数理解析研究所講究録
1043巻 1998年 76-82

年齢を考慮にいれた修理・取替え問題に対する単調な修理限界取替え政策の最適性

瀬川良之 京都学園大学経営学部
大西匡光 大阪大学経済学部

Abstract

2つの故障水準をもつ修理取替え問題において単調な修理限界取替え政策が最適となるためには，ある連立方程式に解が存在することが重要な必要条件である事が明らかにされていた．本論分では，その非線形連立方程式が，合理的な仮定の下で，解を持つことを明かにした．

1 まえがき

連続な年齢を持つ信頼性システムの解析が，取り扱われてきた．特に，Hastings[1], [2] は，システムに対して一定の期間ごとに修理もしくは取替えのどちらかの保全を行うかを決定する問題を扱った．修理を施したならばシステムの年齢が一つ増し，次の期における修理費用がその年齢に依存して確率的に定まり，一方，取替えを行ったならばシステムは新品同様となると仮定し，有限計画期間内の総費用を最小化する修理・取替え政策を求める問題を議論し，修理限界取替え政策の概念を導入した．これは，修理費用が余りに高すぎるならば，修理を施すより取替えを行う方が有効であろうという基本的な考えにも基づいている．彼はこの問題を有限計画期間のマルコフ決定過程として定式化するとともに，いくつかの数値例を用いて修理限界取替え政策の最適性を示している．ここで，修理限界取替え政策とは，修理限界と呼ばれるあるしきい値が存在して，修理費用がこの値を越えないときには修理を施し，越えたときには取替えを行うというものである．

White[8] はこの問題を無限計画期間問題に発展させ，平均費用規範および総期待割引費用規範の下でマルコフ決定過程として再定式化した．そして，より高い故障水準への遷移確率が年齢の増加につれて確率的に増加するという条件のもとに，修理限界取替え政策の最適性を証明した．さらに，この修理限界が年齢に関して非増加であることを示した．

瀬川・大西[9]では，Hastings[1], [2], White[8] のいづれにおいても故障が起こるまでの時間間隔は考慮されていないのに対して，故障時間間隔がある一般分布に従うものとし，故障するたびに修理もしくは取替えの決定を行う問題として，無限計画期間の時間平均費用規範の下におけるのセミ・マルコフ決定過程に定式化した．そして，保全時間および保全費用構造もより一般的なものとして，故障時間間隔および保全時間の分布や，費用の構造における物理的，経済的に合理的な条件の下とで，修理限界取替え政策の最適性を示し，この修理限界の年齢に関する非増加性を示した．また，瀬川・大西[10]では，年齢が離散的でなく連続な場合について小修理・取替え問題を扱い，この問題をセミ・マルコフ決定過程に定式化し，IFR(Increasing Failure Rate)の下で2領域政策である$t-$政策が最適であることを示した．

最近の研究では，瀬川・大西[11]において，2つの故障水準を持つシステムの解析が行われ，単調な修理限界取替え政策の最適性は，ある非線形連立方程式に解が存在することとほぼ同値であることが明らかにされた．ここに登場する連立方程式は，3変数の非線形連立方程式であるため，その解の存在証明は困難であると考えられた．

本論分では，評価関数の連続性に注目し，一般的な仮定の下で連立方程式の解の存在を証明した．その手法は，更なる次元の拡大にも対応できるものである．これによって，2つの故障水準

を持つ信頼性システムの小修理・取替え問題には，最適である単調な修理限界取替え政策が存在することが明かとなった．

2 定義と定式化

以下のような信頼性システムを考える．システムの故障時間の分布関数を$F(x)$とし，これは連続な密度関数を持つとする．信頼度関数を$\bar{F}(x)$で表すと$\bar{F}(x) = 1 - F(x)$である．故障率関数を$\lambda(x)$で表すと，$\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$である．システムの状態は，稼働と故障のみを考え，その状態は常に観測されているものとする．また，故障状態は$Y = \{1, 2\}$の2つの水準があるものとする．故障時の故障水準は年齢に依存せずに確率p_1で故障水準1に遷移し，確率p_2で故障水準2に遷移するものとする．ここで$p = 1 + p_2 = 1$である．保全にかかる時間は無視できるものとする．取り得る保全行為は，年齢を変えないまま稼働状態に復帰させる小修理，及び，取替えのみとする．故障時の年齢がxでありそのときの故障水準が1及び2のとき小修理を行うとは，各々，費用c_1及びc_2を要し，稼働状態に復帰させる保全行為である．また，取替えとは，故障時の年齢，故障水準に関わらず，費用c_fを要しシステムは新品と同様，すなわち，年齢を0にもどして稼働させる保全行為とする．

