数理解析研究所講究録
1046 巻 1998 年 65-69

有限次元行列環の融合積

千葉大学大学院自然科学研究科博士後期課程　坂本 高之 (Takashi Sakamoto)

C^*- 環の制限融合積の概念を初めて活字で述べたのは、多分 D.Voiculescu([2]) である。

ここでは、その定義及び基本的な性質を述べ、行列環を材料とした制限融合積のいくつかについて、簡単な考察を行なう。

1. C^*- 環の制限融合積の定義

A_1, A_2 を単位元を持つ C^*- 環とし、B を A_1, A_2 に共通の C^*- 部分環で、単位元を共有するものとする。さらに、$E_j : A_j \to B$ を、ノルム 1 の射影とする。この設定から、制限融合積が構成される。その構成は、state に付随する制限自由積のそれとほぼ同様であり、大まかに述べると、以下のようになる。

簡単のため、以下では、$j = 1, 2$ に対して、「$E_j(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$」という条件を仮定する。

$A_j \ni x, y$ に対し $\langle x, y\rangle := E_j(x^*y)$ とおくと、$(A_j, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は pre-Hilbert B-module になる。その完備化により得られる Hilbert B-module を H_j として、A_j から $L(H_j)$ (H_j 上の、adjoint を持つ B-module map の全体のなす C^*- 環) への標準的な *- 準同型を π_j とする。(GNS 表現の類似物)

直和分解 $H_j = \xi_j.B \oplus H_j^\circ$ を考え、Hilbert B-module

$$H = \xi.B \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_n} H_{i_1}^\circ \underset{B}{\otimes} \cdots \underset{B}{\otimes} H_{i_n}^\circ$$

を自然な形で構成する。

$j = 1, 2$ に対して、

$$H(j) = \xi.B \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_n \\ i_1\neq j}} H_{i_1}^\circ \underset{B}{\otimes} \cdots \underset{B}{\otimes} H_{i_n}^\circ$$

として、$V_j : H \to H_j \underset{B}{\otimes} H(j)$ を以下で定義する。

$$V_j(\xi) = \xi_j \otimes \xi$$

$$V_j(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) = \begin{cases} h_1 \otimes (h_2 \otimes \cdots \otimes h_n) & (j_1 = j, n \geq 2) \\ h_1 \otimes \xi & (j_1 = j, n = 1) \\ \xi_j \otimes (h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) & (j_1 \neq j) \end{cases}$$

ここで、$h_i \in H_{j_i}^{\circ}, j_1 \neq \cdots \neq j_n$ である。

この V_j を用いて、$\sigma_j : A_j \to L(H)$ ($L(H)$ は、H 上の、adjoint を持つ B-module map 全体のなす C^*- 環) を、

$$\sigma_j(x) = V_j^{-1}(\pi_j(x) \otimes 1)V_j$$

で定義すると、これは *- 準同型となる。

以上の準備のもとで、$(A_j, E_j) \quad (j = 1, 2)$ の制限融合積を、$L(H)$ の中で $\sigma_1(A_1) \cup \sigma_2(A_2)$ で生成される C^*- 環で定義し、$(A_1, E_1) \underset{B}{*} (A_2, E_2)$ と書く。

[注意]
先に定義した σ_j 達については、

$$\sigma_1(b) = \sigma_2(b) \quad b \text{ は } B \text{ の任意の元}$$

が成り立っている。従って、C^*- 環の制限融合積を上述のように定義するのは、妥当である。
またこのことから、B は $(A_1, E_1) \underset{B}{*} (A_2, E_2)$ の C^*- 部分環とみなすことが出来る。

2. C^*- 環の制限融合積の基本的な性質

[性質 2.1]
$(A_1, E_1) \underset{B}{*} (A_2, E_2)$ から B の上へのノルム 1 の射影 ($E_1 * E_2$ と書かれる) で、以下の性質を持つものが存在する。
(i) $(E_1 * E_2) \circ \sigma_j = E_j \quad (j = 1, 2)$
(ii) $n \in \mathbb{N}, j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_n, a_i \in \ker E_{j_i}$ のとき、$(E_1 * E_2)(\sigma_{j_1}(a_1) \cdots \sigma_{j_n}(a_n)) = 0$ である。
(iii) $c \in (A_1, E_1) \underset{B}{*} (A_2, E_2)$ が、条件「任意の $a \in (A_1, E_1) \underset{B}{*} (A_2, E_2)$ について、$(E_1 * E_2)(a^* c^* c a) = 0$」を満たすならば、$c = 0$ である。

[注意 2.2]
τ を B 上のトレースで、$\tau \circ E_j$ が A_j 上の忠実なトレースになるものとする。このとき、$\tau \circ (E_1 * E_2)$ は $(A_1, E_1) \underset{B}{*} (A_2, E_2)$ 上の忠実なトレースになることがわかる。

3. 行列環を材料とした制限融合積のいくつかの例について

現時点での興味は、A_1, A_2 として行列環、B として有限次元可換環を用意し、さらにノルム 1 の射影を与えて具体的に制限融合積を構成したときに、どのような C^*- 環が出てくるか、ということである。

これらの実例のいくつかについては、従来からある C^*- 環との関係がわかった。

主要命題は、以下の 2 つである。

命題 3.1

$$(M_k \otimes M_m) \underset{\mathbb{C}^m}{*} (M_l \otimes M_m) \simeq (C_r^*(\mathbb{F}_{m-1}) * M_k * M_l) \otimes M_m$$

