数理解析研究所講究録
1046 巻 1998 年 36-44

C^*-環の写像の lifting 問題について

新潟大学教育学部　古谷　正 (Tadasi Huruya)

C^*-環の商環への写像の lifting 問題を研究するとき、定義域が有限次元の空間の lifting が重要な役割を果たしてきた ([1],[3],[6])。ここでは、定義域が有限次元の空間の lifting 問題のみを扱う。Robertson-Smith [14] は有限次元の operator system から C^*-環の商環への completely positive unital 写像は、任意の n について、n-positive な lifting を持つことを証明した。そこで、いわば $n=\infty$ にあたる completely positive な lifiting の場合はどうかという問題が考えられる。ここでは、つぎのような具体例を示す。

２つの生成元をもつ自由群の群 C^*-環 $C^*(F_2)$ と reduced 群 C^*-環を $C_r^*(F_2)$ とする。$C_r^*(F_2)$ の生成元 $\{\lambda(u),\lambda(v)\}$ の生成する５次元の operator system を E とし、E の $C_r^*(F_2)=C^*(F_2)/J$ への埋め込みを ϕ とする。ここでは、$\phi: E\to C^*(F_2)/J$ は completely positive unital な lifting をもたないことを示す。

また、lifting 問題と operator system の maximal tensor 積の関係を調べる。

１． 準備

C^*-環 A,B に対して、 $A\otimes B$ で minimal C^* tensor 積を、$A\otimes_{max} B$ で maximal C^* tensor 積を表す。任意の C^*-環 B に対して, 常に $A\otimes B=A\otimes_{max} B$ を満たす C^*-環 A は nuclear であると呼ぶ [12]。

以下では、C^*-環はすべて単位元 1 をもち、イデアルはすべて閉じた両側のみを考える。また、 $L(H)$ を無限次元の separable Hilbert 空間 H の有界作用素全体とする。

C^*-環 A の線形部分空間 E が $E^*=E$ かつ $1\in E$ を満たすとき、E を operator system と呼ぶ。特に、行列環 M_n の operator system を matrix system と呼ぶことがる。C^*-環 A_i の operator system E_i $i=1,2$ に対して、$E_1\otimes E_2\subseteq A_1\otimes A_2$ で minimal tensor 積を定義する。また、代数的テンソル積 $E_1\odot E_2$ 上に、max ノルムを

$$x=\sum_1^n x_k^{(1)}\otimes x_k^{(2)},\quad ||x||_{max}=\sup||\sum_1^n\theta_1(x_k^{(1)})\theta_2(x_k^{(2)})||$$

ここで、sup は、$\theta_i: E_i\to L(H)$ で commuting range を持つ、すなわち、$\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)=\theta_2(x_2)\theta_2(x_1)$ を満たす completely positive unital 写像の pair (θ_1,θ_2) 全体にわたる。十分多くの (θ_1,θ_2) に結びついた表現の direct sum $\gamma: E_1\odot E_2\to L(H)$ を考えることにより

$$||x||_{max}=||\gamma(x)||\quad x\in E_1\odot E_2$$

の $\gamma(E_1\odot E_2)$ の閉包を $E_1\otimes_{max} E_2$ で表し、E_1 と E_2 の maximal tensor 積と呼ぶ [13]。E_1, E_2 が C^*-環のとき、C^*-環の maximal tensor 積に一致する。また、E_2 が nuclear C^*-環のとき、任意の E_1 に対して、$E_1\otimes E_2=E_1\otimes_{max} E_2$ が成立する [13]。この operator system の maximal tensor 積は、doubly commuting operator の joint normal dilation への応用が知られている [13]。

C^*-環 A に対して、$A \subseteq B$ を満たす任意の C^*-環 B から A へのノルム 1 の projection が存在するとき、A を injective と呼ぶ。$L(H)$ は injective である。

