

秩序構造とSubgrid-scaleエネルギー生成機構の相関

東京工業大学工学部機械宇宙学科 堀内 潔

1. はじめに

Large eddy simulation (LES)では、計算格子にかかる以下のスケール (Subgrid scale (SGS)) の粗視化を、フィルター操作を施すことにより行うが、格子で解像されたスケール(Grid scale)とSGS 間のエネルギー伝達は、SGS production 項

$$P_{ij} = -\tau_{ij} \bar{S}_{ij}, \tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

を介して行われる、LESではこの伝達の正確な予測が肝要となる。ここに、 τ_{ij} はSGS ストレス、 \bar{u}_i は速度 u_i のGrid scale 成分を示す。この伝達についての過去の研究は、伝達方向が順方向(Forward scatter)のみでなく、逆方向の伝達(Backward scatter)も顕著に生じることを示した。[1]本研究の目的は、特にこのBackward scatterの生成を伴う主要なSGS エネルギー生成機構を解明し、この機構を正確に予測できるSGSモデルの検証を行い、さらに、このモデルを用いるLESを行うことにより、この機構の動的な解析を行う点にある。

2. SGS エネルギー生成機構の抽出

本研究では、非圧縮性チャンネル流のDNSデータ (壁面摩擦速度とチャンネル半幅に基づいたレイノルズ数を180とし、x, y, z方向に、各々、128, 129, 128の格子点を用いた)のX-Zの一樣な2方向にGaussianフィルターを施し、32 x 129 x 32の格子点数のLESデータを生成した。このデータから、 τ_{ij} と P_{ij} 項の厳密値を算出した。

図1、2は、各々 P_{ij} 項の平均値とroot-mean square (rms)値のy分布を示す。図中には、Grid scale 速度の変動成分によるSGS production 項

$$P_{ij}^* = -\tau_{ij} (\bar{S}_{ij} - \langle \bar{S}_{ij} \rangle) \quad (2)$$

の*i*=1, *j*=2成分の分布も含めた。ここに、 $\langle \rangle$ は、X-Z平面内の平均を示す。 P_{ij} 項の平均値では、 P_{12} 項が最も大きい値を示すが、変動成分によるproduction 項 P_{12}^* の値は減少し、 P_{12} 項中では、平均速度の勾配による成分が主要であることがわかる。 P_{11} の平均値は壁近傍で負値となり、平均としても、Backward scatterとなっていることがわかる。rms値の分布においては、 P_{11} 項が最大となっており、空間的に大きな変動をしていることがわかるが、 P_{12} 項の変動は比較的小さい。[2]