さて，瀬川・大西[11]において，上記モデルにセミ・マルコフ決定過程の手法を適用することで，最適である単調な修理限界取替え政策が存在する十分条件が示された．

本論文では，その十分条件が一般的な仮定の下で成立するかを検証する．

定義 1 [仮定A] $\lambda(x)$は単調増加かつ連続微分可能で$\lim_{x\uparrow\infty}\lambda(x) = +\infty$かつ$\exists\delta > 0$, *s.t.* $\limsup_{x\uparrow\infty} x\lambda'(x) > \delta, \lambda'(x) > 0$であり，$0 < c_1 < c_2 < c_f < \infty$である． □

この仮定の費用構造は経済的に合理的なものであり，故障率の構造に付いてははIFR, $\lim_{x\uparrow\infty}\lambda(x) = \infty$，及び，発散の程度は極めて緩い条件である．

まず，Ross[5]の最適性方程式に関する定理を記述しておく．

定理 1 (S.M. Ross) [最適性方程式] ある有界な関数wと定数gが存在して

$$w(x,y) = \min\begin{cases} c_y + \dfrac{1}{\bar{F}(x)}\left\{p_1\displaystyle\int_x^\infty w(s,1)f(s)ds\right. \\ \qquad \left. +p_2\displaystyle\int_x^\infty w(s,2)f(s)ds - g\displaystyle\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\}, \\ c_y + \left\{p_1\displaystyle\int_0^\infty w(s,1)f(s)ds\right. \\ \qquad \left. +p_2\displaystyle\int_0^\infty w(s,2)f(s)ds - g\displaystyle\int_0^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \end{cases} \tag{2.1}$$

が成立するならば，gは最適な期待時間平均費用であり，wは最適な相対値関数である． □

定義 2

$$w(x) \equiv p_1 w(x,1) + p_2 w(x,2) \tag{2.2}$$

□

wをこのようにおくことで相対値関数を1つの変数で表現することができる．

定理 2 [縮約された最適性方程式] ある有界な関数wと定数gが存在して

$$\begin{aligned} w(x) &= p_1\min\left\{c_1 + \frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty w(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds, c_f\right\} \\ &\quad +p_2\min\left\{c_2 + \frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty w(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds, c_f\right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

但し

$$\int_0^\infty w(s)f(s)ds - g\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = 0 \tag{2.4}$$

が成立するならば，gは最適な時間平均費用であり，wは最適な相対値関数である．□

定理 3 連立方程式

$$\begin{cases} c_f - c_2 + (p_1c_1 + p_2c_2)\displaystyle\int_0^{t_2} \lambda(s)ds - gt_2 = 0, & (A1) \\ (p_1c_2 + p_2c_2)\bar{F}^{p_2}(t_2) - c_1\bar{F}^{p_2}(t_1) - g\displaystyle\int_{t_2}^{t_1} \bar{F}^{p_2}(s)ds = 0, & (A2) \\ c_1\bar{F}(t_1) - g\displaystyle\int_{t_1}^\infty \bar{F}(s)ds = 0 & (A3) \end{cases}$$

に $0 \le t_2 < t_1, 0 \le g$ なる解 (t_1, t_2, g) が存在し，

$$c_f - c_2 + (p_1c_1 + p_2c_2)\int_0^x \lambda(s)ds - gx \ge 0, \quad x \in [0, t_2] \tag{2.5}$$

$$c_1\bar{F}(x) - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds \ge 0, \quad x \in [t_1, \infty) \tag{2.6}$$

を満たすならば，修理限界取替え政策が最適である．　□

(略証)

$(A1), (A2), (A3)$ の解によって相対値関数を

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x), & x \in I_1 \\ w_2(x), & x \in I_2 \\ c_f, & x \in I_3 \end{cases} \tag{2.7}$$

