数理解析研究所講究録
1046 巻 1998 年 15-28

Almost commuting matrix の話題

千葉大学理学部　渚　勝 (Masaru Nagisa)

History

ここでは、 H. Lin の結果 (最後のセクション) の概略を紹介することを目的とする。この結果は、作用素の問題として端を発し、作用素の立場から様々な議論が行なわれているので、初めに、それらを概観することにする。殆んど可換な作用素に対して、近似することによって可換なものに取り換え可能かというタイプの問題が American Mathematical Monthly に Rosenthal により提出された。この問題の最初の解答は Luxembourg-Taylor による超準解析の手法で得られ, 超準解析を使わない証明は Halmos により得られたということである。その手法に沿って Bastian-Harrison による論文に次のような結果が紹介されている。

Theorem 1 任意の $n \in \mathbb{N}$ と正数 ε に対して次の関係が成立するような正数 δ が存在する。$\|A\| \leq 1$, $\|A^*A - AA^*\| < \delta$ を満たす行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\|N - A\| < \varepsilon$ となる正規行列 N がとれる。

Proof. $\mathcal{B} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | \ \|X\| \leq 1\}$ とおく。$M_n(\mathbb{C})$ から $\mathbb{R}$ への連続写像 φ を

$$\varphi(X) = \|X^*X - XX^*\|$$

によって定義する。このとき $Ker\ \varphi \cap \mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ の正規行列全体となり、

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{B} | d(X, Ker\ \varphi \cap \mathcal{B}) \geq \varepsilon\}$$

とおくと $Ker\varphi$ と交わらないコンパクト集合になる。$\varphi(\mathcal{M})$ の最小値を $\delta > 0$ として選べば良い。

つまり $\|A\| \leq 1$, $\varphi(A) = \|A^*A - AA^*\| < \delta$ ならば $A \in \mathcal{M}^c$ となり $\|N - A\| < \varepsilon$ となる正規行列 N が存在する。∎

上の結果を定量的に拡張したものとして Pearcy-Shields による次の結果が知られている。

Theorem 2 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $A = A^*$ とする。任意の正数 ε に対して

$$\|AB - BA\| \leq \frac{2\varepsilon^2}{n-1}$$

を満たしているならば $M_n(\mathbb{C})$ の元 A', B' で

$$(A')^* = A',\ A'B' = B'A',\ \|A - A'\| < \varepsilon,\ \|B - B'\| < \varepsilon$$

となるものが選べる。

Corollary 3 $T \in M_n(\mathbb{C})$ が

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \frac{\varepsilon^2}{n-1}$$

を満たすならば正規行列 N で $\|T - N\| < \varepsilon$ となるものが存在する。

系の証明は易しいので省略し、必要な補題を述べた後に定理の証明を与えることにする。

Lemma(Schur) $S = (s_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ とする。

(1) Hilbert 空間の元 $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ に対して

$$\|(< \xi_i | \eta_j > s_{ij})\| \leq \alpha\beta\|S\|$$

が成立する。ただし $\alpha = \max\{\|\xi_1\|, \ldots, \|\xi_n\|\}$, $\beta = \max\{\|\eta_1\|, \ldots, \|\eta_n\|\}$.

(2) 実数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ が $a_i - b_j \geq c > 0$ を満たすものとする。このとき

$$\|(\frac{1}{a_i - b_j} s_{ij})\| \leq \frac{1}{c}\|S\|$$

が成立する。

Proof. (1) $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq 1$, $|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 \leq 1$ に対して

$$|\sum_{i,j=1}^{n} x_i < \xi_i | \eta_j > s_{ij}\overline{y_j}| = |\sum_{i=1}^{n} < x_i\xi_i | \sum_{j=1}^{n} \overline{s_{ij}} y_j \eta_j > |$$

$$= | < \begin{pmatrix} x_1\xi_1 \\ \vdots \\ x_n\xi_n \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \overline{s_{11}} & \cdots & \overline{s_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{s_{n1}} & \cdots & \overline{s_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\eta_1 \\ \vdots \\ y_n\eta_n \end{pmatrix} > |$$

$$\leq \| \begin{pmatrix} x_1\xi_1 \\ \vdots \\ x_n\xi_n \end{pmatrix} \| \|A\| \| \begin{pmatrix} y_1\eta_1 \\ \vdots \\ y_n\eta_n \end{pmatrix} \| \leq \alpha\beta\|S\|$$