図3は、 P_{ij} 項をForwardとBackward scatterに分離した平均値を示すが、 P_{11} 項では、ほぼ等分に両scatter

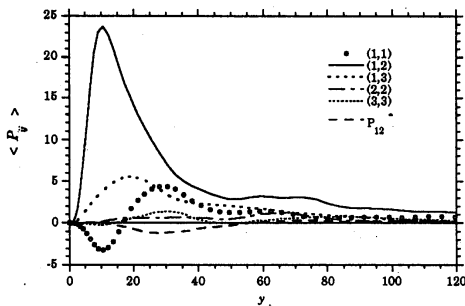


図1 P_{ij} の面平均値のy分布

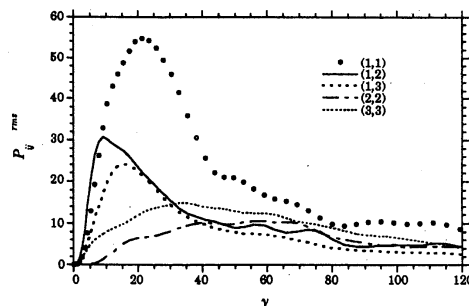


図2 P_{ij} のrms値のy分布

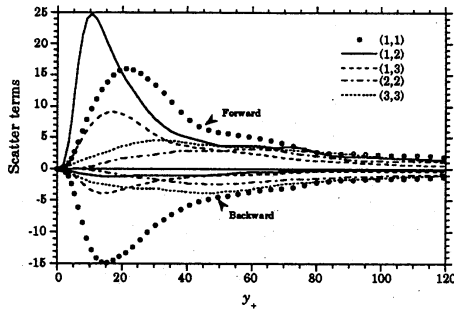


図3 Forward と Backward scatter項の面平均値の y_+ 分布



図4 P_{11} のVISA平均値の等高線図

が生じていることがわかり、それらの総和は、壁近傍では負となっており、顕著なBackward scatter は、 P_{11} 項において生成されていることが見てとれる。したがって、本研究では、主要なSGS エネルギー生成機構の抽出を P_{11} 項の解析に基いて行う。同時に、この解析により、Backward scatter 生成を伴う機構の抽出も行える。

図3は、顕著なBackward scatter が $y_+ \sim 12$ で起きることを示しているため、抽出は $y_+ = 12$ の $X-Z$ 平面において行った。DNSデータの解析から、大きな強度をもつ P_{11} 項が生じる事象の数は、単一時間ステップあたり、10程度であることがわかった。このため、こうした事象の十分なアンサンブル平均を取るため、十分間隔を隔てた10時刻のデータにたいし、VISA (Variable-interval spatial-averaging) 法^[3]を適用した。VISA法においては、Forward scatterを伴う事象は、

$$T(p_i) = \int_{p_i}^+ f P(f) df / \int_{p_i}^+ |f P(f)| df$$

において $T(p_i) = 0.1$ となるような p_i をしきい値として選択した。ここに、 $P(f)$ は、 P_{11} のProbability densityを示す。同様に、Backward scatterを伴う事象は、

$$T(p_i) = \int_{p_i}^- f P(f) df / \int_{p_i}^- |f P(f)| df$$

において $T(p_i) = -0.1$ として抽出した。これらの事象が抽出されると、全ての速度場を、事象の抽出点が $y_+ = 12$ の $X-Z$ 平面の中央になるよう移動し、全ての事象の重ね合せを行った。^[3]

図4は、こうして抽出されたBackward scatter事象の重ね合せを示すが、中央のBackward scatterが生成されている領域の周囲に、Forward scatterの領域が存在していることが見てとれる。(以下、実線は正值を点線は負値を表す。)こうした分布は、Forward と Backward scatterが図5のように、四重極状に分布していることを仮定すれば、整合的に説明できる。^[1]

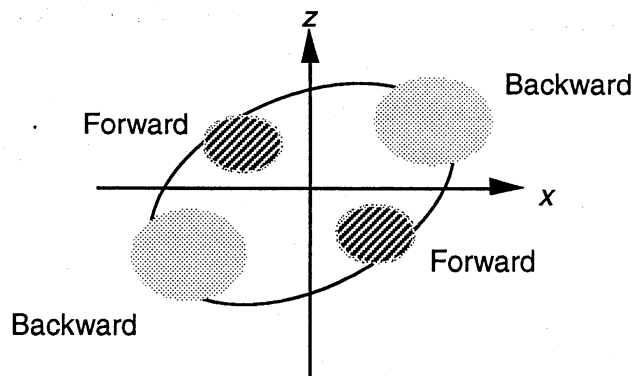


図6は、渦度ベクトルの、下流方向成分 (ω_x)、および、壁に垂直な方向の成分 (ω_y) の成す角度 θ の $y_+ = 12$ の $X-Z$ 平面におけるヒストグラムを示すが、 $\theta = \pm 90$ に集中しており、主要な渦は壁面に垂直に分布していることがわかる。そこで、前述のVISA法により抽出された大きなForward scatterを生じる事象に伴う ω_y を、同様に重ね合せることにより、図5のような四重極状のSGS エネルギー生成機構に伴う渦構造を抽出したのが、図7である。図5の第2象限と第4象限に存在するForward scatterを重複して重ね合わせるため、