但し，

$$w_1(x) = p_1c_1 + p_2c_2 - (p_1c_1 + p_2c_2)\int_0^x \lambda(s)ds + gx, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} w_2(x) &= \frac{p_1}{p_2}c_1 + c_f - \frac{p_1^2}{p_2}c_1\bar{F}^{p_2}(t_1)\bar{F}^{-p_2}(x) \\ &\quad -p_1 g\bar{F}^{-p_2}(x)\left\{\bar{F}^{-p_1}(t_1)\int_{t_1}^\infty \bar{F}(s)ds + \int_x^{t_1} \bar{F}^{p_2}(s)\right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

のようにおけば，この相対値関数とgは，定理 2 を満たす．　□

定義 3 [評価関数]

$$\zeta(t_2, g) \equiv c_f - c_2 + (p_1c_1 + p_2c_2)\int_0^{t_2} \lambda(s)ds - gt_2, \tag{2.10}$$

$$\eta(t_1, t_2, g) \equiv (p_1c_1 + p_2c_2)\bar{F}^{p_2}(t_2) - c_1\bar{F}^{p_2}(t_1) - p_2 g\int_{t_2}^{t_1} \bar{F}^{p_2}(s)ds, \tag{2.11}$$

$$\xi(t_1, g) \equiv c_1\bar{F}(t_1) - g\int_{t_1}^\infty \bar{F}(s)ds. \quad \square \tag{2.12}$$

定義 4 [連立方程式S]

$$\begin{cases} \zeta(t_2, g) = 0, \\ \eta(t_1, t_2, g) = 0, \\ \xi(t_1, g) = 0. \quad \square \end{cases} \tag{2.13}$$

さて，これらの連立方程式をgについて整理し，それぞれ実現可能な範囲においてt_1, t_2の関数として表記する．

$$
\begin{aligned}
g_\zeta(t_2) &\equiv \frac{1}{t_2}\{c_f - c_2 + (p_1c_1 + p_2c_2)\int_0^{t_2} \lambda(s)ds\}, && (2.14)\\
g_\eta(t_1,t_2) &\equiv \frac{1}{p_2\int_{t_2}^{t_1}\bar{F}^{p_2}(s)ds}\{(p_1c_1+p_2c_2)\bar{F}^{p_2}(t_2) - c_1\bar{F}^{p_2}(t_1)\}, && (2.15)\\
g_\xi(t_1) &\equiv \frac{c_1\bar{F}(t_1)}{\displaystyle\int_{t_1}^{\infty}\bar{F}(s)ds}. && (2.16)
\end{aligned}
$$

続いて，これによって形成される評価関数を定義する．

定義 5 [評価関数Z]

$$
\begin{aligned}
Z_1(t_1,t_2) &\equiv g_\eta(t_1,t_2) - g_\zeta(t_2), \quad t_1 > t_2 > 0, && (2.17)\\
Z_2(t_1,t_2) &\equiv g_\eta(t_1,t_2) - g_\xi(t_1), \quad t_1 > t_2 \geq 0, && (2.18)\\
Z_3(t_1,t_2) &\equiv g_\zeta(t_2) - g_\xi(t_1), \quad t_1 > t_2 > 0. \quad \Box && (2.19)
\end{aligned}
$$

このときZ_1, Z_2, Z_3を陽に表すと

$$
\begin{aligned}
Z_1(t_1,t_2) &= \frac{1}{p_2\displaystyle\int_{t_2}^{t_1}\bar{F}^{p_2}(s)ds}\{(p_1c_1+p_2c_2)\bar{F}^{p_2}(t_2) - c_1\bar{F}^{p_2}(t_1)\}\\
&\quad -\frac{1}{t_2}\left\{c_f - c_2 + (p_1c_1+p_2c_2)\int_0^{t_2}\lambda(s)ds\right\}, && (2.20)\\
Z_2(t_1,t_2) &= \frac{1}{p_2\displaystyle\int_{t_2}^{t_1}\bar{F}^{p_2}(s)ds}\{(p_1c_1+p_2c_2)\bar{F}^{p_2}(t_2) - c_1\bar{F}^{p_2}(t_1)\} - \frac{c_1\bar{F}(t_1)}{\displaystyle\int_{t_1}^{\infty}\bar{F}(s)ds}, && (2.21)\\
Z_3(t_1,t_2) &= -\frac{1}{t_2}\left\{c_f - c_2 + (p_1c_1+p_2c_2)\int_0^{t_2}\lambda(s)ds\right\} - \frac{c_1\bar{F}(t_1)}{\displaystyle\int_{t_1}^{\infty}\bar{F}(s)ds} && (2.22)
\end{aligned}
$$

