数理解析研究所講究録
1046 巻 1998 年 29-35

双対 C^*-環の接合積とその応用

関西大学工学部 楠田 雅治 (Masaharu KUSUDA)

1. Introduction.

[1] で, Banach と Saks は $L^p([0,1])$ $1 < p < \infty$ における任意の有界点列に対して、その部分列をうまく選ぶと, その算術平均がノルム位相に関して収束するようにできることを示した。一般に、バナッハ空間において任意の有界点列が与えられたとき、その部分列をうまく選ぶと, その算術平均がノルム位相に関して収束するようにできるとき、そのバナッハ空間は Banach-Saks property を持つという。Banach-Saks property をもつバナッハ空間は反射的であることが知られている。よって $L^1([0,1])$ は Banach-Saks property をもたないことがわかる。しかしながら、以下に述べるこれより弱い類似の性質をもつ。

今 X をバナッハ空間とする。$\{x_n\}$ を Xの点列で弱位相で 0 に収束するものが与えられたとき、部分列 $\{x_{n(k)}\}$ をうまく選んで

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|x_{n(1)} + \cdots + x_{n(k)}\| = 0,$$

とできるとき、Xは **weak Banach-Saks property** を持つという。$L^1([0,1])$ が weak Banach-Saks property をもつことは Szlenk [9] によって示された。[2] において, Chu は局所コンパクト、ハウスドルフ空間上の、無限遠点で消える複素数値連続関数のつくるバナッハ空間で weak Banach-Saks property をもつものの非可換化として、weak Banach-Saks property をもつ C^*-環 の研究を系統的に行った。実際、彼は次のような weak Banach-Saks property を持つ C^*-環の特徴付けを得た。

定理 ([2, Theorem 2]) A を C^*-環とする。そのとき、次の条件は同値である:

(1) A は weak Banach-Saks property をもつ。

(2) A は散乱的で $c_0(A)$ は $C_0(\omega^\omega)$ の isometric copy を含まない。

(3) A は散乱的かつ $C_0(\omega^\omega)$ の isometric copy を含まない。

(4) A の各自己共役元 a に対して、$\sigma(a)^{(k)}$ が空集合となるような自然数 k が存在する。ここで $\sigma(a)$ は a のスペクトルを表す。
(5) A はI型で、$\widehat{A}^{(k)}$ が空集合となるような、ある自然数 k が存在する。ここで $\widehat{A}^{(0)}=\widehat{A}$ は A のスペクトルで、$\widehat{A}^{(n)}$ は$\widehat{A}^{(n-1)}$の集積点全体からなる$\widehat{A}$の部分集合である。

(A,G,α) を C^*-力学係とする。ここで C^*-力学係とは C^*-環 A、局所コンパクト群 G、G から A の自己同型写像群への群準同型写像 αの三つの組のことで、$G\ni t\to\alpha_t(x)$ が 各 $x\in A$ に対してノルム位相に関して連続になるものである。G による A の C^*-接合積 を $A\times_\alpha G$ で表す。以下において、A が weak Banach-Saks property を持つとき、どのような条件のもとで $A\times_\alpha G$ が weak Banach-Saks property を持つかをという問題を考えたい。このとき必要となるのは、Chu が上でのべた定理を証明するときに同時に得られた

「C^*-環 A が weak Banach-Saks property を持つための必要十分条件はイデアルの列 $I_1\subset\cdots\subset I_n\subset A$ が存在して剰余環 $I_2/I_1,I_3/I_2,\cdots,A/I_n$ が双対 C^*-環になることである」

という特徴付けである。こうして, まず双対 C^*-環の接合積を調べることが必要となる。すなわち、A が 双対 C^*-環であるとき、どのような条件のもとで $A\times_\alpha G$ が 双対 C^*-環になるかを調べる。そのあと、これを応用して上の問題の解答を与える。

2. 双対 C^*-環.

このセクションでは双対 C^*-環に関する結果を述べる。C^*-環 A に対して, $\widehat{A}$で A のスペクトル、すなわち A のゼロでない既約表現 π のユニタリー同値類 $[\pi]$ の集合に Jacobson 位相を与えたものを表す。$\widehat{A}$ は局所コンパクト空間で, 必ずしもハウスドルフ空間とは限らない。

さて、A を C^*-環とし A の部分集合 Mに対して、

$$R(M)=\{x\in A\mid Mx=\{0\}\},\quad L(M)=\{x\in A\mid xM=\{0\}\}$$

とおく。そのとき次の条件は同値：

(1) A の任意の閉左イデアル Iに対して、$L(R(I)) = I$ が成り立つ。

(1)' A の任意の閉右イデアル Iに対して、$R(L(I)) = I$ が成り立つ。

(2) A の極小左イデアルの和は A で稠密である。

(2)' A の極小右イデアルの和は A で稠密である。

(3) A は、あるヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体のつくる C^*-環の C^*-部分環と同型である。