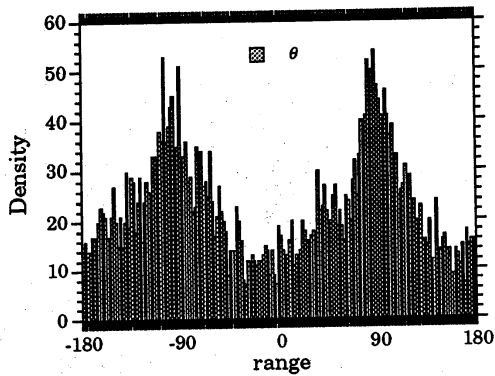


図6 ω_x と ω_y の成す角度 θ の分布

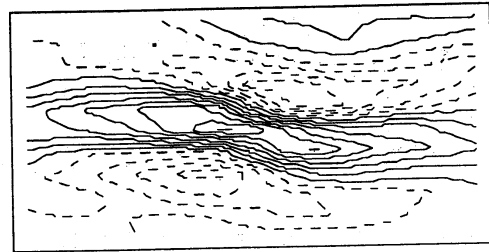


図7 ω_y のVISA平均値の等高線図

X および Z 方向に位相のずれた2つの ω_y が重ね合されているが、その断面は楕円形状であること、および、正符号の ω_y の両側に負符号の ω_y が存在していることがわかる。同様に抽出された速度場も、位相のずれた2つの速度場が重ね合されている。

そこで、こうした重ね合せの除去のために、まづ、2つの変数 f と g の空間2点相関関数

$$Q_{fg}(r) = \int f(x') g(x' + r) dx'$$

を算出する。次に、この2点相関関数と f のConvolution

$$G(x) = \int Q_{fg}(r) f(x' - r) dr = \int dk \int dk' \left[dk'' \tilde{g}(k) \tilde{f}(k') \tilde{f}(k'') \delta(k - k') \delta(k + k'') e^{ikx} - \int dk' \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ikx} \right]$$

を算出する。このConvolutionは、上式最終項にみるとおり近似的に g のフーリエ変換となっており、定性的には g の抽出を行える。

こうして得られたForward scatterを伴う ω_y の分布を図8に示すが、壁面近傍のストリーク構造に沿って、Kelvin-Helmholtz 型の不安定性により、局所的に大きな強度をもつ ω_y が形成されていることがわかり、この渦に沿って顕著なForwardとBackward scatterの生成が起きている。なお、図8に示した ω_y は、 $y_+ \sim 60$ 程度まで相似な楕円形状の形状で分布している。この2次元性を利用して、 $y_+ = 12$ のX-Z平面における ω_y から得られた流れ関数の分布を求めたが、 ω_y が楕円断面を有しているため、図9に示したとおり、流れ関数と ω_y の分布には差異が生じ、強い非線形性を示している。こうした楕円形状の渦は、混合層流におけるbraid領域のrib渦についても見い出されている。[1]こうした統計平均により抽出された渦構造が、必ずしも1つ1つのrealizationにおいて観察される訳ではない点には注意しなければならないが、平均としても楕円形状が検出されることから、各々の事象も楕円に近い断面形状を有していると考えられる。

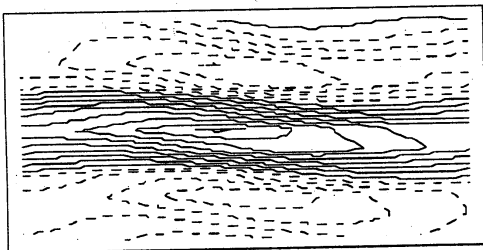


図8 ω_y のconvolution値の等高線図

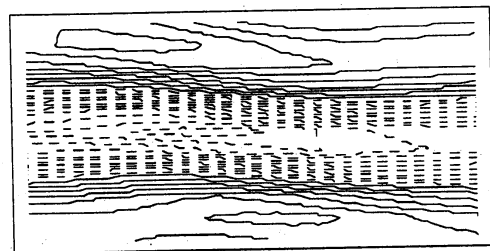


図9 流れ関数の等高線図

3. 一般化スケール相似則モデル

本節においては、前節で抽出された顕著な Forward と Backward scatter の生成を伴う構造の高精度予測が可能な SGS モデルについて検討する。