である．これによって連立方程式Sは次のように変形できる．

$$
\left\{
\begin{aligned}
Z_1(t_1,t_2) &= 0,\\
Z_2(t_1,t_2) &= 0,\\
Z_3(t_1,t_2) &= 0.
\end{aligned}
\right. \tag{2.23}
$$

この連立方程式は式が一つ冗長である．そこで，証明が最も簡単になるZ_1とZ_2を取り上げて議論する．

定義 6 [連立方程式S_z]

$$
\left\{
\begin{aligned}
Z_1(t_1,t_2) &= 0,\\
Z_2(t_1,t_2) &= 0. \quad \Box
\end{aligned}
\right. \tag{2.24}
$$

以上において，Sに$0 < t_2 < t_1 < \infty, 0 < g < \infty$なる解が存在することと，$S_z$に$0 < t_2 < t_1 < \infty$なる解が存在することは同値である．

次の節で，この連立方程式S_zに解が存在するこを証明する．

3 解の存在証明

$\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$を$t_1 - t_2$平面上の点とする．$Z_1(\boldsymbol{t})$及び$Z_2(\boldsymbol{t})$の定義される領域をそれぞれ$\Theta_1$及び$\Theta_2$とおく．すなわち，

$$\Theta_1 \equiv \{\boldsymbol{t} | 0 < t_2 < t_1 < \infty\}, \tag{3.1}$$

$$\Theta_2 \equiv \{\boldsymbol{t} | 0 \le t_2 < t_1 < \infty\} \tag{3.2}$$

である．また，Θ_1とΘ_2の共通部分をΘ_0とおく．すなわち，

$$\begin{aligned} \Theta_0 &\equiv \Theta_1 \cap \Theta_2 \\ &= \{\boldsymbol{t} | 0 < t_2 < t_1 < \infty\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

である．さて，Φ_1, Φ_2をそれぞれZ_1, Z_2の零点集合とする．すなわち，

$$\Phi_1 \equiv \{\boldsymbol{t} | Z_1(\boldsymbol{t}) = 0, \boldsymbol{t} \in \Theta_1\} \tag{3.4}$$

$$\Phi_2 \equiv \{\boldsymbol{t} | Z_1(\boldsymbol{t}) = 0, \boldsymbol{t} \in \Theta_2\} \tag{3.5}$$

である．次の補題が成り立つ．

補題 1 仮定Aの下に，ある$\boldsymbol{t}_{++}, \boldsymbol{t}_{+-}, \boldsymbol{t}_{-+}, \boldsymbol{t}_{--} \in \Theta_0$が存在して$Z_1(\boldsymbol{t}_{++}) > 0, Z_2(\boldsymbol{t}_{++}) > 0, Z_1(\boldsymbol{t}_{+-}) > 0$, $Z_2(\boldsymbol{t}_{+-}) < 0$, $Z_1(\boldsymbol{t}_{-+}) < 0$, $Z_2(\boldsymbol{t}_{-+}) > 0$, $Z_1(\boldsymbol{t}_{--}) < 0$, $Z_2(\boldsymbol{t}_{--}) < 0$ が成り立つ． □

(証明)

$\forall t_1$に対して$\lim_{t_2 \uparrow t_1} Z_1(t_1, t_2) = +\infty$, $\lim_{t_2 \uparrow t_1} Z_2(t_1, t_2) = +\infty$であるから，ある$0 < t_2^+ < t_1$なる$\boldsymbol{t} = (t_1, t_2^+)$が存在して，$Z_1(\boldsymbol{t}_{++}) > 0$, $Z_2(\boldsymbol{t}_{++}) > 0$である．

また，$\lim_{t_1 \downarrow +0} Z_2(t_1, 0) = +\infty, \lim_{t_1 \uparrow +\infty} Z_2(t_1, 0) = -\infty$ であるから，$\exists M_1^+ > 0, s.t. Z_2(M_1^+, 0) > 0$ 及び$\exists M_1^- > 0$, $s.t.$ $Z_2(M_1^-, 0) < 0$ である．また，$0 < \exists M_2^- < +\infty$, $s.t.$ $Z_1(M_1^+, M_2^-) < 0$ であるから，$\boldsymbol{t}_{-+} = (M_1^+, M_2^-)$ とおくと，$Z_1(\boldsymbol{t}_{-+}) < 0$, $Z_2(\boldsymbol{t}_{-+}) > 0$ である．続いて，$\lim_{t_2 \downarrow +0} Z_1(M_1^-, t_2) = -\infty$ であるから，$\exists M_3^- > 0$, $s.t.$ $Z_1(M_1^-, M_3^-) < 0$ である．よって，$\boldsymbol{t}_{--} = (M_1^-, M_3^-)$ とおくと，$Z_1(\boldsymbol{t}_{--}) < 0, Z_2(\boldsymbol{t}_{--}) < 0$ が成り立つ．

