数理解析研究所講究録
1049巻 1998年 103-111

Some conditions for the strong starlikeness

東北大情報　望月 望 (Nozomu Mochizuki)

この報告では，主として論文[2]の内容の一部について述べます．

§1. 定義. f が $U=\{|z|<1\}$ 上正則で $f(0)=f'(0)-1=0$ を満たすとき，$f\in A$ とする．$f\in A$ が U 上 univalent なるとき，$f\in S$ とする．$0<\alpha\leqq 1$ に対し，$f\in A$ が次を満たすとき $f\in S^*(\alpha)$ とする：

$$-\frac{\pi\alpha}{2}<\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)<\frac{\pi\alpha}{2}\quad (z\in U).$$

この f を strongly starlike of order α と言い，$\alpha=1$ のとき starlike と言う．$S^*(1)=S^*$ と表す．$S^*(\alpha)\subset S$ である ([1], [7]).

§2. 背景. $P(z):=z^2f'(z)/f(z)^2$ とおく．

このとき，次が知られている（Ozaki-Nunokawa [6]）:

$$f \in A,\ |P(z)-1|<1\ \ (z \in U) \Rightarrow f \in S.$$

これに関連し，Obradović [4] は，$0<k \leqq 1$ に対し

$$f \in A,\ |P(z)-1|<k\ \ (z \in U) \Rightarrow f \in S^* \ ?$$

なる問題を考えた。条件を強めるとき結果もよくなるかということであるが，これについて次を示した。

(1) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} < k \leqq 1$ のとき，上は成立しない。

(2) $Q(z) := z/f(z)$ として，次が成立する：

> 定理（Obradović）. $f \in A$ が U 上
> $$|P(z)-1|<k, \quad |Q(z)-1| < \sqrt{1-k^2}$$
> を満たせば $f \in S^*$ である。

(1) では，$f(z) = \dfrac{z}{1+\frac{i}{2}z+\frac{k}{2}e^{i\theta}z^3}$ $(z \in U)$

とおく。ここに，$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} < k \leqq 1$，$\theta$：或る値，とする。このとき $f \in A$，$f \notin S^*$ であることがわかる。

(2) の証明では，難しい Lemma を使っているが

次のようにすればすぐにわかる．まず，

$$w \in \mathbb{C},\quad |w-1| < r,\quad 0 < r \leqq 1 \quad \text{ならば}$$
$$|\arg w| < \sin^{-1} r$$

である．よって，

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{から}$$

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| = \left|\arg P(z) - \arg Q(z)\right|$$
$$\leqq |\arg P(z)| + |\arg Q(z)|$$
$$< \sin^{-1} k + \sin^{-1}\sqrt{1-k^2} = \frac{\pi}{2}$$

を得る．この観察が出発点となった．

§3. 結果．Obradović の定理を $S^*(\alpha)$ の場合と関連させて考え，次を得た：

> 定理．$0 < \alpha \leqq 1$ とする．
> [i] $f \in A$ が或る k，$0 \leqq k \leqq 1$，に対して次を満たすとする：
> $$|P(z)-1| \leqq \sin(\alpha \sin^{-1} k) \qquad (z \in U),$$
> $$|Q(z)-1| \leqq \sin(\alpha \cos^{-1} k) \qquad (z \in U).$$
> このとき，$f \in S^*(\alpha)$ である．

[ii] 上の右辺の値は，各 k について，best possible である．即ち，任意の k，$0<k<1$，任意の ε，$0<\varepsilon<k$，に対し

$$|P(z)-1| < \sin(\alpha \sin^{-1} k) \qquad (z \in U),$$

$$|Q(z)-1| < \sin(\alpha \cos^{-1}(k-\varepsilon)) \qquad (z \in U)$$

を満たし，かつ

$$f \notin S^*(\alpha)$$

なる $f \in A$ が存在する．

(注1) [ii] は，$|P(z)-1| < \sin(\alpha \sin^{-1}(k+\varepsilon))$，$|Q(z)-1| < \sin(\alpha \cos^{-1} k)$ で $f \notin S^*(\alpha)$ なる $f \in A$ が存在する，といっても同じである．

(注2) [i] は，先と同様に

$$\left| \arg \frac{z f'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \sin^{-1} k + \alpha \cos^{-1} k = \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$$

からすぐ出る．そうなるように，右辺の条件をつくったのである．しかし，これが best possible になっているから，意味のある条件と言える．

(注3) [ii] で $\alpha = 1$ とすると，<u>$0<k<1$ に対し $|P(z)-1| < k \quad (z \in U)$ で $f \notin S^*$ なる $f \in A$ の存在</u>を示しており，Obradović [4]

で未解決であった部分が出来たことになる.

