数理解析研究所講究録
1046 巻 1998 年 1-8

Operator Space の紹介

小沢 登高 (Ozawa Narutaka) 東大数理研 M1

1998 年 3 月 20 日

1 Operator space とは？

Operator space theory とは $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の subspace を研究する理論です。$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の subspace は単なる normed space ではなく、operator space としての構造も持っています。

定義 1 *operator space* E とは *Banach space* E と各 $\mathbb{M}_n(E)$ に定義された *norm* $\|\ \ \|_n$ の組 $(E, \|\ \ \|_n)$ であって、次の 2 つの公理を満たすものとする。

$$(R1) \quad \|\alpha x\beta\|_n \leq \|\alpha\|\,\|x\|_n\,\|\beta\| \quad where\, \alpha, \beta \in \mathbb{M}_n \quad and \quad x \in \mathbb{M}_n(E)$$

$$(R2) \quad \|x \oplus y\|_{n+m} = \max\{\,\|x\|_n\,,\,\|y\|_m\} \quad where\, x \in \mathbb{M}_n(E)\,,\, y \in \mathbb{M}_m(E)$$

ここで $\alpha x\beta$ は *matrix multiprication*、$x \oplus y$ は $diag(x, y)$ のこととする。

E を $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の closed subspace とする。このとき、$\mathbb{M}_n(E)$ に norm を

$$\mathbb{M}_n(E) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(\mathcal{H}))$$

によって入れる。これで E は operator space となる。
operator space の subspace は relative norm によってやはり operator space となる。
次に operator space 間の写像を定義しよう。

定義 2 E, F を *operator space* とし、$u : E \to F$ を *linear map* とする。このとき u は *linear maps*

$$u \otimes id_n : \mathbb{M}_n(E) \ni [x_{ij}] \mapsto [u(x_{ij})] \in \mathbb{M}_n(F)$$

を *induce* する。$\mathbb{M}_n(E), \mathbb{M}_n(F)$ には *norm* が入っているので、次が定義できる。

$$\|u\|_{cb} = \sup_n \|u \otimes id_n\|$$

そして $\|u\|_{cb} < \infty$ のとき、u を *completely bounded map(cb map)* とよび、$\|\ \ \|_{cb}$ を *completely bounded norm(cb norm)* とよぶ。
さらに、$u \otimes id_n$ がすべて *contraction* のとき u を *complete contraction*、
$u \otimes id_n$ がすべて *isometry* のとき u を *complete isometry* とよぶ。

operatospaces E, F に対し completely isometric isomorphism $u : E \to F$ が存在するとき $E = F$ と書き、これらを同じものとしてみる。
operator space の名の由来は次の Ruan の定理による。

定理 3 ([11],[5]) 任意の *operator space* E は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の *operator subspace* に *completely isometrically isomorphic* である。
E が *separable* なら $\mathcal{H}$ も *separable* としてよい。

2 Spatial tensor product と cb maps

A が C^*-algebra のとき $\mathbb{M}_n(A)$ も C^*-algebra であって、C^*-algebra 間の *-homo は自動的に contractive だから *-homo は自動的に complete contraction となる。また、*-iso は complete isometry となる。
cb map を考える利点は次の定理による。

定理 4 ([6],[7]) A を C^**-algebra*、$E \subset A$ を *operator subspace*、$u : E \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ を *cb map* とする。
このとき、*Hilbert space* $\mathcal{K}$ と **-homo* $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{K})$, $V, W \in \mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ が存在して、$\|V\| \|W\| = \|u\|_{cb}$ で、

$$u(x) = V^* \pi(x) W \quad for\, x \in E$$

をみたす。
特に、*operator spaces* E, F と *cb map* $u : E \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対し *cb norm* を変えない拡張 $\tilde{u} : F \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。

$E \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$, $F \subset \mathbb{B}(\mathcal{K})$ を operator spaces とするとき、その tensor product $E \otimes F$ は $\mathbb{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ の subspace とみて operator space である。(completion しておく。)
これを C^*-algebra のときと同様に spatial tensor product とよぶ。
上の定理により $u_i : E_i \to F_i \quad (i = 1, 2)$ に対して、

$$u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$$

は completely bounded で $\|u_1 \otimes u_2\|_{cb} = \|u_1\|_{cb} \|u_2\|_{cb}$ となることがわかる。
特に、$u_i \quad (i = 1, 2)$ が complete isometry なら $u_1 \otimes u_2$ も complete isometry である。
定義より operator space$E$ に対して $E \otimes \mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(E)$ である。$\mathbb{M}_n \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ であるから $u : E \to F$ に対して