また，十分に大きなt_2に対して，$\lim_{t_1 \uparrow +\infty} Z_2(t_1, t_2) = -\infty$ である．さらに，

$$\begin{aligned} Z_1(+\infty, t_2) &= \frac{(p_1c_1 + p_2c_2)\bar{F}^{p_2}(t_2)}{p_2 \displaystyle\int_{t_2}^{\infty} \bar{F}^{p_2}}(s)ds - \frac{1}{t_2}\left\{c_f - c_2 + (p_1c_1 + p_2c_2)\int_0^{t_2} \lambda(s)ds\right\} \\ &= \frac{p_1c_1 + p_2c_2}{t_2}\left\{\int_0^{t_2}\{\lambda(t_2) - \lambda(s)\}ds - \frac{p_2(c_f - c_2)}{p_1c_1 + p_2c_2}\right\} \\ &\quad + \frac{p_1c_1 + p_2c_2}{p_2}\left\{\frac{\bar{F}^{p_2}(t_2)}{\displaystyle\int_{t_2}^{\infty} \bar{F}^{p_2}(s)ds} - p_2\lambda(t_2)\right\} \\ &\ge \frac{p_1c_1 + p_2c_2}{t_2}\left\{\int_0^{t_2}\{\lambda(t_2) - \lambda(s)\}ds - \frac{p_2(c_f - c_2)}{p_1c_1 + p_2c_2}\right\} \end{aligned}$$

である．$t_2 \to \infty$のとき$\displaystyle\int_0^{t_2}\{\lambda(t_2) - \lambda(s)\}ds \to \infty$ であるから，ロピタルの定理より

$$Z_1(\infty, t_2) = (p_1c_1 + p_2c_2)(t_2\lambda'(t_2)) \tag{3.6}$$

である．よって十分に大きなM_2^+が存在して$Z_1(+\infty, M_2^+) > \delta$, $Z_2(+\infty, M_2^+) = -\infty$である．すなわちある$0 < M_3^+ < +\infty$が存在して$\boldsymbol{t}_{+-} = (M_3^+, M_2^+)$とおくと$Z_1(\boldsymbol{t}_{+-}) > 0$, $Z_2(\boldsymbol{t}_{+-}) < 0$である． □

次に，上記補題の成立の下に，連立方程式の解の存在が示される．

定理 4 仮定Aの下で，連立方程式S_zには解が存在する． □

(証明)

Θ_0は連続な開集合であり，$Z_1(\boldsymbol{t}_{++}) > 0$, $Z_1(\boldsymbol{t}_{--}) < 0$である．$Z_1$の連続性より，$\boldsymbol{t}_{++}$と$\boldsymbol{t}_{--}$を結ぶ任意の曲線$\boldsymbol{C} \in \Theta_0$ に対して必ず$\boldsymbol{C}$上にZ_1の零点が存在する．この零点を与えるΘ_0の集合Φ_1に対して，連続な集合$\boldsymbol{C}_1 \in \Phi_1$が存在し，$\Theta_0$を２つの開集合$\Theta_0^{1+}$, Θ_0^{1-}に分割する．すなわち，

$$\Theta_0 = \Theta_0^{1+} \cup \boldsymbol{C}_1 \cup \Theta_0^{1-} \tag{3.7}$$

かつ

$$\Theta_0^{1+} \cap \boldsymbol{C}_1 = \phi,\ \Theta_0^{1+} \cap \Theta_0^{1-} = \phi,\ \boldsymbol{C}_1 \cap \Theta_0^{1-} = \phi \tag{3.8}$$