<u>[ii]の証明の概略.</u> Obradović の例では, 分母の次数が低いために精密な結果が得られなかったものと思う.

$0<\alpha\leqq 1$ とする. $0<k<1$, $0<\varepsilon<k$ を任意にとる.

$t:=\sin(\alpha\sin^{-1}k)$, $s:=\sin(\alpha\cos^{-1}(k-\varepsilon))$

とおく.

$\theta:=\cos^{-1}(-s)$, $\lambda:=\cos^{-1}t$ とおく.

$ns-t>0$ なる n に対し, 関数 f_n を次で定める:

$$f_n(z)=\frac{z}{1+\frac{ns-t}{n}e^{-i\theta}z+\frac{t}{n}e^{-i\lambda}z^{n+1}}.$$

f_n は $\overline{U}$ 上正則で $f_n\in A$, 更に

$$|P(z)-1|<t,\quad |Q(z)-1|<s \quad (z\in U)$$

なることはすぐにわかる. さて, $n\to\infty$ として

$$\varsigma_n:=\left.\frac{zf_n'(z)}{f_n(z)}\right|_{z=1}=\frac{f_n'(1)}{f_n(1)}\longrightarrow\varsigma:=\frac{1-te^{-i\lambda}}{1+se^{-i\theta}}$$

である. $\xi:=1-te^{-i\lambda}$, $\eta:=1+se^{i\theta}$ とおくと,

$0 < \arg \xi < \pi/2$, $\quad 0 < \arg \eta < \pi/2$ であって,

$$\tan(\arg \xi) = \tan(\alpha \sin^{-1} k),$$

$$\tan(\arg \eta) = \tan(\alpha \cos^{-1}(k-\varepsilon)),$$

$\arg \zeta = \arg \xi + \arg \eta$ である. よって,

$\pi\alpha/2 < \arg \zeta < \pi$. そこで N をとり

$\pi\alpha/2 < \arg \zeta_N < \pi$ とすることが出来る.

即ち, $f_N \notin S^*(\alpha)$ である.

系. $0 < \alpha \leqq 1$ とする. $f \in A$ がある k, $0 \leqq k \leqq 1$, で次を満たすとする:

$|P(z) - 1| \leqq \alpha k$, $\quad |Q(z) - 1| \leqq \alpha\sqrt{1-k^2}$ $\quad (z \in U)$.

このとき, $f \in S^*(\alpha)$ である.

$(\because)$ $\quad \alpha \sin x \leqq \sin \alpha x \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \pi)$.

§4. 条件 $|P(z) - 1| < 1$ について.

これまでこの条件で考えてきたが, 論文[5]の Theorem 1 をよくみると, 次がなりたつことが分る: $f \in A$, $|P(z) - 1| < 1$ $(z \in U)$

$$\Longrightarrow \quad f(z) = \frac{z}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

この形の関数は論文[3]などでも考えられているものである。f が この形のとき

$$\Phi(z)-1=-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n z^n$$

であるから，次が言えることになる：

$$f\in A,\ |\Phi(z)-1|<1 \quad (z\in U)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(z)=\frac{z}{1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n \neq -1$$

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n z^n\right|<1.$$

References

[1] D. A. Brannan and W. E. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, J. London Math. Soc. (2) 1, (1969), 431–443

[2] N. Mochizuki and T. Sano, Some

conditions for the strong starlikeness of holomorphic functions, Interdiscip. Inform. Sci. 3 (1997), 87–90.

[3] M. O. Reade, H. Silverman, and P. G. Todorov, Classes of rational functions, Contemp. Math. (38), AMS., (1985)

[4] M. Obradović, Starlikeness and certain class of rational functions, Math. Nachr. 175 (1959), 263–268.

[5] M. Obradović, N. N. Pascu, and I. Radomir, A class of univalent functions, Math. Japonica 44 (1996), 565–568.

[6] S. Ozaki and M. Nunokawa, The Schwarzian derivative and univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972), 392–394.

[7] S. Stankiewicz, Some remarks

concerning starlike functions, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 143–146.

(以上)