となる。

(2) d を $\max\{b_1, \ldots, b_n\} < d < \min\{a_1, \ldots, a_n\}$ となるように選ぶと $a_i - d, d - b_i \geq c/2$ となる。このとき

$$f_i(t) = \exp(-(a_i - d)t), \; g_i(t) = \exp(-(d - b_i)t)$$

と定義すると $f_i, g_i \in L^2(0, \infty)$ となり

$$\|f_i\|, \|g_i\| \leq \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad < f_i | g_j > = \int_0^\infty f_i(t)g_j(t)dt = \frac{1}{a_i - b_j}$$

を満たし、(1) より従う。▮

Lemma(Schanuel) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を正の実数とする。このとき適当な k 個のナンバーを選び

$$(i(0) = 0 <) 1 \leq i(1) < i(2) < \cdots < i(k) \leq n (< n + 1 = i(k+1))$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{x_{i(j)}} \leq n, \quad \sum_{j=i(l)+1}^{i(l+1)-1} x_j < 1 \quad (l = 0, 1, \ldots, k)$$

とできる。

Proof. $1 \leq m \leq n, 0 < t \leq 1$ に対して

$$c_m(t) = \min\{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{x_{i(j)}} \mid 0 \leq k \leq m, 1 \leq i(1) < i(2) < \cdots < i(k) \leq m,$$

$$x_1 + \cdots + x_{i(1)-1} < 1,$$

$$\cdots,$$

$$x_{i(k-1)+1} + \cdots + x_{i(k)-1} < 1,$$

$$x_{i(k)+1} + \cdots + x_m < t\}$$

と定義する。このとき、$c_m(1) \leq m$ となることを示せば良い。

$m = 1$ のとき

$$c_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{x_1} & (t \leq x_1) \\ 0 & (t > x_1) \end{cases}$$

だから

$$\int_0^1 c_1(t)dt \leq 1$$

となる。

次に

$$\int_0^1 c_m(t)dt \leq 1 + \int_0^1 c_{m-1}(t)dt$$

となることをみる。

$x_m \geq 1$ のとき

$$c_m(t) = c_{m-1}(t) + \frac{1}{x_m} \leq c_{m-1}(t) + 1$$

となり

$$\int_0^1 c_m(t)dt \leq 1 + \int_0^1 c_{m-1}(t)dt$$

が成立する。

$x_m < 1$ のとき $t \leq x_m$ ならば

$$c_m(t) = \frac{1}{x_m} + c_{m-1}(1 - (x_m - t))$$

となり、 $t > x_m$ ならば

$$c_m(t) \leq c_{m-1}(t - x_m)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}
\int_0^1 c_m(t)dt &= \int_0^{x_m} c_m(t)dt + \int_{x_m}^1 c_m(t)dt \\
&= \int_0^{x_m} \frac{1}{x_m} + c_{m-1}(1 - (x_m - t))dt + \int_{x_m}^1 c_{m-1}(t - x_n)dt \\
&= 1 + \int_0^1 c_{m-1}(t)dt
\end{aligned}$$

となる。従って帰納法により

$$\int_0^1 c_m(t)dt \leq m$$

が得られる。

c_m の定義より単調減少な階段関数であることがわかるから $c_m(1) \leq m$ が導かれる。 ∎

Proof of Theorem 2. A は self-adjoint だから

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

と仮定してよい。 $B = (b_{ij})$ とすると $AB - BA = ((\lambda_i - \lambda_j)b_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ となる。

ここで Schanuel の補題を

$$d_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \cdots, d_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n$$

