Title	可能性測度を用いたファジィ・スケジューリング問題 (決定理論とその関連分野)
Author(s)	伊藤, 健; 石井, 博昭
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1043: 19-24
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/62136
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1043 巻 1998 年 19-24

可能性測度を用いたファジィ・スケジューリング問題

大阪大学大学院工学研究科　伊藤　健　(Takeshi Itoh)
大阪大学大学院工学研究科　石井　博昭　(Hiroaki Ishii)

Abstract

Most of scheduling problems treat the jobs' processing times and due-dates as certain values. In actual cases, however, they often include vagueness. Then, we propose a more flexible and general model, which takes uncertain processing times into account by using fuzzy numbers. In this model, computing the jobs' completion time is based on the extended sum of fuzzy numbers. And, we use the possibility measure as the optimization criterion.

1　はじめに

これまでに提案されているスケジューリング問題のモデルの多くは，対象とする問題においてジョブの処理時間を確定的なものとして取り扱っている．しかし，実際に処理を行う以前に，ジョブの処理時間を的確に判断することは極めて困難なことである．つまり，処理時間を特定するために用いるデータ等には観測誤差が含まれている恐れがあるし，ジョブの処理過程に人間の作業が含まれる場合等は，すべての処理機会において一定の処理時間を保証することはできない．

また，納期に関してもある程度の融通を利かせることも考えられるので，納期をファジィ概念化し，ジョブの処理時間を不確定なものとして問題をとらえ，より現実の状況に近いモデルを考える必要があると思われる．

本研究では，1 機械 n ジョブ・スケジューリング問題 [4] を扱う．各ジョブの処理時間を L-ファジィ数 [1, 7] により表現し，各々のジョブに対してファジィ納期を設ける．また，ジョブの完了時間については，先行実行されるジョブの処理時間の拡張和で定義すると，完了時間も L-ファジィ数となるので，納期に対する可能性測度を考えることができる．本研究の目標は，可能性測度のジョブ間での最小値が最も大きくなるような max-min 型の最適スケジュールを求めることである．

2 定式化

各ジョブ $J_i\ (i=1, \cdots, n)$ について，その納期をメンバシップ関数

$$\mu_{D_i}(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq d_i) \\ D(x-d_i) & (d_i \leq x < d_i + D^{-1}(0)) \\ 0 & (d_i + D^{-1}(0) \leq x) \end{cases} \tag{1}$$

をもつファジィ納期 D_iとする $(d_i > 0)$ (**図１参照**)．ただし，$D(x)$ は $D(0) = 1,\ D: R^+ \to [0,1]$ なる狭義減少関数である．D_iは "ジョブ J_iをだいたい d_iまでに完了したい．" というファジィ目標と見なすことができる．また，処理時間を次のようなメンバシップ関数（**図２参照**）によって制限される正の L-ファジィ数 $T_i = (m_i,\ \alpha_i)_L$とする [1, 7]．

$$\mu_{T_i}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_i - x}{\alpha_i}\right) & (x \leq m_i) \\ L\left(\dfrac{x - m_i}{\alpha_i}\right) & (x \geq m_i) \end{cases} \tag{2}$$

ただし，L は $L(0) = 1,\ L: R^+ \to [0,1]$ なる狭義減少関数とする $(m_i,\ \alpha_i > 0)$．

さらに，ジョブ J_iの完了時間 C_iであるが，先行して実行されるジョブの処理時間を拡張加算⊕することにより定義する．例えば，$J_1,\ J_2,\ J_3$の順に実行された場合，各々の完了時間 $C_1,\ C_2,\ C_3$は

$$\begin{aligned} C_1 &= T_1 = (m_1,\ \alpha_1)_L \\ C_2 &= T_1 \oplus T_2 = C_1 \oplus (m_2,\ \alpha_2)_L \\ &= (m_1 + m_2,\ \alpha_1 + \alpha_2)_L \\ C_3 &= T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 = C_2 \oplus (m_3,\ \alpha_3)_L \\ &= (m_1 + m_2 + m_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)_L \end{aligned}$$

である．ゆえに，完了時間もまた正の L-ファジィ数となり，ファジィ納期が満足される可能性を可能性測度 $\Pi_{C_i}(D_i)$（**図３参照**）として数理的に扱うことができる [6]．

$$\Pi_{C_i}(D_i) = \sup_x \min \{\mu_{C_i}(x),\ \mu_{D_i}(x)\} \tag{3}$$

以上のことから，全スケジュールの集合を K として

$$\text{目的関数} \ \min_{J_i \in K_l} \Pi_{C_i}(D_i) \ \to \ \text{最大化}\ (K_l \in K) \tag{4}$$