C^*-環 A に対して、任意の C^*-環 B の商環 B/J への completely positive unital な $\phi : A \to B/J$ が与えられたとき、A の任意の有限次元の operator system E への制限 $\phi_{|E} : E \to A \to B/J$ が completely positive unital な lifting 、すなわち、$\psi : E \to B$ で $\phi = \pi \circ \psi$ 満たす completely positive unital な写像 ψ 写像が存在するとき、A は local lifting property をもつと呼ぶ [11]。ただし、πは商写像 $\pi : B \to B/J$ を表す。任意個の生成元をもつ自由群 F の群 C^*-環 $C^*(F)$ は local lifting property をもつ ([11] の Lemma 2.1)。つぎの Kirchberg と Choi の結果は、以下の key となる。

定理A ([11] の Proposition 1.1). C^*-環 A が injective で、C^*-環 B が local lifting property をもつとき、

$$A \otimes B = A \otimes_{max} B.$$

定理B ([2] の Thoerem 3.1). C^*-環 A から B への completely positive でノルムが 1 以下の写像 ϕ に対して, $\mathcal{M}_\phi = \{a \in A : \phi(a^*a) = \phi(a)^*\phi(a),\ かつ \phi(aa^*) = \phi(a)\phi(a)^*\}$ を ϕ の maltiplicative domain とよぶ。$a \in \mathcal{M}_\phi$ なら、任意の $b \in A$ に対して, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, $\phi(ba) = \phi(b)\phi(a)$ が成立する。

2. 例

例 1. $C_r^*(F_2)$ の生成元 $\{\lambda(u), \lambda(v)\}$ の生成する 5 次元の operator system を E とし、E の $C_r^*(F_2) = C^*(F_2)/J$ への埋め込みを ϕ とする。$\phi : E \to C^*(F_2)/J$ は completely positive unital な lifting をもたない。

証明

Wassermann の結果 [15] から、short exact 列

$$0 \to J \to C^*(F_2) \to C_r^*(F_2) \to 0$$

に対して

$$0 \to J \otimes C^*(F_2) \to C^*(F_2) \otimes C^*(F_2) \to C_r^*(F_2) \otimes C^*(F_2) \to 0$$

は exact でない。よって Kirchberg の結果 ([11] の Proposition 2.2) から $C_r^*(F_2)$ は local lifting property をもたない。すなわち、定理Aにより

$$C_r^*(F_2) \otimes L(H) \neq C_r^*(F_2) \otimes_{max} L(H).$$

ϕ が completely positive unital lifting $\psi : E \to C^*(F_2)$ をもつと仮定する。

$$\begin{array}{llllll} \Phi : & E \otimes L(H) & \to & C^*(F_2) \otimes L(H) = C^*(F_2) \otimes_{max} L(H) & \to & C_r^*(F_2) \otimes_{max} L(H) \\ & x \otimes y & \to & \psi(x) \otimes y & \to & \phi(x) \otimes y \end{array}$$

は completely positive である。π を Hilbert 空間 K 上の $C_r^*(F_2)\otimes_{max}L(H)$ の faithful な表現とする。$\tilde{\Phi}: C_r^*(F_2)\otimes L(H)\to L(K)$ を Φ の $C_r^*(F_2)\otimes L(H)$ への completely positive な拡張とする。$\tilde{\Phi}(\lambda(u)\otimes 1)=\Phi(\lambda(u)\otimes 1)=\pi(\lambda(u)\otimes 1)$ なので、

$$\tilde{\Phi}(1)=\tilde{\Phi}((\lambda(u)\otimes 1)^*(\lambda(u)\otimes 1))=\tilde{\Phi}(\lambda(u)\otimes 1)^*\tilde{\Phi}(\lambda(u)\otimes 1),$$

$$\tilde{\Phi}(1)=\tilde{\Phi}((\lambda(u)\otimes 1)(\lambda(u)\otimes 1)^*)=\tilde{\Phi}(\lambda(u)\otimes 1)\tilde{\Phi}(\lambda(u)\otimes 1)^*.$$

