

渦輪の構造と不安定性

名工大 田中 誠一 (Seiichi Tanaka)

名工大 後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1 Introduction

渦輪についての研究は現在まで数多く行なわれており、渦輪の構造、運動を調べた多くの報告がある。また、渦(渦輪)に関する研究は乱流問題に関するアプローチの一つとして考えられており期待も非常に大きい。しかし、渦輪に関して未だに理解されていない数多くの問題がある。最近、渦輪の不安定性のメカニズムに関心が集まっている。

本研究室においては、実験において今井(1994^[7],1996^[8])、内藤(1996)^[9]らが、数値計算では矢島、後藤(1996)^[6]により波状変形する渦輪の波の数が時間経過とともに減少する様子を観察した。しかし、渦輪の不安定性に関してみると、渦輪が形状を保ちつつ、波状変形していく様子は数値計算により研究されているが、その渦輪が壊れてしまうまで長く計算された例は非常に少ない。

本研究の目的は、上に述べた波状変形する渦輪の波の数が時間経過とともに減少する様子も含め、渦輪がかく乱を加えることにより乱され壊れていくまでの渦輪の一生を直接数値計算によりとらえることにある。また、実験では測定が難しいデータを得るとともに、理論では解析が難しい有限太さを持つ渦輪の運動をコンピュータグラフィックスにより可視化することで両者の苦手な面を補い、新たな知見を見出すことを目的とする。

本研究は、以下の内容について調べた。まず第一に、渦輪の一生の全体像をとらえるために、渦輪のエネルギー： $E(t)$ 、エンストロフィー： $\Omega(t)$ 、散逸： $\epsilon(t)$ の時間発展を観察し、渦輪の一生で各物理量がどのように変化しているのかをまず把握した。

第二に、渦度場と散逸場及び圧力場の等値面をコンピュータグラフィックスにより様々な角度から観察した。とくに、渦輪の不安定現象が起こっている様子を観察し、その時間で上記のエネルギー、エンストロフィー、エネルギー散逸等の物理量がどのように変化しているのかを調べた。また、軸流の有無に対する不安定性の違い等も観察した。

第三に、渦輪の不安定性を定量的にとらえるために、 θ 方向(渦輪の方位角方向)のモーダルエネルギー： $E_n(t)$ 、モーダルエンストロフィー： $\Omega_n(t)$ を求めた。モーダルエネルギー、モーダルエンストロフィーを調べることは、コンピュータグラフィックスでの可視化図から数えたあやふやな波の数を、確認するのに有効な方法である。また、可視化の時と同様、軸流有無に関する影響等についても調べた。

第四に、渦度場、圧力場と散逸場の位置関係を可視化した。一般的に、渦度の強い場所と圧力の低い場所は一致すると言われているので、これを詳しく具体的に調べた。比較的弱い振幅を持つ渦度レベルの等値面の可視化を行なった時、圧力の等値面との位置関係はどうなっているのか観察した。また、渦度の強い場所と散逸の強い場所の位置関係、同様に圧力の低い場所と散逸の強い場所の位置関係を観察した。どのあたりで激しい散逸が存在しているのかを知ることは、渦輪が壊れていく過程を調べていく上で重要であると考えられるためである。

また、一様等方性乱流においては、統計的に見た場合、渦度が強い領域と散逸が強い領域が一致しないことが知られている。しかし両者は全く独立に分布するのではなく、互いに連れそう形で分布している。このことをより個別的、具体的な例で確認することは、渦輪の動力学だけでなく、乱流の理解においても重要である。

2 Numerical simulation

2.1 基礎方程式

非圧縮性粘性流体は Navier-Stokes 方程式及び、連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

に従うとし、周期境界条件のもとでスペクトル法を用いて計算を行う。時間発展は二次の予測子修正子法を用いた。

2.2 各物理量の定義

本研究で用いた物理量を以下のように定義する。

トータルエネルギー： $E(t)$ は

$$E(t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \quad (3)$$

として定義される。トータルエンストロフィー： $\Omega(t)$ は

$$\Omega(t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \quad (4)$$

で与えられる。全エネルギー散逸率： $\epsilon(t)$ は

$$\epsilon(t) \equiv 2\nu \int \sigma^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (5)$$

で与えられる。ここで $\sigma^2(\mathbf{x}, t)$ はストレインテンソルの2乗であり、

$$\sigma^2(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)^2 \quad (6)$$

である。

3 Initial conditions and Run parameters

3.1 基本状態

渦核断面における渦度分布は、渦核中心からの距離 r のガウス関数

$$\omega(r) = \frac{\Gamma}{\pi (\sqrt{2}a)^2} \exp\left(-\left(\frac{r}{\sqrt{2}a}\right)^2\right) \quad (7)$$