を実現するスケジュールを求める．

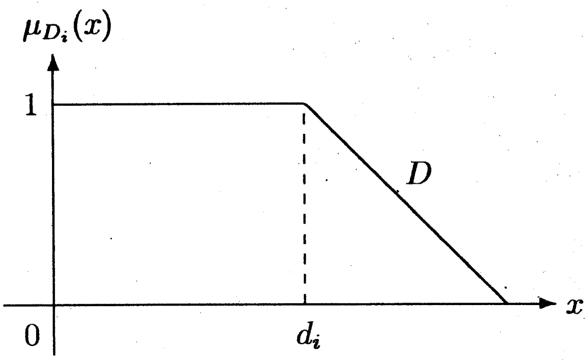

図１ ファジィ納期のメンバシップ関数

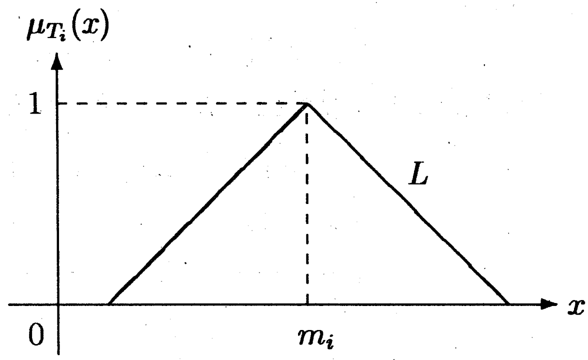

図２ ファジィ処理時間のメンバシップ関数

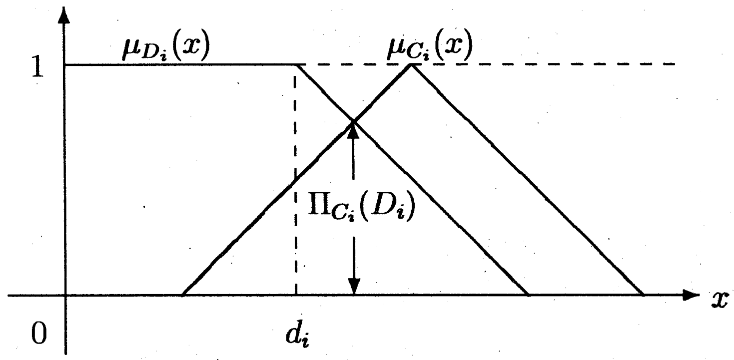

図３ 可能性測度 $\Pi_{C_i}(D_i)$

3 解 法

正の L-ファジィ数は次のような性質をもつ [1].

定理 1 2つの正の L-ファジィ数 $A=(m_1,\alpha_1)_L$, $B=(m_2,\alpha_2)_L$について

$$^{\forall}\alpha \in [0,1], \quad \inf\ A_\alpha \leq \inf\,(A \oplus B)_\alpha \tag{5}$$

が成り立つ.

証明

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{x|\mu_A(x) \geq \alpha\} \\ &= \left\{x \middle| L\left(\frac{m_1-x}{\alpha_1}\right) \geq \alpha\right\} \end{aligned}$$

であるので，Lの単調減少性より（**図４参照**）

$$\inf\ A_\alpha = m_1 - \alpha_1 L^{-1}(\alpha)$$

同様に

$$\inf\,(A\oplus B)_\alpha=(m_1+m_2)-(\alpha_1+\alpha_2)L^{-1}(\alpha)$$

したがって，Bが正の L ファジィ数であることから

$$\inf\,(A\oplus B)_\alpha-\inf\,A_\alpha=m_2-\alpha_2L^{-1}(\alpha)\geq 0$$

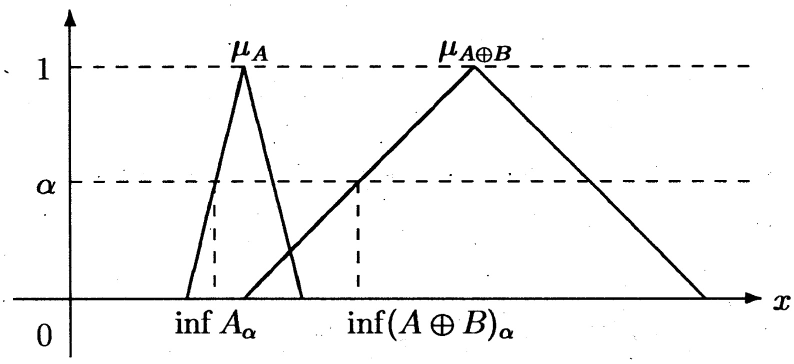

図4

□

本モデルにおける最適スケジュールは，非ファジィ・スケジューリングにおける EDD(Early Due-Date) ルール [2] を拡張することにより得られる.

定理 2 (拡張型 EDD ルール) ファジィ・スケジューリング問題 (4) の最適スケジュールは，各ジョブに対するファジィ納期を特徴づける d_iを基に，その値が小さいものの順にジョブを並べることにより得られる.

証明

拡張型 EDD ルールにより得られるスケジュール K^*が最適スケジュールではないと仮定する．このとき，K^*ではない最適スケジュール$\hat{K}$が存在し，そのときの$\min_{J_i\in\hat{K}}\ \Pi_{C_i}(D_i)$ の値を$\hat{h}$，また対応するジョブを$\hat{J}$とする.