よって、$\lambda(u)$ は $\tilde{\Phi}$ の multiplicative domain に属する。同様にして、$\lambda(v)$ も $\tilde{\Phi}$ の multiplicative domain に属する。$\{\lambda(u),\lambda(v)\}$ は $C_r^*(F_2)$ を生成するので

$$\tilde{\Phi}(x\otimes 1)=\pi(x\otimes 1)\quad x\in C_r^*(F_2).$$

従って、$\tilde{\Phi}$ は $C_r^*(F_2)\otimes L(H)$ から $C_r^*(F_2)\otimes_{max}L(H)$ への自然な準同型となり、

$$C_r^*(F_2)\otimes L(H)=C_r^*(F_2)\otimes^{max}L(H)$$

が成立。これは条件に反する。よって、ϕ は completely positive unital lifting をもたない。

3. Lifting 定理

Effros-Haagerup の technique [6] と Kirchberg の結果 [11] を使って、つぎの定理を得る。

定理2. 有限次元の operator system E から、local lifting property をもつ C^*-環 A の商環 A/J へ completely positive unital な写像 ϕ に対して、つぎの (i) (ii) は同値。

(i) ϕ が completely positive unital lifting をもつ。

(ii) $\Phi: E\otimes C\to A\otimes_{max}C$

$\qquad x\otimes y\to\phi(x)\otimes y$

が任意の injective C^*-環 C に対して completely positive である。

証明

(ii) $\Rightarrow$ (i). E が有限次元なので $\psi=\psi^*$ を満たす ϕ の lifting ψ が存在する。π を商写像 $\pi: A\to A/J$ とする。 J の quasicentral approximate unit $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を選び、

$$\psi_\lambda(y)=(1-e_\lambda)^{\frac{1}{2}}\psi(y)(1-e_\lambda)^{\frac{1}{2}}$$

と置く。Effros-Haagerup ([6] の Theorem 3.2) の証明から、$\lim_\lambda\|\psi_\lambda\|_{CB}=1$ を示せばよい。

上の等式が成立しないと仮定する。このとき

$$\limsup_\lambda\|\psi_\lambda\|_{CB}>1+\varepsilon.$$

となる $\varepsilon>0$ が存在する。$\{\psi_\lambda\}$ を subnet に置き換えることにより、すべての $\lambda\in\Lambda$ について、$\|\psi_\lambda\|_{CB}>1+\varepsilon$ としてよい。従って、任意の λ に対して、

$$\|\psi_\lambda\otimes id_\lambda(x_\lambda)\|\geq\|\psi_\lambda\|_{CB}-\frac{\varepsilon}{2}\geq 1+\frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす正の整数 n_λ と $x_\lambda \in E \otimes M_{n_\lambda}$ で $\| x_\lambda \| \leq 1$ となる元が存在する。ここで M_{n_λ} は $n_\lambda \times n_\lambda$ 行列環を、id_λ は M_{n_λ} の恒等写像を表す。$C = \{(y_\lambda) : y_\lambda \in M_{n_\lambda}, \sup_\lambda \| y_\lambda \| < \infty\}$ とおく。$y = (y_\lambda) \in C$ と $\lambda \in \Lambda$ に対して、$p_\lambda(y) = y_\lambda$ で定義される C から M_{n_λ} 上への準同型を p_λ で表す。

C が injective であり、仮定から $E \otimes C$ から $(A/J) \otimes^{max} C$ への completely positive untal 写像 Φ で、$\Phi(a \otimes b) = \phi(a) \otimes b$ を満たす写像 Φ が存在する。従って、定理A から、

$$A \otimes C = A \otimes^{max} C.$$

$\pi \otimes^{max} id_C$ を $A \otimes C$ から $(A/J) \otimes^{max} C$ への $(\pi \otimes^{max} id_C)(a \otimes b) = \pi(a) \otimes b$ を満たす completely positive unital 写像とする。このとき

$$\psi_\lambda \otimes id_\lambda(x_\lambda) = id_A \otimes p_\lambda(\psi_\lambda \otimes id_C(x)),$$

従って

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \| \psi_\lambda \otimes id_\lambda(x_\lambda) \| \leq \| \psi_\lambda \otimes id_C(x) \| .$$

一方、

$$\psi_\lambda \otimes id_C(x) = (1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} \otimes 1(\psi \otimes id_C(x))(1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} \otimes 1.$$