(4) A は 適当な elementary C^*-環の族の直和と同型である。

(5) A の任意の極大可換 C^*-部分環のスペクトルは離散位相空間である。

上の条件のどれかを満たす C^*-環は双対 C^*-環と呼ばれ、Kaplansky によって導入された。定義から、双対 C^*-環は liminal であることがわかる。さらに、双対 C^*-環の位相的な特徴付けとして、C^*-環が双対 C^*-環になるための必要十分条件は、I 型 C^*-環であってかつそのスペクトルが離散的であることも容易にわかる。

一般に C^*-環の理論において、 A のイデアル Iに対して、A がある性質をもつことと、I、 A/I がともにそれと同じ性質をもつことが同値かどうかを考えることは興味ある問題である。このタイプの結果としては、たとえば、A が I 型であることと、I、 A/I がともに I 型であることが同値であるという結果、または A が核型であることと、I、 A/I がともに核型であることが同値であるという結果などがよく知られている。今、双対 C^*-環に対してこのタイプの問題を考え、次の結果を得る。

定理 2.1. A を C^*-環とする。そのとき、次の条件は同値である:

(1) A は双対 C^*-環である。

(2) A のイデアル Iが存在して、I と A/I がともに双対 C^*-環かつ $I = A^{**}p \cap A$ を満たす A^{**} の中の 開射影子 p は A に対する multiplier である。

(3) A の任意のイデアル Iに対して、I と A/I がともに双対 C^*-環かつ $I = A^{**}p \cap A$ を満たす A^{**} の中の 開射影子 p は A に対する multiplier になる。

(4) A はＩ型 C^*-環で、$\widehat{A}$ は T_1-空間　かつ A^{**} の中心にある任意の開射影子は A に対する multiplier である。

一般に、A のイデアル I と A/I がともに双対 C^*-環であっても、A が双対的になるとは限らない。たとえば、Hを無限次元のヒルベルト空間とし、$C(H)$ を H上のコンパクト作用素全体、1 を恒等作用素とするとき、C^*-環として $A = C(H) + \mathbb{C} \cdot 1$ を考える。Iとして、$I = C(H)$ をとる。そのとき、A/I と Iは双対 C^*-環であるが、A は双対的ではないことはすぐわかる。

3. C^*-接合積.

(A, G, α) を C^*-力学係とする。もし A が双対的ならば、そのとき A はＩ型 の C^*-環になる。したがって $A \times_\alpha G$ がＩ型であることが接合積が双対 C^*-環になるための必要条件になる。このために、αになんらかの条件を課して $A \times_\alpha G$ がＩ型になるようにする。これからその条件を述べる。C^*-力学係 (A, G, α) が与えられると、

$$(t, [\pi]) \in G \times \widehat{A} \to [\pi \circ \alpha_{t^{-1}}] \in \widehat{A}$$

と定義することによってα は G の$\widehat{A}$上の自然な作用を誘導する。これによって G は$\widehat{A}$に作用する位相変換群になる。この状況において、$\widehat{A}$の各点における等方部分群が単位元だけからなるとき、G は$\widehat{A}$に**自由に作用する**という。また次の写像

$$([\pi], t) \in \widehat{A} \times G \to ([\pi], [\pi \circ \alpha_{t^{-1}}]) \in \widehat{A} \times \widehat{A}$$

が固有、すなわち、コンパクト集合の逆像がコンパクトならば、G は$\widehat{A}$に**固有に作用する**という。

A がハウスドルフスペクトルをもつＩ型 C^*-環で G が$\widehat{A}$に自由かつ固有に作用するならば、$A \times_\alpha G$ はＩ型 C^*-環になることが知られている。

補題 3.1. (A, G, α) は C^*-力学係で、G は$\widehat{A}$に自由に作用すると仮定する。もし $\{[\pi]\} \subset \widehat{A}$が開集合であるような点 $[\pi] \in \widehat{A}$が存在するならば、G の位相は離散的である。特に$\widehat{A}$が離散的でならば、G の位相は離散的である。

証明 G の単位元が開集合であることがわかればよい。これは $[\pi]$ を固定したとき、

$$t \in G \to [\pi \circ \alpha_{t^{-1}}] \in \widehat{A}$$

は連続写像であり、G の単位元は $[\pi]$ の逆像だから開集合であることがわかる。 □

補題 3.2. (A, G, α) は C^*-力学係とする。もし $\widehat{A}$が離散的で G が$\widehat{A}$に自由に作用するならば、G は$\widehat{A}$に固有に作用する。

証明 G が$\widehat{A}$に自由に作用しているから

$$([\pi], t) \in \widehat{A} \times G \to ([\pi], [\pi \circ \alpha_{t^{-1}}]) \in \widehat{A} \times \widehat{A}$$