で与えられる。ここで、 Γ は循環、 a は渦核半径である。この $\omega(r)$ から渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ を作る。この $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ は非圧縮条件をほとんど満足するレベルにあるが、フーリエ変換した後、さらに精度を良くするために次のような演算を施す。

$$\tilde{\omega}_i(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) \omega_j(\mathbf{k}), \quad P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (8)$$

この $\tilde{\omega}(\mathbf{k})$ から作られた速度ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ を、以下 \mathbf{u}_{ring} とする。

3.2 初期摂動

本研究は渦輪の安定性を調べるのが目的なので、基本状態 (\mathbf{u}_{ring}) にかく乱 (\mathbf{u}_{noise}) を次のように加える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t = 0) = \mathbf{u}_{ring} + \epsilon_n \mathbf{u}_{noise}, \quad \epsilon_n \sim 10^{-2}.$$

この時加える \mathbf{u}_{noise} は以下のエネルギースペクトルを持ち、ガウス分布に従い、統計的に一様かつランダムなノイズである。

$$E(k) = ck^4 \exp\left(-2\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right), \quad c = \frac{16}{k_0^5} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (9)$$

実際の計算では $k_0 = 6$ とした。

3.3 軸流

軸流の効果について調べるために、 $\mathbf{u}_{axialflow}$ を次のように加える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t = 0) = \mathbf{u}_{ring} + \epsilon_n \mathbf{u}_{noise} + \epsilon_a \mathbf{u}_{axialflow}, \quad \epsilon_a \sim 10^{-1}.$$

この時加える $\mathbf{u}_{axialflow}$ は、基本状態で作られる $\tilde{\omega}(\mathbf{k})$ と同じ分布を持つ。つまり、渦核断面における軸流の速度分布は、渦核中心からの距離のガウス関数になっている。また、渦度の向きに対する軸流の向きの正負を表すために、ヘリシティ: H と呼ばれる量を次のように導入する。

$$H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dx. \quad (10)$$

つまり、 $H > 0$ なら同じ向き、 $H < 0$ なら逆向きを示す。

3.4 Run パラメータ

表1に本研究で使用したRunパラメータを示す。また、各Runに共通なパラメータは次のとおりである。

時間ステップ: $\Delta t = 2 \times 10^{-2}$, 循環: $\Gamma = 1.0$, 密度: $\rho = 1$

レイノルズ数: $Re = \nu/\Gamma = 5000$

渦核半径 / 渦輪半径: $a/R = 0.2$ ($R = \pi/3$)

| | 軸流の有無 | ix(乱数の種) | 解像度 N | t_{final} |
|------|---------------|----------|---------|-------------|
| run1 | なし | 25 | 64 | 600 |
| run2 | $H > 0$ (同方向) | 25 | 64 | 600 |
| run3 | $H < 0$ (逆方向) | 25 | 64 | 600 |
| run4 | なし | 13 | 64 | 600 |
| run5 | $H > 0$ (同方向) | 13 | 64 | 600 |
| run6 | $H < 0$ (逆方向) | 13 | 64 | 600 |
| run7 | $H > 0$ (同方向) | 25 | 128 | 80 |

表1: Run パラメータ

4 Results

4.1 各物理量

まずはじめに、トータルエネルギー、トータルエンストロフィー、全エネルギー散逸を、それぞれ初期の値で規格化した $E(t)/E(0)$ 、 $\Omega(t)/\Omega(0)$ 、 $\epsilon(t)/\epsilon(0)$ の変化と、それらの関係を見ていく。

4.1.1 トータルエネルギー

$t = 150$ くらいまでは軸流の有無にかかわらずエネルギーの減衰の様子に変化は見られなかった。しかし、それ以降の時間では減衰の仕方に違いが見られた。

4.1.2 トータルエンストロフィー

全ての *Run* において、 $t = 30$ から $t = 60$ くらいにかけてエンストロフィーが増加している。また、 $t = 150$ から $t = 250$ にかけてエンストロフィーのギャップが見られる。

4.1.3 全エネルギー散逸

エネルギー散逸とエネルギーの間には

$$\frac{dE}{dt} = -\epsilon(t) \quad (11)$$

である。つまり、 $\epsilon \rightarrow$ 大の時エネルギーが早く減衰する。図 6 を見ると、 $H > 0$ の時 $t = 200$ くらいでエンストロフィーが小さくなっているが、エネルギーの減衰が一番遅い。これは、(11) 式から見て妥当な結果である。また、基本的にエネルギー散逸はエンストロフィーの場合と同じような特徴を示す。以上で各物理量に触れてきたが、特徴的現象が起こっている時間を以下のようにまとめる。今後、これら 4 つの段階に着目して現象を見ていく。