Horiuti^[5]は、一般化スケール相似則モデル

$$\overline{f'g'} - \overline{f'g} \sim C \sqrt{\overline{f'g} - \overline{f'g}}$$

を提案し、 τ_{ij} の Germano^[6]による分解に基づいて、Modified cross term C_{ij}^m を、

$$C_{ij}^m \sim C_C \left\{ \overline{(\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_j})} - (\overline{\overline{u_i u_j}} + \overline{\overline{u_i u_j}}) \right\},$$

Modified SGS Reynolds stress R_{ij}^m を、

$$R_{ij}^m \sim C_B L_{ij}^R, \quad L_{ij}^R = \overline{(\overline{u_i - \overline{u_i}})(\overline{u_j - \overline{u_j}})} - (\overline{u_i - \overline{u_i}})(\overline{u_j - \overline{u_j}})$$

と近似するモデルを提案した。したがって、このモデルでは τ_{ij} は

$$\tau_{ij} \sim C_L \left[\overline{(\overline{u_i u_j} - \overline{u_i u_j})} - (\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i u_j}}) \right] + C_B L_{ij}^R$$

と近似される。 C_{ij}^m 項のモデルは、

$$C_{ij}^m \sim C_C \left\{ L_{ij}^C - L_{ij}^R \right\}, \quad L_{ij}^C = L_{ij}^m - (\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i u_j}})$$

となり、 L_{ij}^R 項の係数は負となる。このモデルと Smagorinsky モデルを線形結合したモデル (Dynamic three-parameter mixed model) の部分集合として、Dynamic Smagorinsky モデル (DSM)^[7]、Dynamic mixed model (DMM)、Salvetti et al.^[8]による Dynamic two-parameter mixed model (DTM $C_L - C_S$)、および、DTM $C_B - C_S$ ^[5]

$$\tau_{ij} \sim L_{ij}^m + C_B L_{ij}^R - 2 C_S \Delta^{-2} |\overline{S}| \overline{S}_{ij}$$

が得られる。

本研究では、これらのモデルをより統一的に解釈するため、以下のような一般化スケール相似則モデルを考える。上記のモデルは、 $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i u_j}$ において、 u_i を下記のように近似し代入することにより直接的に得られる。

$$\begin{aligned} u_i &\rightarrow \overline{u_i} & : \tau_{ij} &\sim (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i u_j}) & \text{(DMM)} \\ u_i &\rightarrow \sqrt{C_L} \overline{u_i} & : \tau_{ij} &\sim C_L (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i u_j}) & \text{(} C_L\text{-}C_S \text{ model)} \end{aligned}$$

$$u_i \rightarrow \overline{u_i} + \sqrt{C_B} \overline{u_i} : \tau_{ij} \sim L_{ij}^m + C_B L_{ij}^R \quad (C_B\text{-}C_S \text{ model})$$

上記3モデルの比較から、DMMにおいては、SGS成分 u_i の近似が全く行われていないこと、 $C_L - C_S$ モデルにおいては、SGS成分 u_i が $\overline{u_i}$ に比例すると仮定されていることが見てとれる。このモデルにおいては、 τ_{ij} の分解は直接おこなっていないが、 $C_B - C_S$ モデルに対応する代入において、Modified cross term C_{ij}^m に相当する項は、

$$C_{ij}^m \sim \sqrt{C_B} \left\{ L_{ij}^C + L_{ij}^R \right\}$$

と近似され、 L_{ij}^R 項の係数は正となる。 C_{ij}^m と L_{ij}^R 項が高い正の相関を有することを考慮すると、このモデル化が従来のモデルより適切と考えられる。ただし、 $C_B - C_S$ モデルの導出に関しては、変更を生じない。