に適用して $1 \leq i(1) < i(2) < \cdots < i(s-1) < i(s) = n$ で

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{i(1)-1} < 2\varepsilon, \cdots, d_{i(s-1)+1} + d_{i(s-1)+2} + \cdots + d_{i(s)-1} < 2\varepsilon$$

$$\frac{1}{d_{i(1)}} + \frac{1}{d_{i(2)}} + \cdots + \frac{1}{d_{i(s-1)}} \leq \frac{n-1}{2\varepsilon}$$

となるものを選ぶ。このとき、

$$\lambda_1 - \lambda_{i(1)} < 2\varepsilon, \lambda_{i(1)+1} - \lambda_{i(2)} < 2\varepsilon, \cdots$$

となり

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{i(1)} = \frac{\lambda_1 + \lambda_{i(1)}}{2},$$
$$\mu_{i(1)+1} = \cdots = \mu_{i(2)} = \frac{\lambda_{i(1)+1} + \lambda_{i(2)}}{2},$$
$$\cdots.$$

$i(1), i(2) - i(1), \cdots$ 次のブロック行列に分解して

$$A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

とおけば $\|A - A'\| < \varepsilon$ となる。

B を上のサイズのブロック行列として表す。

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}$$

とし

$$B' = \begin{pmatrix} B_{11} & & & 0 \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{ss} \end{pmatrix}$$

とおけば明らかに $A'B' = B'A'$ となる。このとき $\|B - B'\| < \varepsilon$ となることを以下に示す。

ブロック行列 B に対して B_k, B_k^c, B_k^r を以下のようにする。

$$
\begin{aligned}
B - B' &= \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & \cdots \\ B_{21} & 0 & B_{23} & \cdots \\ B_{31} & B_{32} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & \cdots & \cdots \\ B_{21} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ B_{31} & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{24} & \cdots \\ 0 & B_{32} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B_{42} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} + \cdots \\
&= B_1 + B_2 + \cdots + B_{s-1}
\end{aligned}
$$

B_k の第 k 列以外を 0 としたものを B_k^c, 第 k 行以外を 0 としたものを B_k^r とすると

$$\|B - B'\| \leq \|B_1\| + \cdots + \|B_{s-1}\|$$

$$B_k = B_k^c + B_k^r, \quad \|B_k\| = \max\{\|B_k^c\|, \|B_k^r\|\}$$

となる。

仮定より

$$\|AB - BA\| < \frac{2\varepsilon^2}{n-1}$$

であり、例えば

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} (AB - BA) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ (\lambda_2 - \lambda_1) b_{21} & 0 & \cdots & \cdots \\ (\lambda_3 - \lambda_1) b_{31} & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$(1 \leq j \leq i(1) < i \leq n)$ と B_1^c のノルムを Schur の補題で比較すれば $|\lambda_i - \lambda_j| \geq d_{i(1)}$ よ

り

$$\|B_1^c\| \leq \frac{1}{d_{i(1)}}\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ (\lambda_2-\lambda_1)b_{21} & 0 & \cdots & \cdots \\ (\lambda_3-\lambda_1)b_{31} & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{d_{i(1)}}\left\|\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}(AB-BA)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\right\|$$

$$< \frac{1}{d_{i(1)}}\frac{2\varepsilon^2}{n-1}$$

となる。同様の議論で

$$\|B_k^c\|, \|B_k^r\| \leq \frac{1}{d_{i(1)}}\frac{2\varepsilon^2}{n-1}$$

が得られる。従って

$$\|B-B'\| \leq \left(\frac{1}{d_{i(1)}}+\cdots+\frac{1}{d_{i(s-1)}}\right)\frac{2\varepsilon^2}{n-1} \leq \varepsilon$$

を導くことができる。 ∎

Counterexamples

いままでに扱われた問題は、いくつかの変形があり、そのいくつかの場合には否定な解答が得られている。最初に Halmos による non-compact operator で almost normal が nearly normal を導かない例がある。