- Phase1 : エンストロフィー、散逸が増加し、不安定現象が起こっている
- Phase2 : エンストロフィー、散逸がピークを越え、減衰している
- Phase3 : エンストロフィー、散逸の差が、各 Run で大きい
- Phase4 : 渦輪がかなり減衰した状態

以下の表は、これら 4 つの段階の大体の時間帯である。

| | t |
|--------|---------|
| phase1 | 30~60 |
| phase2 | 60~80 |
| phase3 | 150~250 |
| phase4 | 400~ |

表 2: 時間パラメータ

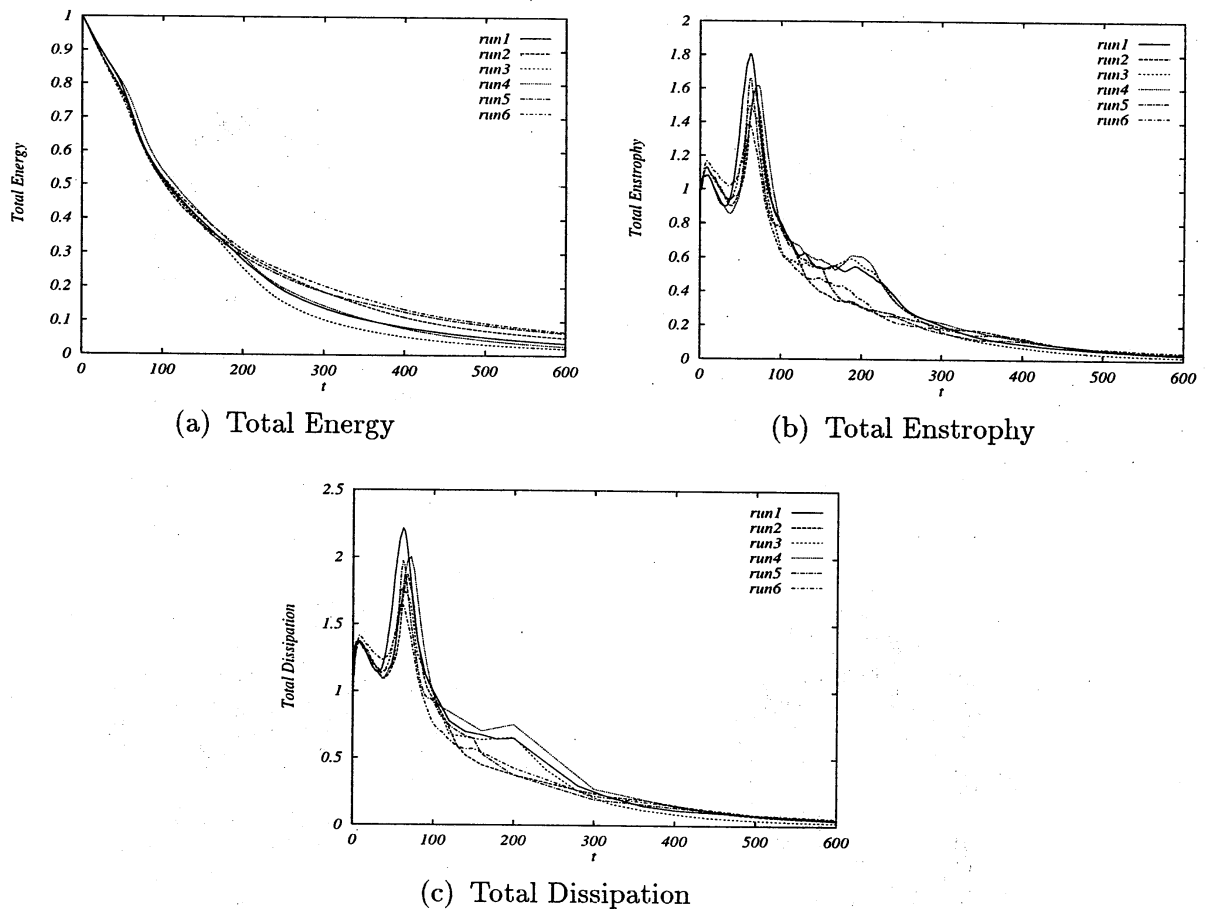


図1 各物理量の軸流有無の比較

4.2 不安定性の可視化

CG (FILEDVIEW) によって渦輪の不安定性を観察し、以下のようなことが分かった。

4.3 渦度場の可視化

4.3.1 Phase1

まず、軸流なし ($H = 0$) の渦度場を観察した。過去に実験や数値計算で示されていたように渦輪の方位角方向に波状変形が現れる様子が観察された。また図2、3を見ると、不安定波の数が $t = 40$ で波の数が $n = 8$ だったのが $t = 52$ では $n = 7$ に減少しているように見える。後ほど、この不安定波の数に関しては定量的に考えていく。さらに、先セクションで触れた各物理量に関してみていくと、この波状変形の波の数の減少が起こっている時にトータルエンストロフィー、全エネルギー散逸が増加段階にあることが分かる (Phase1)。エンストロフィーが増大し、エネルギー散逸も増大しているのは波状変形の波の数の減少には、減少するだけの作用が必要であると考え、結果としてつじつまが合っている。