ここで、一般化スケール相似則モデルの、前節で得られた Forward と Backward scatter の生成を伴う機構の予測精度を検証する。このため、前節の Convolution により得られた速度場を各モデルに代入し、 τ_{ij} を得た上で

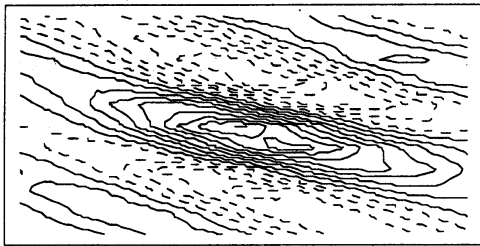


図10 P_{11} 項の厳密値の等高線図

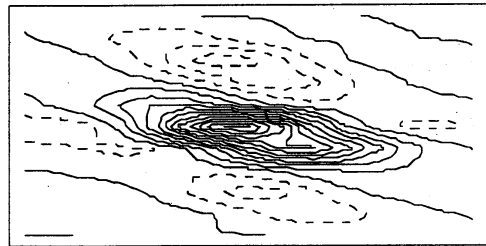


図11 P_{11} 項の $C_B - C_S$ モデルによる予測値

P_{11} 項を算出する. 図10、11は、各々、DNSの厳密値と $C_B - C_S$ モデルによる予測値の、 $y_+ = 12$ の $x-z$ 平面における P_{11} 項の分布を示すが、Forward と Backward scatterが隣接して存在する構造がよく再現されている.

そこで、こうした構造の動的な発展を解析するため、 $C_B - C_S$ モデルによるLES計算を行った. 上述のConvolutionにより得られた速度場に平均速度を重ね合せ初期条件を与えた. 図12は、壁面摩擦速度の時間変化を示す. 比較のため、Forward scatterが支配的でBackward scatterをあまり伴わない P_{12} 項において、顕著な Forward scatterを生成する事象の、上述と同一の方法による抽出から得られた速度場を初期条件としたLESの結果を示した. P_{12} 項に基いた場合が、比較的はやく定常状態に達するのにたいし、 P_{11} 項に基いた場合の定常状態への漸近はおそい. これは、 P_{11} 項に基いた場合が顕著な Backward scatterを伴うためと考えられる.

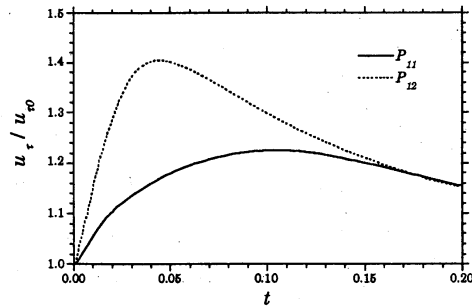


図12 壁面摩擦速度の時間発展

図13および14は、各々、 P_{11} 項および P_{12} 項に基いた場合の、初期条件の全SGS production 項のヒストグラムを示す. P_{11} 項の場合、 P_{12} 項の場合に比較して Backward scatterの占める割合が大きい. 図15および16に示した $t = 0.2$ における各々 P_{11} 項および P_{12} 項に基いた場合のヒストグラムにみるとおり、時間が経過するにつれ、全SGS production 項のヒストグラムは相似な分布に漸近する.