Example 1(Bastian-Harrison) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ をヒルベルト空間の正規直交基底とする。作用素 T_n を次のように定義する。

$$T_n e_i = \begin{cases} (\frac{i}{n})^2 e_{i+1} & (1 \leq i \leq n) \\ e_{i+1} & (i > n) \end{cases}$$

このとき $\|T_n^*T_n - T_nT_n^*\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ であり、T_n はフレドホルム指数 -1 の本質的なユニタリ作用素だから、任意の正規作用素 N に対して

$$\|T_n - N\| \geq 1$$

となる。

Example 2(Voiculescu) $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ として

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} \omega_n & & & \\ & \omega_n^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^n \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n V_n - V_n U_n\| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \max\{\|X - U_n\|, \|Y - V_n\| | X, Y \in M_n(\mathbb{C}), XY = YX\} = 1$$

となる。

Example 3(Choi) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|A\| = 1 - 1/n$, $\|B\| \leq 1$, $\|AB - BA\| \leq 2/n$

$$\inf\{\|A - R\| + \|B - S\| | S, R \in M_n(\mathbb{C}), RS = SR\} = 1 - \frac{1}{n}$$

となる $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ が存在する。

もともとの Voiculescu の証明は短いのですが、わかりにくい (私には) もので、 Choi はこの例をもとに理解しやすい例を構成したようです。 Voiculescu の例の周辺については Loring による K- 理論的な結果がありますが、 Exel-Loring により非常に見通しの良い証明が与えられています。

まず Choi による例の説明を述べます。その為の準備を少し。純虚数の固有値を持たない行列 $T \in M_n(\mathbb{C})$ に対して重複度を込めて、実部が正の固有値の個数から実部が負の固有値の個数を引いたものを $sgnT$ と表す。自己共役なユニタリ行列 J に対しては

$$sgnJ = TraceJ$$

が成立する。

固有値の連続性に注意すると sgn は $\{T \in M_n(\mathbb{C}) | Sp(T) \cap i\mathbb{R} = \phi\}$ から $\mathbb{Z}$ への連続写像となる。また自己共役なユニタリ行列 J に対して $\|J - T\| < 1$ ならば $Sp(T) \cap i\mathbb{R} = \phi$ が導け, J と T を結ぶ道を考えることによって $sgnJ = sgnT$ となる。

$RS = SR$ となる $R, S \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$X = \begin{pmatrix} R & S \\ * & -R \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$$

とおく。このとき, $det(X-\lambda I)=det(-X-\lambda I)$, $(\lambda\in Sp(R)^c)$ だから, もし X が純虚数の固有値を持たないならば $sgnX=0$ となる。

さて Choi の例ですが, n 次正方行列 A,B を次のように定義します。

$$A=(a_{ij}),\ a_{ij}=(1-\frac{2i-1}{n})\delta_{ij}$$

$$B=(b_{ij}),\ b_{ij}=(1-(1-\frac{2i}{n})^2)\delta_{ij}.$$

このとき

$$\|A\|=1-\frac{1}{n},\ \|B\|\le\frac{2}{n},\ \|AB-BA\|\le\frac{2}{n}$$

となることと

$$J=\begin{pmatrix} A+\frac{1}{n}I & B \\ B^* & -A+\frac{1}{n}I \end{pmatrix}$$

が $J=J^*=J^{-1}$, $sgnJ=2$ を満すことがわかります。可換な R,S に対して

$$X=\begin{pmatrix} R & S \\ S^* & -R \end{pmatrix}$$

を考えると $Sp(X)\cap i\mathbb{R}=\phi$ または $sgnX=0$ となるから

$$1\le\|J-X\|\le\frac{1}{n}+\|A-R\|+\|B-S\|$$

となり $\|A-R\|+\|B-S\|\ge 1-1/n$ が導かれる。

Proof of Example 2 (Exel-Loring)

$$\|U_nV_n-V_nU_n\|=|1-\omega_n|$$
$$det(U_n)=det(V_n)=(-1)^{n+1}$$
$$U_nV_nU_n^*=\overline{\omega_n}V_n$$