$$\|u\|_{cb} = \|u \otimes id_{\mathbb{B}(\mathcal{H})}\|$$

である。

3 Dual operator spaces その他

定義 5 ([1],[4]) $CB(E, F)$ を E から F への *cb maps* の集合とする。これは *cb norm* で *Banach space* になっている。次の同一視によって $\mathbb{M}_n(CB(E, F))$ に *norm* を入れる。

$$\mathbb{M}_n(CB(E, F)) = CB(E, \mathbb{M}_n(F))$$

これによって $CB(E,F)$ は *operator space*。E の *dual space* E^* は $CB(E,\mathbb{C})$ に *isometrically isomorphic* である。E^* を $CB(E,\mathbb{C})$ と同一視して *operator space* にする。これを E の *dual operator space* とよぶ。

定義より $E^*\otimes\mathbb{M}_n = CB(E,\mathbb{M}_n)$ である。一般に $E^*\otimes F\subset CB(E,F)$ が成り立つ [2] 。特に、E または F が有限次元なら等号が成り立つ。
次に ultraproduct operator space を定義する。
$E_k,\quad k\in\mathbb{N}$ を operatore spaces の列とする。$\omega\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ を1つきめ、$E_\omega=\prod E_k/\omega$ を ultraproduct とする。次の同一視でこれは operatore space になる。

$$\mathbb{M}_n(\prod_k E_k/\omega)=\prod_k \mathbb{M}_n(E_k)/\omega$$

$u_k:E_k\to F_k$ のとき自然に $u_\omega:E_\omega\to F_\omega$ が定まる。このとき、

$$\begin{aligned}\|u_\omega\otimes id_n\| &= \lim_\omega \|u_k\otimes id_n\|\\ &\leq \lim_\omega \|u_k\|_{cb}\end{aligned}$$

よって $\|u_\omega\|_{cb}\leq \lim_\omega\|u_k\|_{cb}$ 特に $u_k:E_k\to\mathbb{M}_n$ のとき $u_\omega:E_\omega\to\mathbb{M}_n$ で、

$$\|u_\omega\|_{cb}=\|u_\omega\otimes id_n\|=\lim_\omega\|u_k\otimes id_n\|=\lim_\omega\|u_k\|_{cb}$$

となるので (初め及び3つ目の等号については [12] を見よ。)

$$\prod E_k^*/\omega\subset(\prod E_k/\omega)^*\quad \text{complete isometrically}$$

である。さらに E_k がすべて n-dim なら等号が成り立つ。
quotient operator space や direct sum operator space も普通に定義できる。

4 Operator Space の例

(i) E を Banach space とする。E は C^*-algebra $C(B_{E^*})$ の subspace とみて operator space である。ここで、$B_{E^*}=\{f\in E^*:\|f\|=1\}$ with weak* topology
一般に、A を commutative C^*-algebra、E を operator space とするとき任意の bounded map$E\to A$ は completely bounded で $\|u\|_{cb}=\|u\|$ となる。これは (Banach spaces , bounded maps) の category が (operator spaces , cb maps) の subcategory であることを意味する。

(ii) $\{e_{ij}\}$ を $\mathbb{M}_n$ の matrix unit とするとき、

$$R_n=span\{e_{1j}:j=1,\cdots,n\}\quad,\quad C_n=span\{e_{i1}:i=1,\cdots,n\}$$

とおく。これらは $\mathbb{M}_n$ の subspace だから operator space。それぞれ row Hilbert space,column Hilbert space とよばれる。これらは Banach space として n-dim Hilbert space ℓ_2^n に isometrically isomorphic であるが、completely isometrically isomorphic でない。実際、

これらの間の map u に対して $\|u\|_{cb} = \|u\|_{HS}$ (Hilbert-Schmidt norm) となることが知られている。従って、$u : R_n \to C_n$ を isomorphism とするとき、

$$\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} \geq \|uu^{-1}\|_{HS} = n$$

(iii) $CB(\ell_\infty^n, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$ を考える。

$$T : \ell_\infty^n \ni e_i \mapsto x_i \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

とする。ここで $e_i \quad i = 1, \cdots, n$ は ℓ_∞^n の canonical basis。

$$\begin{aligned}
\|T\|_{cb} &= \|T \otimes id_{\mathbb{B}}(\mathcal{K})\|_{\ell_\infty^n(\mathbb{B}(\mathcal{K})) \to \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{B}(\mathcal{K})} \\
&= \sup\{ \| \sum x_i \otimes a_i \| : \|a_i\| \leq 1 \quad i = 1, \cdots, n\} \\
&= \sup\{ \| \sum x_i \otimes u_i \| : u_i \quad \text{a unitary} \quad i = 1, \cdots, n\}
\end{aligned}$$