$J \otimes C$ の quasicentral approximate unit $(e_\lambda \otimes 1)_{\lambda \in \Lambda}$ は
$(1 \otimes 1 - e_\lambda \otimes 1)^{\frac{1}{2}} = (1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} \otimes 1$ を満たすので、

$$\begin{aligned} \lim_\lambda \| \psi_\lambda \otimes id_C(x) \| &= \| \psi \otimes id_C(x) + J \otimes C \| \\ &= \| \psi \otimes id_C(x) + J \otimes^{max} C \| \\ &= \| \pi \otimes^{max} id_C(\psi \otimes id_C(x)) \| \quad (\text{[8] の Theorem 2 による}) \\ &= \| \Phi(x) \| \\ &\leq \| x \| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

これは矛盾。

(i) $\Rightarrow$ (ii). ψ を ϕ の completely positive unital lifting とする。商写像 $\pi : A \to A/J$ に対して、$\pi \otimes^{max} id_C(a \otimes b) = \pi(a) \otimes b$ を満たす completely positive unital な写像$\pi \otimes^{max} id_C : A \otimes^{max} C \to (A/J) \otimes^{max} C$ が存在する。$A \otimes C = A \otimes^{max} C$ なので、$\Phi(a \otimes b) = \pi \otimes^{max} id_C(\psi \otimes id_C(a \otimes b))$ で $\Phi : E \otimes C \to (A/J) \otimes^{max} C$ を定義する。Φ が求める写像である。

任意の C^*-環 A に対して、$C^*(F)$ から A 上への準同型が存在する自由群 F が選べることから、上の定理より、つぎの結果を得る。

系 3．有限次元の operator system E から、C^*-環 A の商環 A/J へ completely positive unital な ϕ に対して、

$$\begin{aligned} \Phi : \quad E \otimes C &\to A \otimes_{max} C \\ x \otimes y &\to \phi(x) \otimes y \end{aligned}$$

が任意の injective C^*-環 C に対して completely positive なら、 ϕ が completely positive unital lifting をもつ。

4. Operator system の maximal tensor 積

補題4. E を M_n の matrix system, $\pi : C \to L(H)$ を C^*-環 C の表現, $\phi : E \to \pi(C)'$ で、$\Phi : E \otimes C \to L(H)$ は $\Phi(x \otimes y) = \phi(x)\pi(y)$ を満たす completely positive unital な 写像とする。このとき、ϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi} : M_n \to \pi(C)'$ が存在する。

証明

$E \otimes C \subseteq M_n \otimes C$ で $L(H)$ が injective なので、Φ の $M_n \otimes C$ への completely positive な拡張 $\Psi : M_n \otimes C \to L(H)$ が存在する。$y \in C$ に対して、$\Psi(1 \otimes y) = \Phi(1 \otimes y) = \pi(y)$ なので、

$$\Psi((1 \otimes y)^*(1 \otimes y)) = \Psi(1 \otimes y)^*\Psi(1 \otimes y), \ \Psi((1 \otimes y)(1 \otimes y)^*) = \Psi(1 \otimes y)\Psi(1 \otimes y)^*$$

従って、 定理Aにより、$x \in M_n$, $y \in C$ に対して、

$$\pi(y)\Psi(x \otimes 1) = \Psi(1 \otimes y)\Psi(x \otimes 1) = \Psi(x \otimes y) = \Psi(x \otimes 1)\Psi(1 \otimes y) = \Psi(x \otimes 1)\pi(y).$$

従って、$\tilde{\phi}(x) = \Psi(x \otimes 1) \in \pi(C)'$ が求める写像である。

補題5. E を operator system, C を C^*-環とする。$z = \sum_i x_i \otimes y_i \in E \odot C$ に対して,

$$||z||_{max} = \sup\{||\sum_i \phi(x_i)\pi(y_i)|| : \phi : E \to L(H), \pi : C \to L(H)\} \qquad (*)$$

ここで sup は ϕ と π は commuting range をもつ completely positive unital と表現の pair (ϕ, π) 全体にわたる。