あるスケジュールにおいて d_iの大小関係と逆の順に並ぶジョブの組について，それらを順に J_a, J_bとすれば，各々の完了時間とファジィ納期のメンバシップ関数との関係は，例えば図5のようになる.

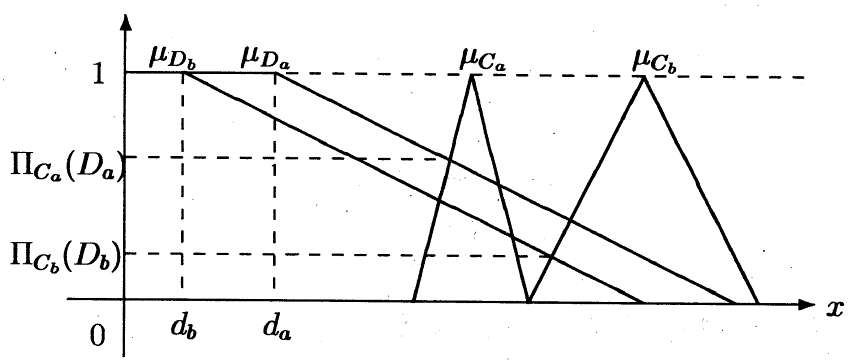

図5

J_a, J_bの実行順序を入れ換えた場合，**定理1**より，$\min(\Pi_{C_a}(D_a), \Pi_{C_b}(D_b))$ は改善される（図6参照）.

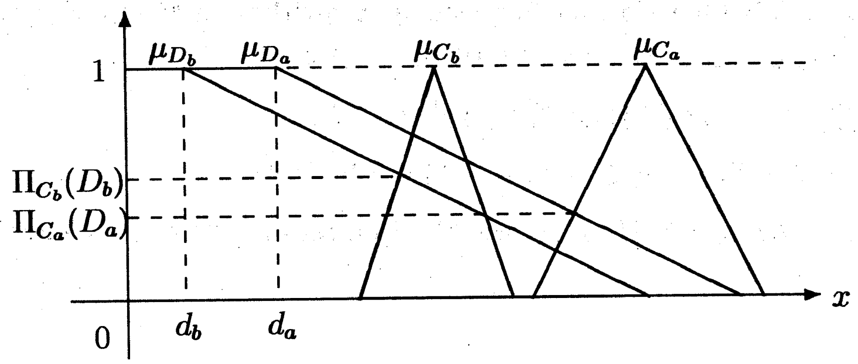

図6

$\hat{K}$中の隣接するジョブには，d_iの順序と逆の並びのものが必ず一組は存在し，それらの入れ換えを有限回繰り返せば$\hat{K}$は K^*と等しくなるが，その過程において$\hat{J}$が交換対象に選ばれれば，$\hat{h}$の値は改善され，$\hat{K}$が最適スケジュールであることに矛盾する．また，$\hat{J}$が交換対象に選ばれなければ，$\min_{J_i \in K^*} \Pi_{C_i}(D_i)$ は$\hat{h}$と等しく，K^*も最適スケジュールの一つとなり，やはり矛盾する.

□

4 おわりに

正のL-ファジィ数を処理時間とし，また納期もファジィ化されたジョブに対して，可能性測度を基にしたmax-min型のスケジューリング問題の解がEDDルールを拡張利用することにより得られることを示した.

本モデルではファジィ納期のメンバシップ関数を特徴づける関数に，各ジョブで同一の関数 Dを用いているが，現実にはそれらの関数の状態は微妙に異なることが考えられる．しかし，各々のジョブで異なった関数を用いると，d_iに基づくルールが有意なものではなくなり，**定理2**の証明における可能性測度の議論が成立しなくなる．したがって，そのような場合にでも最適スケジュールが得られるような新たなアルゴリズムについて検討する必要がある．また，より複雑なシステムへの適用を考えた場合，機械の複数化も今後の課題とされる.

参考文献

[1] D.Dubois & H.Prade, *Fuzzy sets and systems*, Academic Press, New York (1980).

[2] J.R.Jackson, "Scheduling a Production Line to Minimize Maximum Tardiness", Research Report 43, Management Sciences Research Project, UCLA, January, 1955.

[3] S.M.Johnson, "Optimal Two- and Three-Stage Production Schedules with Setup Times Included", *Naval Research Logistics Quarterly* **1** (1954) 61-68.

[4] J.M.Moore, "An n Job, One Machine Sequencing Algorithm for Minimizing the Number of Late Jobs", *Management Science* **15** (1968) 102-109.

[5] 中島, 竹田, 石井, 「ファジィ理論入門」, 裳華房 (1994).

[6] 田中, 「ファジィモデリングとその応用」, 朝倉書店 (1990).

[7] H.J.Zimmermann, *Fuzzy Set Theory - and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers (1991).