが最適である.

証明.

補題から

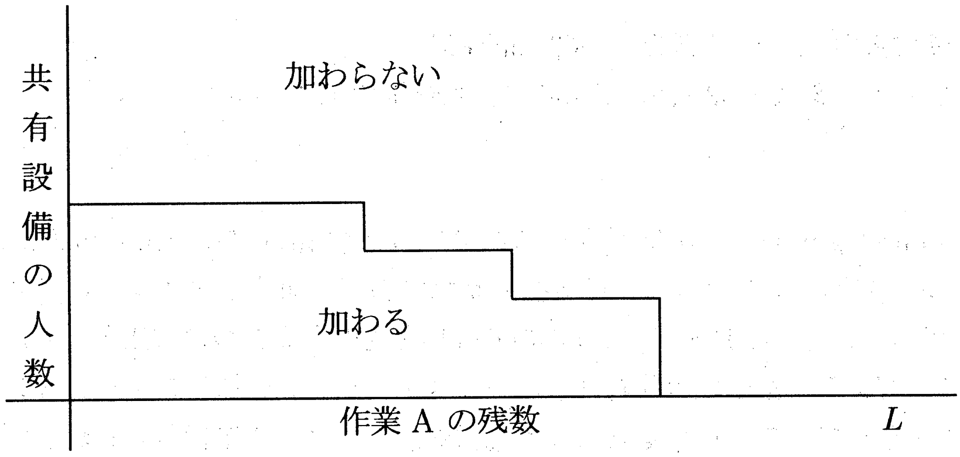
$$
V(l,i)-V(m,n)=V(l,i)-V(m,i)+V(m,i)-V(m,n)\leq (l-m)/\gamma+(i-n)/\mu
$$

よって

$$
V(l,i)-(l-m)/\gamma-(i-n)/\mu\leq V(m,n)
$$

ここで、$l/\gamma+(i+1)/\mu \leq V(l,i)$ より、$m/\gamma+(n+1)/\mu \leq V(m,n)$ となる.

共有設備の待ち行列長 i が 0 の時には、作業 B を行うのが最適であるのはあきらかであるので、最適政策の構造は以下の図のようになる.



(共有設備の人数 0 又は, 作業 A の残数 0 の時は加わるを選択)

数値例

仕事 A の初期仕事数 $L=7$, 仕事 A の処理時間分布が一定分布で $\gamma^{-1}=10.0$, 共有設備の処理率 $\mu=1.0$, 到着率がそれぞれ

$\lambda_0=0.9$, $\lambda_1=0.9$,
$\lambda_2=0.9$, $\lambda_3=0.9$,
$\lambda_4=0.8$, $\lambda_5=0.7$,
$\lambda_6=0.7$, $\lambda_7=0.7$,
$\lambda_8=0.7$, $\lambda_9=0.7$,
$\lambda_i=0$ $(i\geq 10)$ の時の最適政策

(1 は共有設備に並ぶことを示し、0 は並ばないことを示す.)

10	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
共	1	0	0	0	0	0	0	0
有	1	0	0	0	0	0	0	0
設	1	0	0	0	0	0	0	0
備	1	0	0	0	0	0	0	0
の	1	0	0	0	0	0	0	0
人	1	0	0	0	0	0	0	0
数	1	1	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0			作業 A の残数				7

参考文献

[1] R. F. Serfozo, " An Equivalence Between Continuous and Discrete Time Markov Decision Process", *Operations Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 616–620, 1979.

[2] S. M. Ross, *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, 1983.