３番目の等号に Russo-Dye の定理を使った。

$\mathbb{F}_\infty$ を free group with countably many generators とし、$U_1, U_2, \cdots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ を canonical generators とする。

E_1^n を $U_1, \cdots, U_n$ で生成される n-dim operator space とする。

任意の $u_i \in \mathbb{B}(\mathcal{K}) \quad i = 1, \cdots, n$ に対して map $\varphi : E_1^n \ni U_i \mapsto u_i$ は *-homo $\widehat{\varphi} : C^*(\mathbb{F}_\infty) \to \mathbb{B}(\mathcal{K})$ を induce するので、completely contractive である。従って、

$$\|T\|_{cb} = \| \sum x_i \otimes U_i \|$$

となる。これは

$$\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes E_1^n = CB(\ell_\infty^n, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$$

を意味する。

5 Exact operator spaces

定義 6 ([8]) *operator space* E が *exact* であるとは、任意の C*-*algebra* B とその *closed ideal* I に対して

$$0 \to I \otimes E \to B \otimes E \to (B/I) \otimes E \to 0$$

が *exact* であることとする。このとき、任意の C*-*algebra* B とその *closed ideal* I に対して *complete contractive map*

$$T : (B \otimes E)/(I \otimes E) \to (B/I) \otimes E$$

は *linear space isomorphism*。そこで

$$ex(E) = \sup\{\|T^{-1}\| : B, I\}$$

とおく。E が *exact* なら $ex(E) < \infty$ である。

実際、上の supremum は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ と $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ で与えられることが知られている。ここで、$\mathcal{H}$ は可分無限次元 Hilbert 空間。

$x = \sum_{i=1}^{N} b_i \otimes e_i \in B \otimes E$ を任意にとる。このとき $\{e_i : i = 1, \cdots, N\}$ で張られる有限次元 operator space を F とすると、

$$dist(x, I \otimes E) = dist(x, I \otimes F)$$

である。従って、

$$ex(E) = \sup\{ex(F) : F \text{ a finte dimensional operator subspace}\}$$

となる。有限次元 operator space E に対し

$$d_{sK}(E) = \inf\{\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} : u \text{ a linear isomorphism from E onto a matrix space}\}$$

と定める。ここで、matrix space とは full matrix algebra の subspace のこととする。無限次元 operator space E に対しては

$$d_{sK}(E) = \sup\{d_{sK}(F) : F \text{ a finte dimensional operator subspace}\}$$

と定義する。

定理 7 ([8],[10]) *operator space* E に対し以下は同値。
(i) $ex(E) < C$
(ii) 任意の *operator space* の列 (X_n) に対し自然な *inclusion*

$$(\prod_n X_n/\omega) \otimes E \hookrightarrow \prod_n (X_n \otimes E)/\omega$$

の *norm* が C 以下、
(iii) $d_{sK}(E) < C$

Proof. 上で見たことより E は有限次元としてよい。
(i)⇒(ii):$X_n \subset A_n$ となる適当な C^*-algebra A_k をとればよい。
(ii)⇒(iii):$E \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ とし $P_n : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{M}_n$ を自然な compression とし、$u_n = P_n|_E$ とおく。このとき $x \in E$ に対して明らかに

$$\|x\| = \sup \|u_n(x)\| = \lim \|u_n(x)\|$$

であるから、十分大きな n に対して u_n は injective。以後、この十分大きな n を考える。$E_n = u_n(E)$ とおくとき、u_n により定まる map

$$u_\omega : E \to \prod_n E_n/\omega$$

は completely isometric isomorphism である。そこで、$v = u_\omega^{-1}$ とおく。

$$\begin{aligned} CB(\prod_n E_n/\omega, E) &= (\prod_n E_n/\omega)^* \otimes E \\ &= (\prod_n E_n^*/\omega) \otimes E \\ &\hookrightarrow \prod_n (E_n^* \otimes E)/\omega \end{aligned}$$

であるから $v \in \prod_n (E_n^* \otimes E)/\omega, \|v\| < C$ とみなせる。

$$v = (v_n). \quad v_n \in E_n^* \otimes E = CB(E_n, E) \text{ with } \|v_n\| < C$$

と表せば、 E は有限次元ゆえ

$$\lim_{\omega} \|v_n - u^{-1}\|_{cb} = 0$$

従って、 $d_{sK}(E) < C$。
(iii)⇒(i): 簡単。

6 Norm が一意に定まる tensor product

定理 8 (E.Kirchberg)

$$\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathbb{F}_\infty) = \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes_{max} \mathrm{C}^*(\mathbb{F}_\infty)$$