証明

$\phi : E \to L(H)$, $\psi : C \to L(H)$ を commuting range をもつ completely positive unital な写像とする。(π, K, V) を ψ の minimal Stinespring 表現、すなわち、$\psi(y) = V^*\pi(y)V \ \ y \in C$. V は isometry である。また Arveson の定理 ([13] の Theorem 10.7) から unital *-homonorphism

$$\gamma : (V^*\pi(C)V)' \to \pi(C)' \cap \{VV^*\}'$$

が存在し、$x \in E$ に対して、

$$V\phi(x) = \gamma(\phi(x))V$$

を満たす。$\tilde{\phi}(x) = \gamma(\phi(x))$ $x \in E$ とおく。$\pi : C \to L(K)$, $\tilde{\phi} : E \to L(K)$ は commuting range をもつ。また

$$\phi(x)\psi(y) = \phi(x)V^*\pi(y)V = V^*\gamma(\phi(x))\pi(y)V = V^*\tilde{\phi}(x)\pi(y)V.$$

さらに

$$||\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i)|| \leq ||V^*||||\sum_i \tilde{\phi}(x_i)\pi(y_i)||||V|| = ||\sum_i \tilde{\phi}(x_i)\pi(y_i)||.$$

ここで (*) の右辺を $||z||_{rep}$ とおくと、

$$||z||_{rep} \geq ||z||_{max}$$

逆の不等式は明きらかである。

補題6．E を M_n の matrix system, C を C^*-環で、$E \otimes_{max} C \neq E \otimes C$ とする。このとき、

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E \otimes C & \rightarrow & A \otimes_{max} C \\ & x \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes y \end{array}$$

が completely positive でない E から separable C^*-環 A への completely positive unital な写像 ϕ が存在する。

証明

もし任意の commuting range をもつ completely positive unital な $\phi : E \rightarrow L(H)$ と表現 $\pi : C \rightarrow L(H)$ に対して、ϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi} : M_n \rightarrow \pi(C)'$ をもつとすると、

$$E \otimes_{max} C \subseteq M_n \otimes_{max} C = M_n \otimes C$$

となる。よって、commuting range をもつϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi} : M_n \rightarrow \pi(C)'$ をもたない completely positive unital な写像 $\phi : E \rightarrow \pi(C)'$ と表現 $\pi : C \rightarrow L(H)$ が存在する。

$\phi(E) \subseteq A$ となるの $\pi(C)'$ の separable な C^*-部分環 A を選ぶ。ここで

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E \otimes C & \rightarrow & A \otimes_{max} C \\ & x \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes y \end{array}$$

が completely positive とする。

$$\begin{array}{rccccccc} \tilde{\Phi}: & E \otimes C & \rightarrow & A \otimes_{max} C & \rightarrow & A \otimes_{max} \pi(C) & \rightarrow & L(H) \\ & x \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes \pi(y) & \rightarrow & \phi(x)\pi(y) \end{array}$$

は completely positive である。

補題4によって ϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi} : M_n \rightarrow \pi(C)'$ が存在し、ϕ の性質に反する。

系7．matrix system E, C^*-環 C に対して、次は同値。

(i) $E \otimes_{max} C = E \otimes C$,

(ii) 任意の C^*-環 A への completely positive unital 写像 ϕ に対して

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E \otimes C & \rightarrow & A \otimes_{max} C \\ & x \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes y \end{array}$$

は completely positive である。

補題8．B と C を $B \otimes_{max} C \neq B \otimes C$ を満たす C^*-環とする。このとき E を含む任意の B の C^*-部分環 A への埋め込み ϕ に対して

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E \otimes C & \rightarrow & A \otimes_{max} C \\ & x \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes y \end{array}$$

は completely positive でない B の有限次元 operator system E が存在する。

証明

$$||z||_{max,\,B} > ||z||_{min}$$

を満たす $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \;\; x_i \in B,\; y_i \subset C$ が存在する。ただし、$||z||_{max,\,B}$ は $B \otimes_{max} C$ における z のノルムを、$||z||_{min}$ は z の $B \otimes C$ における z のノルムを表す。