(右辺の $*$ は、トレースに付随する制限自由積を表す。)

ここで、$\{e_{ij}\}_{1\le i,j\le k}, \{f_{ij}\}_{1\le i,j\le m}, \{g_{ij}\}_{1\le i,j\le l}, \{h_{ij}\}_{1\le i,j\le m}$ を各々 M_k, M_m, M_l, M_m の行列単位とするとき、$\mathbb{C}^m$ は、

$$\mathbb{C}^m \ni (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j (1 \otimes f_{jj}) \in M_k \otimes M_m$$

$$\mathbb{C}^m \ni (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j (1 \otimes h_{jj}) \in M_l \otimes M_m$$

として、$M_k \otimes M_m, M_l \otimes M_m$ の部分環とみなしている。

また、ノルム 1 の射影 E_1, E_2 は、各々以下のように定義されている。

$$E_1(e_{ij} \otimes f_{pq}) = \begin{cases} (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ p\text{番目}}}{\frac{1}{k}}, 0, \cdots, 0) & (i = j \text{かつ} p = q) \\ 0 & (i \neq j \text{または} p \neq q) \end{cases}$$

$$E_2(g_{ij} \otimes h_{pq}) = \begin{cases} (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ p\text{番目}}}{\frac{1}{l}}, 0, \cdots, 0) & (i = j \text{かつ} p = q) \\ 0 & (i \neq j \text{または} p \neq q) \end{cases}$$

命題 3.2

$$(M_n, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_2, E_2) \simeq \mathcal{O}_{n-1} \otimes M_2 \quad (n \geq 3)$$

ただし、$\{e_{ij}\}_{1\le i,j\le n}, \{f_{ij}\}_{1\le i,j\le 2}$ を各々 M_n, M_2 の行列単位とするとき、$\mathbb{C}^2$ は、

$$\mathbb{C}^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 (e_{22} + \cdots e_{nn}) \in M_n$$

$$\mathbb{C}^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{22} \in M_2$$

として、M_n, M_2 の部分環とみなしている。

また、ノルム 1 の射影 E_1, E_2 は、各々以下のように定義されている。

$$E_1(e_{ij}) = \begin{cases} (1, 0) & (i = j = 1 \text{のとき}) \\ (0, \frac{1}{n-1}) & (i = j \geq 2 \text{のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{のとき}) \end{cases}$$

$$E_2(f_{ij}) = \begin{cases} (1,0) & (i=j=1\text{のとき}) \\ (0,1) & (i=j=2\text{のとき}) \\ 0 & (i \neq j\text{のとき}) \end{cases}$$

大雑把に言えば、命題 3.1、命題 3.2 共に、生成元とその間の関係に着目すれば証明出来る。ここでは、命題 3.2 の成立する理由だけを簡単に述べておく。

[注意]
「$E_j(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (j=1,2)$」という条件のもとでは、実際には σ_j 達は単射になることがわかる。今扱っている具体例での E_j 達は全てこの条件を満たしているので、σ_j は省略することにする。

[命題 3.2 の説明]
$A = (M_n, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_2, E_2) \quad (n \geq 3)$ とおく。
すると、$A \simeq f_{11}Af_{11} \otimes M_2$ であるから、

$$f_{11}Af_{11} \simeq \mathcal{O}_{n-1}$$

を示すことが目標となる。

まず、次のような同一視がなされていることに注意する。

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} e_{11} = f_{11} \\ e_{22} + \cdots e_{nn} = f_{22} \end{cases}$$

A はその定義から、"e_{ij} 達と f_{ij} 達を有限個交互にかけあわせたもの" 全体で張られているが、上述の ($\clubsuit$) の影響で、このような積が全て生き残っているわけではない。

例えば、

$$\begin{aligned} e_{12}f_{12} &= e_{12}e_{22}f_{11}f_{12} \\ &= e_{12}(e_{22} + \cdots + e_{nn})f_{11}f_{12} \\ &= e_{12}f_{22}f_{11}f_{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

これらの考察から、

$$f_{11}Af_{11} = C^*(f_{12}e_{21}, f_{12}e_{31}, \cdots, f_{12}e_{n1})$$

であることがわかる。

(例えば $f_{12}e_{23}f_{21} \in f_{11}Af_{11}$ は、$f_{12}e_{23}f_{21} = f_{12}e_{21}e_{23}f_{21} = f_{12}e_{21}(f_{12}e_{31})^*$ として復元出来る。)

さて、この生成元について、(♣) に注意して計算すると、

$$\begin{aligned}(f_{12}e_{j1})^*(f_{12}e_{j1}) &= e_{1j}f_{21}f_{12}e_{j1} \\ &= e_{1j}f_{22}e_{j1} \\ &= e_{1j}(e_{22}+\cdots+e_{nn})e_{j1} \\ &= e_{11} = f_{11} \quad (2 \le j \le n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n}(f_{12}e_{j1})(f_{12}e_{j1})^* &= \sum_{j=2}^{n} f_{12}e_{j1}e_{1j}f_{21} \\ &= \sum_{j=2}^{n} f_{12}e_{jj}f_{21} = f_{11}\end{aligned}$$

となり、 $f_{11}Af_{11} \simeq \mathcal{O}_{n-1}$ が従う。

参考文献

[1]. W.L.Paschke and N.Salinas, *C^*-algebras associated with free products of groups*, Pacific J. Math. **82**(1979).

[2]. D.Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras*, in Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, Springer Lecture notes in Mathematics No.**1132**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, (1985).