は単射であることがすぐわかる。$\widehat{A} \times \widehat{A}$は離散位相をもつから$\widehat{A} \times \widehat{A}$のコンパクト集合は有限集合で、上の写像によるその逆像も有限集合。 よってコンパクト集合の逆像がコンパクトであることがわかる。 □

こうして$\widehat{A}$が離散的場合、G が$\widehat{A}$に自由に作用することのみ仮定すれば、自動的に固有に作用することが成り立ち, そのとき I 型 C^*-環 A の接合積 $A \times_\alpha G$ は I 型 C^*-環になる。これを応用して次の定理を示すことができる。

定理 3.3. (A, G, α) を C^*-力学係とする。 G は$\widehat{A}$に自由に作用すると仮定する。そのとき、次の 2 つの条件は同値。

(1) A は双対 C^*-環である。

(2) G の位相は離散的かつ $A \times_\alpha G$ は双対 C^*-環である。

Iを A のα-不変イデアルとする。各 $x \in A$ に対して、 A から A/Iへの標準的な射影による x の像を $[x]$ で表す。G の A/Iへの作用$\overline{\alpha}$を

$$\overline{\alpha}_t([x]) = [\alpha_t(x)], \qquad x \in A$$

で定義する。こうして、C^*-力学係 $(A/I, G, \overline{\alpha})$ を得る。このとき $\overline{\alpha}$は$\widehat{A/I}$の上への自然な作用 G を誘導する。$A \times_\alpha G/I \times_\alpha G$ が $(A/I) \times_{\overline{\alpha}} G$ と同型になることはよく知られている (例えば [4, Proposition 12]) 。次の補題は定理 3.6 の証明で重要な役目を果たす。

補題 3.4. (A, G, α) を C^*-力学係、I は A のα-不変イデアルとする。α によって誘導された G の作用が$\widehat{A}$に自由に作用すると仮定する。そのとき、 G は$\widehat{I}$に自由に作用し、$\overline{\alpha}$によって誘導された G の作用は$\widehat{A/I}$に自由に作用する。

次の結果は Introduction で述べた Chu による特徴付けの一般化で、以下の定理の証明では本質的役割を果たす。

命題 3.5. (A, G, α) を C^*-力学係とする。そのとき、次の 2 つの条件は同値。

(1) A は weak Banach-Saks property をもつ。

(2) A のα-不変なイデアルの列 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset A$ が存在して剰余環 $I_2/I_1, I_3/I_2, \cdots, A/I_n$ が双対 C^*-環になる。

定理 3.6. (A, G, α) を C^*-力学係とする。 G は$\widehat{A}$に自由に作用すると仮定する。そのとき、次の 2 つの条件は同値。

(1) A は weak Banach-Saks property をもつ。

(2) G の位相は離散的かつ $A \times_\alpha G$ は weak Banach-Saks property をもつ。

この定理の (2)$\Longrightarrow$ (1) はすぐわかるので, (1)$\Longrightarrow$ (2) の証明の方針を以下簡単に述べて本稿を終わることにする。

A は weak Banach-Saks property をもてば、A のα-不変なイデアルの列 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset A$ が存在して剰余環 $I_2/I_1, I_3/I_2, \cdots, A/I_n$ が双対 C^*-環になる。そのとき G による I_kの接合積 $I_k \times_\alpha G$ を考えると、イデアルの列

$$I_1 \times_\alpha G \subset I_2 \times_\alpha G \subset \cdots \subset I_n \times_\alpha G \subset A \times_\alpha G$$

を得る。このとき補題 3.4 と定理 3.3 を使って $I_{k+1} \times_\alpha G \ / \ I_k \times_\alpha G$ が双対的であることを示すことができる。

References

1. S. Banach and S. Saks, *Sur la convergence forte dans les champs L^p*, Stydia. Math. **2** (1930), 51–57.
2. C.-H. Chu, *The weak Banach-Saks property in C^*-algebras*, Jour. Funct. Anal. **121** (1994), 1–14.
3. J. Dixmier, *C^*-algebras*, North Holland, New York, 1982.
4. P. Green, *The local structure of twisted covariance algebras*, Acta. Math. **140** (1978), 191–250.
5. I. Kaplansky, *The structure of certain operator algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 219–255.
6. M. Kusuda, *A characterization of ideals of C^*-algegbras*, Canad. Math. Bull. **33(4)** (1990), 455–459.
7. G. K. Pedersen, *C^*-Algebras and their Automorphism groups*, Academic press, London, 1979.
8. I. Raeburn and J. Rosenberg, *Crossed products of continuous trace C^*-algebras by smooth actions*, Trans. Amer.Math. Soc. **140** (1978), 191–250.
9. W. Szlenk, *Sur les suites faiblementes convergentes dans l'espace L*, Studia. Math. **25** (1965), 337–341.
10. M. Takesaki, *Covariant representations of C^*-algebras and their locally compact automorphism groups*, Acta. Math. **119** (1967), 273–303.