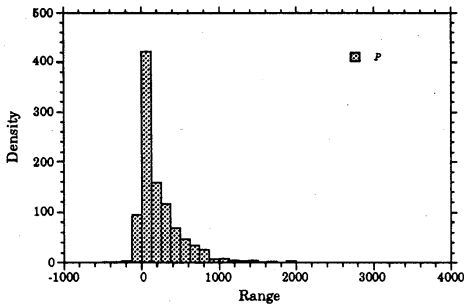


図13 SGS production 項のヒストグラム

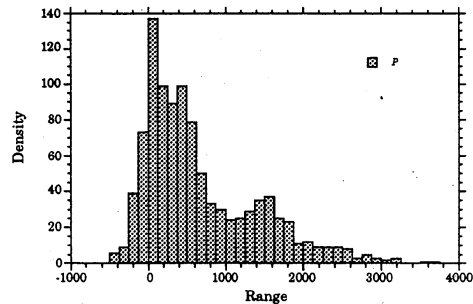


図14 SGS production 項のヒストグラム

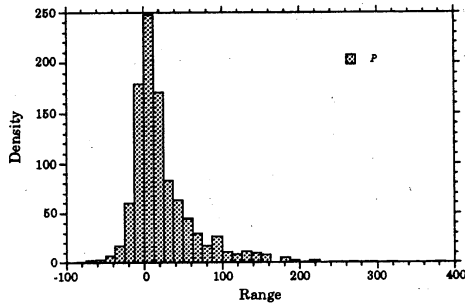


図15 SGS production 項のヒストグラム

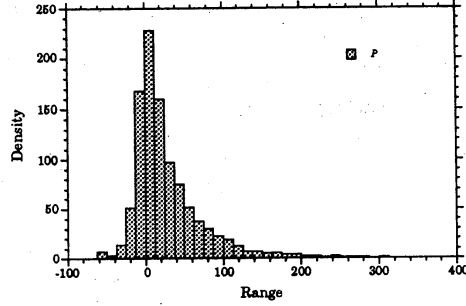


図16 SGS production 項のヒストグラム

4. Filter 関数とスケール相似則モデルの整合性

一般に、スケール相似則モデルは、SGS応力の近似精度の高いモデルであることが知られている。本節では、この原因を探る。Gaussian あるいはTop-hat filter のような実空間で局所的なsupportをもつ関数によるフィルタ操作を施した場合、Grid scale と重複するSGS成分が存在し、SGS成分 u_i は、resolved 成分 $u_i^<$ と unresolved 成分 $u_i^>$

$$u_i = u_i^< + u_i^> \quad , \quad \begin{aligned} u_i^< &: \hat{u}_i^<(k) \text{ for } k_x \text{ and } k_z < \pi/\Delta \\ u_i^> &: \hat{u}_i^>(k) \text{ for } k_x \text{ or } k_z > \pi/\Delta \end{aligned}$$

に分解できる。ここに、 $\hat{u}_i(k)$ は、 u_i のFourier 空間での値を示す。この分解をSGS Reynolds stress 項に代入すると、

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i^< u_j^<} + \overline{u_i^< u_j^>} + \overline{u_i^> u_j^<} + \overline{u_i^> u_j^>}$$

の3項に分解できる。表1は、各項の $\overline{u_i u_j}$ 全体にたいする相関係数 (C.C.)、平均値の比 (Rave) およびrms値の比 (Rrms) を示す。この表から、第1項のresolved 成分同士の相関が支配的であることがみてとれる。したがって、この場合resolved 成分の正確な近似がモデルを構成する上で重要である。表2の各項とスケール相似則モデル (Bardina およびFiltered-Bardinaモデル^{[1])} による近似値の相関係数は、特に第1項で高い

(i,j)	$\overline{u_i^< u_j^<}$			$\overline{u_i^< u_j^> + u_i^> u_j^<}$			$\overline{u_i^> u_j^>}$		
	C.C.	Rave	Rrms	C.C.	Rave	Rrms	C.C.	Rave	Rrms
(1,1)	0.89	0.74	0.69	0.53	0.	0.31	0.82	0.26	0.27
(1,2)	0.84	0.92	0.72	0.53	0.	0.41	0.41	0.084	0.33
(2,2)	0.87	0.62	0.54	0.57	0.	0.34	0.83	0.38	0.39
(3,3)	0.87	0.71	0.65	0.54	0.	0.33	0.77	0.29	0.32

表1 各項の全体にたいする相関係数 (C.C.)、平均値の比 (Rave) およびrms値の比 (Rrms)