E を $\{1, x_1, x_1^*, \cdots, x_n, x_n^*\}$ の線形結合とする。もし Φ が completely positive とする。$||z||_{max,\,A}$ を $A \otimes_{max} C$ の z のノルムとすると、

$$||z||_{min} \geq ||\Phi(z)|| = ||z||_{max,\,A} \geq ||z||_{max,\,B}$$

これは、はじめのノルムの不等式に反する。

補題9．C を non-nuclear C^*-環 とする。このとき

$$E \otimes_{max} C \neq E \otimes C$$

を満たす matrix system E が存在する。

証明

C が non-nuclear なので $\pi(C)$" が injective でない表現 π が存在する。Choi-Effros ([4] の Theorem 3.4) より 、行列環 M_n の matrix system E で、completely positive unital な $\phi : E \rightarrow \pi(C)'$ で$\pi(C)'$ に値をもつ M_n への completely positive な拡張を持たない写像 ϕ が存在する。いま $E \otimes_{max} C = E \otimes C$ とする。

$$\begin{array}{rccccc} \Phi: & E \otimes C & \rightarrow & \pi(C)' \otimes_{max} C & \rightarrow & L(H) \\ & x \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes y & \rightarrow & \phi(x)\pi(y) \end{array}$$

は completely positive である。補題4より ϕ は $\pi(C)'$ に値をもつ M_n への completely positive な拡張ををもつことになり ϕ の性質に反する。よって系7より求める結果が得られる。

$M = \{(x_n) : x_n \in M_n \;\; \sup_n ||x_n|| < \infty\}$, $K(H)$ を Hilbert 空間 H 上のコンパクト作用素全体とする。Junge-Pisier の結果 [10] により、$L(H) \otimes L(H) \neq L(H) \otimes_{max} L(H)$, $M \otimes M \neq M \otimes_{max} M$, Wassermann の結果 [16] により、$(L(H)/K(H)) \otimes L(H) \neq (L(H)/K(H)) \otimes_{max} L(H)$, $C_r^*(F_2) \otimes L(H) \neq C_r^*(F_2) \otimes_{max} L(H)$. また $M, L(H)$ は injective である。separable な C^*-環 A に対して、可算個の生成元をもつ自由群 F_∞ の C^*-群環 $C^*(F_\infty)$ から A 上の準同型が存在する。よって、定理２、補題６，８、９から、例１以外に有限次元の operator system E を定義域とする completely positive unital map $\phi : E \rightarrow C^*(F_\infty)/J$ で completely positive unital な lifting をもたない写像の例が作れる。

参考文献

[1] W. Arveson, *Notes on extensions of C^*-algebras,* Duke Math. J., **44** (1977), 329–355.

[2] M.-D. Choi *A Schwarz inequality for positive linear maps on C^*-algebras,* Ill. J. Math., **18** (1974), 565–574.

[3] M.-D. Choi and E.G. Effros *The completely positive lifting problem for C^*-algebras,* Ann. of Math., **104** (1976), 585–609.

[4] ——————————, *Injectivity and operator spaces,* J. Funct. Anal., **24**, (1977), 156–209.

[5] ——————————, *Nuclear C^*-algebras and injectivity: the general case,* Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 443–446

[6] E.G. Effros and U. Haagerup *Lifting problems and local reflexivity for C^*-algebras,* Duke Math. J., **52** (1985), 103–128.

[7] E.G. Effros and E.C. Lance, *Tensor products of operator algebras,* Adv. in Math., **25** (1977), 1–34.

[8] A. Guichardet, *Tensor products of C^*-algebras,* Dolk. Akad. Nauk SSSR, **160** (1965), 986–989.

[9] U. Haagerup, *Injectivity and decomposition of completely bounded maps,* Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, (Lecture Notes in Mathematics **1132**(1985), 170–222.

[10] M. Junge and G. Pisier, *Bilinear forms on exact operator spaces and $L(H) \otimes L(H)$,* Geom. Funct. Anal., **5**(1995), 329–363.

[11] E. Kirchberg, *On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^*-algebras,* Invent. Math., **112** (1993), 449–489.

[12] C. Lance, *On nuclear C^*-algebras,* J. Funct. Anal., **12** (1973), 157–176.

[13] V.I. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations,* Pitman Research Notes in Math., No 146 (Longman Sci. and Tech., 1986).

[14] A.G. Robertson and R.R. Smith, *Liftings and extensions of maps on C^*-algebras,* J. Operator Theory, **21** (1989), 117–131.

[15] S. Wassermann, *On tensor products of certain group C^*-algebras,* J. Funct. Anal., **23** (1976), 239–254.

[16] ———————, *A pathology in the ideal space of* $L(H) \otimes L(H)$, Indiana Univ. Math. J., **27** (1978), 1011–1020