証明には以下の Lemma が必要。
Sublemma. 任意の n, 任意の $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\|\sum_{i=1}^n a_i b_i\| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\|^{1/2} \|\sum_{i=1}^n b_i^* b_i\|^{1/2}$$

Proof. 簡単。(Cauchy-Schwarz inequarity を使う。)
Lemma. 任意の n, 任意の $x_i, \cdots, x_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes U_i\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})\otimes C^*(\mathbb{F}_\infty)} &= \|\sum_{i=1}^n x_i \otimes U_i\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})\otimes_{max} C^*(\mathbb{F}_\infty)} \\ &= \inf\{\|\sum_{i=1}^n a_i a_i^*\|^{1/2} \|\sum_{i=1}^n b_i^* b_i\|^{1/2} : x_i = a_i b_i\}\end{aligned}$$

ここで $U_1, U_2, \cdots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ は canonical generators とする。
Proof. 初めの式 ¡二番目の式 は明らか。二番目の式 ¡三番目の式 は Sublemma を $a_i \otimes U_i$ と $b_i \otimes 1$ に対して使えばよい。三番目の式 ¡初めの式 を以下示す。operator space の例 (iii) で見たように

$$T : \ell_\infty^n \ni e_i \mapsto x_i \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

に対して

$$\|T\|_{cb} = \|\sum_{i=1}^n x_i \otimes U_i\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})\otimes C^*(\mathbb{F}_\infty)}$$

となる。定理 4により

$$T(\alpha) = V^* \pi(\alpha) W$$

である。ここで $\pi : \ell_\infty^n \to \mathbb{B}(\mathcal{K})$ は *-homo,$V, W \in \mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ with $\|V\|\|W\| = \|T\|_{cb}$
このとき ℓ_∞^n は有限次元なので $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ としてよい。最後に、 $a_i = V^* \pi(e_i), b_i = \pi(e_i) W$ とおけばよい。

Remark. U_1^{-1} を左から掛けることによって $U_1 = 1$ としてもよい。（このとき $U_2, U_3, \cdots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ が canonical generators。）
Proof of Theorem.[9] E を $1 = U_1, U_2, \cdots \in C^*(\mathbb{F}_\infty)$ で張られる operator space とする。

$$S : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \odot E \to \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes_{max} C^*(\mathbb{F}_\infty) \subset \mathbb{B}(\mathcal{K})$$

は Lemma により unital complete isometry。よって unital complete contraction(=unital complete positive mapping)

$$\widehat{S} : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \odot C^*(\mathbb{F}_\infty) \to \mathbb{B}(\mathcal{K})$$

に拡張できる。$\widehat{S}$ の multipricative domain[3] は C^*-algebra で $\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes E$ を含む。従って $\widehat{S}$ は *-homo で algebraic tensor product $\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty)$ の上で identity mappping。すなわち、

$$\mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes C^*(\mathbb{F}_\infty) = \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes_{max} C^*(\mathbb{F}_\infty)$$

参考文献

[1] D.Blecher, The standard dual of an operator space, Pacific J.Math.153(1992),15-30.

[2] D.Blecher and V.Paulsen, Tensor products of operator spaces, J.Funct.Anal.99(1991),262-292.

[3] M.D.Choi, A Schwarz inequality for positive linear maps on C^*-algebras, Illinois J.Math.18(1974),565-574.

[4] E.Effros and Z.J.Ruan, A new approach to operator spaces, Canadian Math.Bull.34(1991),329-337.

[5] ——, On the abstract characterization of operator spaces, Proc.Amer.Math.Soc.119(1993),579-584.

[6] V.Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Research Notes 146.Pitman Longman (Wiley) 1986

[7] G.Pisier, Completely bounded maps between sets of Banach space operators, Indiana Univ.Math.J.39(1990),251-277.

[8] ——, Exact operator spaces, Recent advances in operator algebras(Orleans 1992),Asterisque(Soc.Math.France)232(1995),159-186.

[9] ——, A simple proof of a theorem of Kirchberg and related results on C^*-norms, J.Op.Theory 35(1996),317-335.

[10] ——, An introductin to the theory of operator spaces, preprint.

[11] Z.J.Ruan, Subspaces of C^*-algebras. J.Funct.Anal.76(1988),217-230.

[12] R.R.Smith, Completely bounded maps between C^*-algebras, J.London Math.Soc.27(1983),157-166.