(i,j)	$\overline{u_i^< u_j^<}$		$\overline{u_i^< u_j^> + u_i^> u_j^<}$		$\overline{u_i^> u_j^>}$	
	Bardina	Filtered-Bardina	Bardina	Filtered-Bardina	Bardina	Filtered-Bardina
(1,1)	0.79	0.93	0.097	0.12	0.41	0.55
(1,2)	0.76	0.90	0.047	0.051	-0.033	-0.043
(2,2)	0.75	0.92	0.084	0.14	0.33	0.47
(3,3)	0.76	0.91	0.10	0.14	0.28	0.42

表2 各項とBardina およびFiltered-Bardinaモデルによる近似値の相関係数

値を示している。同様な結果は、Top-hat filter を用いても得られた。以上の結果は、スケール相似則モデルが Gaussian あるいは Top-hat filter と整合していることを示すと共に、その高精度性の理由を与える。また、2 節に示した顕著な Backward scatter が生成される原因も示唆する。

ところで、この結果は、SGS 成分 u_i' のうち resolved 成分 $u_i'^<$ を正確に近似できれば、より正確なスケール相似則モデルを導出できる可能性を示唆する。その一つの方法は、 \bar{u}_i にたいし De-filter を行うモデル (De-filtered model)

$$u_i \sim \sqrt{C_D} G^{-1}(\bar{u}_i) = \sqrt{C_D} u_i'^< : \tau_{ij} \sim C_D (\overline{u_i'^< u_j'^<} - \bar{u}_i'^< \bar{u}_j'^<)$$

である。ここに、 C_D はモデル定数で、SGS も含めた全成分を近似するため、1 以上の定数である。Shah and Ferziger [10] は、こうした考え方に基き、Top-hat filter を差分法により定義し De-filter を行うモデルを提案した。Geurts [11] は、より厳密な De-filter の方法を提案した。本研究では、Gaussian filter により厳密に De-filter を施した上で、Smagorinsky モデルを付加し、定数 C_D と C_S を Dynamic に決定するモデルを考える。

$C_B - C_S$ モデルとの比較を行うと、 $C_B - C_S$ モデルでは SGS 成分 u_i' の近似を $u_i' \sim \bar{u}_i' = (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)$ と近似しているのに対し、De-filtered model では、 $u_i' \sim u_i'^< = (u_i'^< - \bar{u}_i)$ と近似している。Taylor 展開を用いた場合、両者の初項は係数を除き同一となり、SGS 成分の類似な近似となっていると考えられる。

図 17 は、チャンネル流において、モデルにより得られた、GS、 τ_{12} 、および、粘性項を含めた全 Reynolds shear stress の面平均値の y 分布を示すが、 $C_L - C_S$ モデルによる近似値は、厳密値に比べ過小な予測を与えるが、 $C_B - C_S$ モデルは、厳密値と良い一致を与える。これにたいし、De-filtered model の結果は、壁面近傍では厳密値と一致するものの、壁から離れると $C_L - C_S$ モデルよりも過小な予測を与える。

壁近傍での C_D の面平均値は約 0.8、rms 値は約 1.6、壁から離れた位置での C_D の平均値は約 1.0、rms 値は約 0.7、 $\sqrt{C_S}$ の面平均値は約 0.28、rms 値は約 0.5 となった。 C_S の値は、 $C_B - C_S$ モデルにおける値よりもかなり大きく、Smagorinsky モデルの占める割合は、De-filtered model による値の約 2/3 となった。また、平均値に比べ rms 値がかなり大きく、図 17 の De-filtered model の結果にみるとおり、細かな振動を見せており、Reynolds stress も空間的に大きな変動を示した。