次に初期渦度と同方向の軸流を入れた場合 ($H > 0$) を観察した。図4を見ると、等渦度面がねじれているように見える。特にねじれ具合のはっきりしている図の左上に点をおき、その点を始点とした渦線の結果が図5である。この図を見ると、図の左側の等渦度面の位置関係が良く分かる。また、渦線が束となり、大きな渦管がねじれながら互いに巻き付いているように見える。

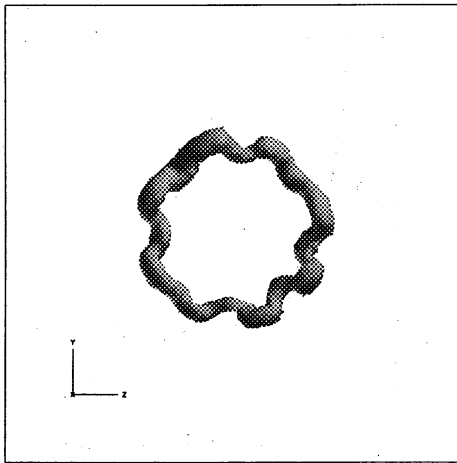


図2 $\frac{|\omega^2|}{|\omega_{max}^2|} = 0.2, H = 0, t = 40$

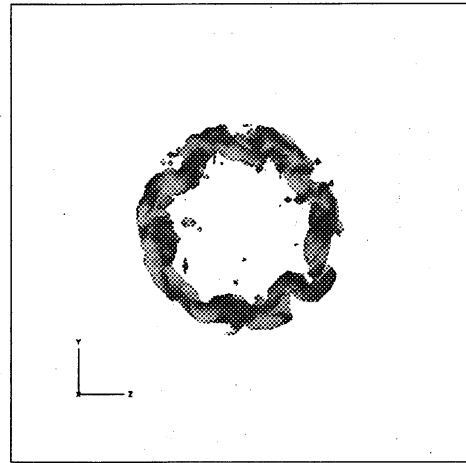


図3 $\frac{|\omega^2|}{|\omega_{max}^2|} = 0.1, H = 0, t = 52$

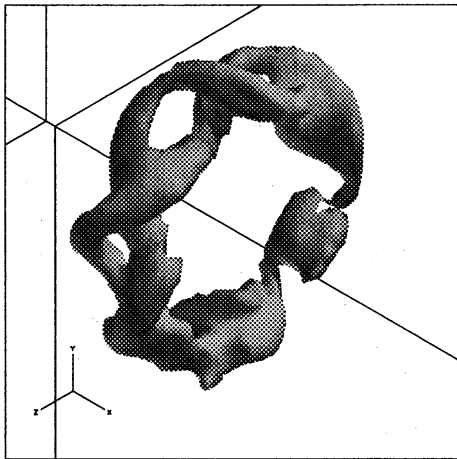


図4 $\frac{|\omega^2|}{|\omega_{max}^2|} = 0.08, H > 0, t = 50$

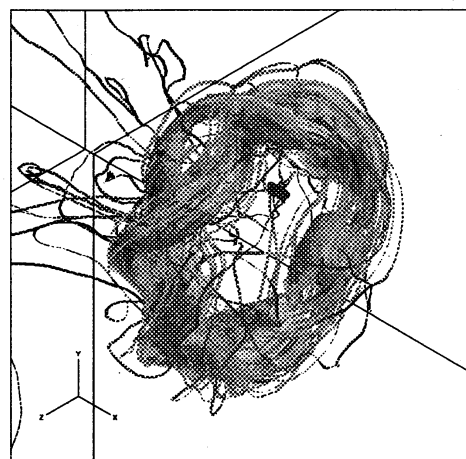


図5 渦線, $H > 0, t = 50$

4.4 圧力場の可視化

各 Phase とも渦度の可視化の図とはほぼ同じ特徴が見られた。ただ、渦度と比較して圧力の場合は分布が滑らかであるように見られる。圧力は、

$$\nabla^2 p = \frac{\omega^2}{2} - \sigma^2 \equiv S \quad (12)$$

$$p = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|} S(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (13)$$