は簡単に確認できる。従って

$$\lim_{n\to\infty}\|U_nV_n-V_nU_n\|=0$$

が導かれる。このとき、$n\ge 7$, $XY=YX$ に対して

$$\max\{\|X-U_n\|,\|Y-V_n\|\}\ge\sqrt{2-|1-\omega_n|}-1$$

を示す。

U_n と X, V_n と Y を結ぶ道を

$$A(t)=U_n+t(X-U_n),\quad B(t)=V_n+t(Y-V_n)$$

と定義し

$$\gamma(t,r) = det((1-r)A(t)B(t) + rB(t)A(t))$$

を考える。 $t=1$ のとき

$$\gamma(1,r) = det((1-r)XY + rYX) = det(XY)$$

と定数関数になる。また、 $t=0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\gamma(0,r) = det((1-r)U_nV_n + rV_nU_n) \\
=&det((1-r)V_n + rU_n^*V_nU_n)detU_n = (-1)^{n+1}det((1-r)V_n + r\omega_nV_n) \\
=&(-1)^{n+1}(1-r+r\omega_n)^n det(V_n) = (1-r+r\omega_n)^n
\end{aligned}$$

は原点の回りを 1 周する曲線である。 winding number はホモトピー不変量だから $\gamma(t,r) \neq 0$ for all t,r となると矛盾になる。従って、

$$d = \max\{\|X-U_n\|, \|Y-V_n\|\} < \sqrt{2-|1-\omega_n|} - 1$$

という仮定から $(1-r)A(t)B(t) + rB(t)A(t)$ が invertible for all t,r を導いて証明が終了する。

$$\begin{aligned}
&\|(1-r)A(t)B(t) + rB(t)A(t) - U_nV_n\| \\
\leq&(1-r)\|A(t)B(t) - U_nV_n\| + r\|B(t)A(t) - U_nV_n\| \\
\leq&(1-r)(\|A(t)B(t) - A(t)V_n\| + \|A(t)V_n - U_nV_n\|) \\
&+ r(\|B(t)A(t) - V_nA(t)\| + \|V_nA(t) - V_nU_n\| + \|V_nU_n - U_nV_n\|) \\
\leq&(1-r)(\|A(t)\|\|B(t) - V_n\| + \|A(t) - U_n\|\|V_n\|) \\
&+ r(\|B(t) - U_n\|\|A(t)\| + \|U_n\|\|A(t) - V_n\| + |1-\omega_n| \\
\leq&(1-r)((1+d)d + d) + r(d(1+d) + d + |1-\omega_n|) \\
=&(1+d)d + d + r|1-\omega_n| \leq d^2 + 2d + |1-\omega_n| < 1
\end{aligned}$$

∎

与えられた自己共役作用素 $S_n, T_n \in B(\mathcal{H}_n)$, $\dim \mathcal{H}_n < \infty$ $(n = 1,2,\dots)$ かつ $\sup_n(\|S_n\| + \|T_n\|) < \infty$, $\lim_{n\to\infty} \|[S_n, T_n]\| = 0$ を満たすものに対して自己共役作用素 $S'_n, T'_n \in B(\mathcal{H}_n)$ で $[S'_n, T'_n] = 0$, $\lim_{n\to\infty}(\|S_n - S'_n\| - \|T_n - T'_n\|) = 0$ となるものが存在するか、また、自己共役作用素をユニタリ作用素にとりかえたときに同様な命題が成立するかという問題は、以下のように言いかえることができることを Voiculescu は注意し cohomological な問題が本質であることを示唆している。次のような C*- 環とイデアルを考える。

$$A = \{(T_n)_{n=1}^{\infty} | T_n \in B(\mathcal{H}_n), \sup\|T_n\| < \infty\}, \quad I = \{(T_n)_{n=1}^{\infty} \in A | \lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0\}$$