である．同様に，$Z_2(\boldsymbol{t}_{++}) > 0$, $Z_2(\boldsymbol{t}_{--}) < 0$, 及び，$Z_2$の連続性より，連続な集合$\boldsymbol{C}_2 \in \Phi_2$が存在し，

$$\Theta_0 = \Theta_0^{2+} \cup \boldsymbol{C}_2 \cup \Theta_0^{2-} \tag{3.9}$$

かつ，

$$\Theta_0^{2+} \cap \boldsymbol{C}_2 = \phi,\ \Theta_0^{2+} \cap \Theta_0^{2-} = \phi,\ \boldsymbol{C}_2 \cap \Theta_0^{2-} = \phi \tag{3.10}$$

が成立する．

一方，$\boldsymbol{t}_{++} \in \Theta_0^{1+} \cap \Theta_0^{2+}$, $\boldsymbol{t}_{--} \in \theta_0^{1-} \cap \Theta_0^{2-}$, $\boldsymbol{t}_{+-} \in \Theta_0^{1+} \cap \Theta_0^{2-}$, $\boldsymbol{t}_{-+} \in \Theta_0^{1-} \cap \Theta_0^{2+}$ である．また，Z_1の連続性より，$\boldsymbol{C}_2 \cap \Theta_0^{1+} \neq \phi$, $\boldsymbol{C}_2 \cap \Theta_0^{1-} \neq \phi$ が成立し，Z_2の連続性より，$\boldsymbol{C}_1 \cap \Theta_0^{2+} \neq \phi, \boldsymbol{C}_1 \cap \Theta_0^{2-} \neq \phi$ が成立する．

もし，$\boldsymbol{C}_1 \cap \boldsymbol{C}_2 = \phi$ならば，$\boldsymbol{C}_1$，及び，$\boldsymbol{C}_2$は連続な集合とはならず，２つの集合に分離される．これは，$\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$の連続性に反する．

よって，$\boldsymbol{C}_1 \cap \boldsymbol{C}_2 \neq \phi$である．すなわち，$\exists \boldsymbol{t}^* \in \Theta_0$, $s.t.\ Z_1(\boldsymbol{t}^*) = Z_2(\boldsymbol{t}^*) = 0$である． □

4 むすび

以上により，十分に合理的な仮定の下で，２つの故障水準を持つ小修理取替え問題に最適な修理限界取替え政策が存在することが示された．故障水準をさらに増加させた場合や，連続状態を取り扱った場合など，今後の課題として残されている．

参考文献

[1] Hastings, N. A. "Some Notes on Dynamic Programming and Replacement", Opl. Res. Q., 19. pp. 453-464, (1968).

[2] Hastings, N. A. "The Repair Limit Replacement Method", Opl. Res. Q., 20, pp. 337-349, (1969).

[3] Ohnishi, M., Ibaraki, T. and Mine, H., "On the Optimality of (t, T)–Policy in the Minimal–Repair and Replacement Problem under the Average Cost Criterion", in Proceeding of International Symposium on Reliability and Maintainability 1990–Tokyo, pp.329-334, (1990).

[4] Phelps, R. I., "Optimal Policy for Minimal Repair", *Journal of the Operational Research Society*, Vol.34, pp.425-427, (1983).

[5] Ross, S. M., " Average Cost Semi-Markov Decision Processes", *Journal of Applied Probability*, Vol.7, pp.649-656, (1970).

[6] Segawa, Y., Ohnishi, M. and Ibaraki, T., "Optimal minimal-repair and Replacement Problem with Age Dependent Cost Structure". *Computers Math. Applic.*, **24,** No. 1/2, pp. 91-101, (1992).

[7] Tahara, A. and Nishida, T., "Optimal Replacement Policy for Minimal Repair Model", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.18, pp.113-124, (1975).

[8] White, D. J., "Repair Limit Peplacement", OR Spectrum, 11, pp. 143-149, (1989).

[9] 瀬川良之，大西匡光, "２種の不完全修理を有する信頼性システムの平均最適な保全政策", 日本ＯＲ学会１９９６年度春季研究発表会アブストラクト集, pp. 282-283 (1996).

[10] 瀬川良之，大西匡光，"予防取替えを許す不完全修理問題に対する(t,T)-政策の最適性", 日本ＯＲ学会１９９６年度秋季研究発表会アブストラクト集, pp. 146-147 (1996).

[11] 瀬川良之，大西匡光，"年齢を考慮にいれた修理・取替え問題に対する修理限界取替え政策の最適性に関する研究", 日本ＯＲ学会１９９７年度春季研究発表会アブストラクト集, pp. 120-121 (1997).