De-filtered model の精度は、 $C_B - C_S$ モデルに比べ必ずしも高くないが、この主要な原因は、Filter を施した速度場が滑らかに変動するのにたいし De-filter を施した速度場では、変動が大きくなるためと考えられる。実際の LES 計算への適用を考えると、一般の LES においては、高波数成分の計算精度は低いいため、De-filtered model の欠点は、より顕著になるものと考えられ、De-filtered model の実用的な利用可能性には疑問が残る。このため、SGS 成分の近似には、 $C_B - C_S$ モデルで採用された $(\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)$ 項による Filtered field の情報を利用する方が有利と考えられる。ただし、De-filtered model の低精度性のもう一つの原因として、このモデルでは Cutoff filter を利用して Test field を定義する必要があるため、定数を Dynamic に決める際、Vreman et al. [12] による定式化を用いたこともあげられる。

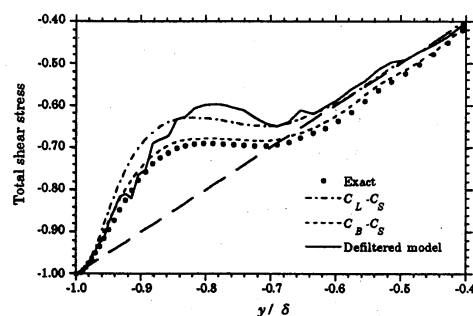


図 17 全 Reynolds shear stress 面平均値の y 分布

5. まとめ

Grid scale と SGS 間のエネルギー伝達の解析を行い、特に、Backward scatter を伴う構造について解析し、こう

した構造を高精度に予測可能なSGS モデルの検証を行った。

まず、チャンネル流DNSデータを用いて、SGS エネルギー生成項の厳密値を計算し、Grid scale とSGS 間のエネルギー伝達においては、総和としてはForward scatter が支配的なものの、Grid scale の変動成分とSGS 間のエネルギー伝達においては顕著なBackward scatterが生じ、特に $i=1$ 、 $j=1$ 成分の生成項において著しいことを示した。次に、このBackward scatter の生成と壁面に垂直な渦構造が高い相関をもつこと、および、この渦に沿ってForward とBackward scatter が四重極状に隣り合せて生成されることを示した。さらに、VISA法を用いて平均的な描象として、Backward scatter の生成を伴う構造を抽出し、この構造が、壁面近傍のストリーク構造に沿って局所的に発生する楕円断面をもつ垂直渦であることを示した。

この垂直渦とこれによるSGS エネルギーの生成機構のSGS モデルによる予測可能性を検証し、一般化スケール相似則モデル、特に、 $C_B - C_S$ モデル^[5]が高精度であることを示し、このモデルを用いて、上述の渦構造の時間発展の動的な解析を行った。

さらに、スケール相似則モデルが一般に高精度である原因を探り、SGS成分中、格子で解像されたスケールの成分の重要性を指摘し、Filter 関数との整合性を検証した。

本研究の一部は、文部省科学研究費重点領域研究(1)(No. 05240108)によった。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- [1]K. Horiuti, J. Phys. Soc. Japan, 66, 91 (1997)
- [2]K. Horiuti, Annual Research Briefs 1996, Center for Turbulence Research, Stanford University, 211-224 (1996).
- [3]U. Piomelli, Y. Yunfang and R.J. Adrian, Phys. Fluids 8, 215 (1996).
- [4]K. Horiuti, Proc. of International Symposium on Mathematical Modelling of Turbulent Flows, Tokyo, 164-169 (1995).
- [5]K. Horiuti, Phys. Fluids 9, 3443 (1997).
- [6]M. Germano, Phys. Fluids 29, 2323 (1986).
- [7]M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W.H. Cabot, Phys. Fluids A 3, 1760 (1991).
- [8]Y. Zang, R.L. Street and J. Koseff, Phys. Fluids A 5, 3186 (1993).
- [9]M.V. Salvetti and S. Banerjee, Phys. Fluids 7, 2831 (1995).
- [10]K.B. Shah and J. H. Ferziger, Proc. of the 11th Turbulent Shear Flows Symposium, 16.1-16.6 (1997).
- [11]B.J. Geurts, Phys. Fluids 9, 3585 (1997).
- [12]B. Vreman, B. Geurts, H. Kuerten, Phys. Fluids 6, 4057 (1994).