連続関数環 $C(X)$ から商環 A/I への *- 準同型にたいして lifting, つまり $C(X)$ から A への *- 準同型で商写像をとって可換とできるかどうかを考える。 $X = [0,1]\times[0,1]$ のときが 2 つの自己共役作用素の問題になり、 $X = \mathbb{T}\times\mathbb{T}$ のときが 2 つのユニタリ作用素の問題になる。

Lin's result

Theorem 3(Lin) 任意の正数 ε に対して以下のような正数 δ を選ぶことができる. 自然数 n と n 次の自己共役行列 a, b で

$$\|a\|, \|b\| \leq 1, \quad \|ab - ba\| < \delta$$

を満すものに対して可換な n 次の自己共役行列 a', b' で

$$\|a - a'\| + \|b - b'\| < \varepsilon$$

となるものが選べる.

上の命題を否定すると $\|x_j\| \leq 1$ を満す $x_j \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ の列で

$$\|x_j^* x_j - x_j x_j^*\| \longrightarrow 0$$

かつ, ある正数 ε に対して各 x_j と $M_{n_j}(\mathbb{C})$ の正規行列との距離が ε より大きくなる $\{x_j\}$ が存在することになる。

この $\{x_j\}$ が存在しないことを示すことによって Lin の定理は証明されるが, 鍵になる事実は Voiculescu が示唆した C*- 環 A/I が性質 (FN) を持つということである。 C*- 環が性質 (FN) を持つとは, 任意の正規元が, 有限個のスペクトルを持つ正規元で近似できることである。この事実を認めると以下のように証明が終了する。

Proof. 上のように命題を否定してみる。 $x = (x_j) \in A$ とみなすと $y = \pi(x) \in A/I$ は正規元になる。ここで性質 (FN) を用いて, A/I の正規元 y' で

$$\|y - y'\| \leq \varepsilon$$

かつ有限個のスペクトルを持つものを選ぶ。このとき, 正規元 $x' = (x'_j) \in A$ で $\pi(x') = y'$ となるものが存在する。実際, 1 変数複素多項式 p, q で

$$p(Sp(y')) \subset \mathbb{R}, \ q \circ p|_{Sp(y')} = id|_{Sp(y')}$$

となるものを選べば $p(y')$ は自己共役で $q(p(y')) = y'$ を満す。自己共役元は自己共役なリフトを持つので $\pi(z) = p(y')$ となる自己共役な $z \in A$ を選び $x' = q(z)$ とすれば良い。

商空間のノルムの定義より

$$\|x - x' - a\| \le \|y - y'\| + \varepsilon/4 < \varepsilon/2$$

となる $a = (a_j) \in I$ を選ぶことができる。$\lim_{j\to\infty} \|a_j\| = 0$ より $\|a_j\| < \varepsilon/2$ と選べば $\|x_j - x'_j\| < \varepsilon$ となり正規元との距離の仮定に反することになる。∎

A/I が性質 (FN) を持つことの簡潔な証明は Friis-Rørdam によるものがある。概略を説明するために次の 2 つの命題を述べておきます。

Lemma 1. 任意の正数 ε, 正規元 $x \in A/I$, $\mathbb{C}$ の可算集合 F に対して A/I の正規元 y で

$$\|x - y\| < \varepsilon, \quad Sp(y) \cap F = \phi$$

となるものが存在する。

Lemma 2. $x \in A/I$ は正規とする。V を $Sp(x)$ の中の相対的開集合でかつ開区間 $(0,1)$ に同相なものとする。このとき、V の任意の元 λ_0 と正数 ε に対して、A/I の正規元 y で

$$Sp(y) \subset Sp(x) - \{\lambda_0\}, \quad \|x - y\| \le \varepsilon$$

となるものが存在する。

この 2 つの命題によって A/I の性質 (FS) は次のようにわかります (少々大雑把ですが)。$x \in A/I$ を正規とする。lemma 1 より $Sp(x)$ 全体に多くの穴をあけたようなスペクトルを持つ正規元 x' で x を近似する。x' の連続関数カルキュラスで穴を連続的に広げて、格子状のスペクトルを持った正規元 x'' で x' を近似する。lemma 2 より格子に次々に切れ目を入れて有限個の可縮な集合からなるスペクトルを持った正規元 x''' で x'' を近似する。可縮性と連続関数カルキュラスによって有限個のスペクトルを持つ正規元での近似が可能になる。

Proof of Lemma 1. 有限次元行列環の元 x は、$x = u|x|$, (u はユニタリ元) の形に分解 (ユニタリ極分解) できます。これに注意すれば、$A, A/I$ の各元はユニタリ極分解を持つことがわかります。

A/I の正規元 $x(= u|x|)$ に対して $u(|x| + \varepsilon 1)$ は可逆な正規元となるから、A/I の正規元の中で可逆な正規元全体は相対的に開かつ稠密な集合になる。

x の代わりに $x - \lambda 1$ を考えると $\lambda \in Sp(x)^c$ となる正規元 x の全体は、正規元全体の中で相対的に開かつ稠密な集合になる。Baire のカテゴリー定理より $Sp(y) \cap F = \phi$ となる正規元 y の全体は正規元全体の中で稠密となる。∎

Proof of Lemma 2. 近似する元の構成方法について述べる。注意する点は、A はフォンノイマン環であり、ここではボレル関数カルキュラスが可能ということである。

$X = Sp(x)$ とし V の中の相対的開集合 U を

$$\lambda_0 \in U \subset \overline{U} \subset V$$

かつ U の直径が ε より小になるように選ぶ。X から $\mathbb{T}$ への連続関数 f を $f|_V$ が V から $\mathbb{T} - \{-1\}$ への同相写像であり、$f|_{X-V} = -1$ となるものとする。このとき、$u = f(x)$ はユニタリになる。

$a \in A$ を $\pi(a) = u$ としユニタリ極分解を $a = v|a|$ とすると、$\pi(v) = u$ となる。集合 $f(U)$ の特性関数 χ を用いて A の射影 $\chi(v)$ を作り、A/I の射影 e を $\pi(\chi(v))$ で定める。連続関数カルキュラスを少し丁寧にする必要があるが、この構成方法から

$$xe = ex,\ Sp_{e(A/I)e}(xe) \subset \overline{U},\ Sp_{(1-e)(A/I)(1-e)}(x(1-e)) \subset X - U$$

であることがわかる。そこで、$\lambda_1 \in U - \{\lambda_0\}$ を選び

$$y = \lambda_1 e + (1-e)x$$

とおくと求める y が得られる。∎

参考文献

J. J. Bastian and K. J. Harrison, Subnormal weighted shifts and properties of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc. 42(1974), 475–479.

M. D. Choi, Almost commuting matrices need not be nearly commuting, Proc. Amer. Math. Soc. 102(1988), 529–533.

R. Exel and T. Loring, Almost commuting unitary matrices, Proc. Amer. Math. Soc. 106(1989), 913–915.

P. Friis and M. Rørdam, Almost commuting self-adjoint matrices – a short proof of Huaxin Lin's theorem, J. Reine Angew. Math. 479(1996), 121–131.

H. Lin, Almost commuting selfadjoint matrices and applications, "Operator Algebras and Their Applications", Fields Institute Communications 13(1996), 193–233.

T. A. Loring, K-Theory and asymptotically commuting matrices, Canad. J. Math. 40(1988), 197–216.

C. Pearcy and A. Shields, Almost commuting matrices, J. Funct. Anal. 33(1979), 332–338.

P. Rosenthal, Are almost commuting matrices near commuting matrices?, Amer. Math. Monthly 76(1969), 925–926.

S. H. Schanuel, A combinatorial problem of Pearcy and Shields, Proc. Amer. Math. Soc. 65(1977), 185–186.

J. Schur, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, J. Reine Angew. Math. 140(1911), 1–28.

D. Voiculescu, Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants, Acta Sci. Math. 45(1983), 429–431.