のように求められるから、局所的な S だけでなく空間全体に広がる S を足し合わせるから平滑化が行なわれる。ゆえに、圧力の分布が滑らかになる。そのため等圧力面のねじれは先ほど示した等渦度面のねじれに比べ、はっきりと観察することが出来なかった。

4.4.1 その他の Run について

先ほどは、Run1、2 について渦度場、圧力場の可視化を行なったが、その他の Run についても可視化図を調べてみると、軸流を入れることによって、等渦度面がねじれることが分かった。しかし、Phase3 での各物理量の違いは、最初に入れたかく乱のわずかな違いにより、変わってくるこ

が分かった。また、Run4では、波の数の減少が見られなかった。すなわち、かく乱のわずかな違いによってその後の現象に違いが起こることが分かった。また、軸流の向きに正負に関してはその違いを見い出すことはできなかった。

4.5 モーダルエネルギー

前セクションでは、渦輪の方位角方向の波状変形の波の数について触れた。可視化図からは確かに波の数の減少が見られた。この可視化図によって見られた減少を定量的に確かめるために、時間に対する θ 方向 (渦輪の方位角方向) のモーダルエネルギーを図示し、本当に波の数が減少しているかを調べた。以下に θ 方向のモーダルエネルギー、モーダルエンストロフィーを以下のようにして求める。速度 $u_i(x, r, \theta, t)$ 、渦度 $\omega_i(x, r, \theta, t)$ (i は x, r, θ 成分を表す) を θ (渦輪の方位角方向) についてフーリエ変換し、次式によってモーダルエネルギー: $E_n(t)$ 、モーダルエンストロフィー: $\Omega_n(t)$ を与える。

$$E_n(t) \equiv \sum_i \left(\sum_{x,r} |u_i(x, r, n, t)|^2 \right). \quad (14)$$

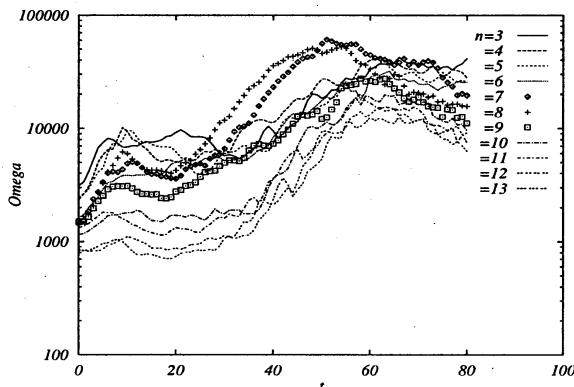
$$\Omega_n(t) \equiv \sum_i \left(\sum_{x,r} |\omega_i(x, r, n, t)|^2 \right). \quad (15)$$

ここで、 n は任意の波数を表す。

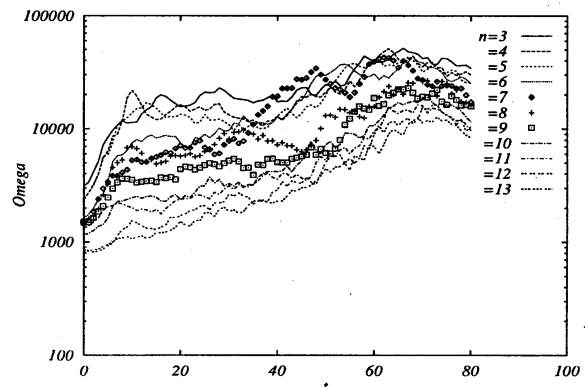
先ほど触れた、Phase1での不安定波の減少を見ていく。軸流なしの場合は確かに8から7へモーダルエネルギー、モーダルエンストロフィーのシフトが起こっていることが分かる。確かに定量的に見ても図2、3から数えた波の数はあっていることが分かる (図6)。

また、同じ時刻での $H > 0$ の場合、図6を見ると $t = 50$ で波の数が6とか7に見えるがモーダルエネルギー、モーダルエンストロフィーを調べると、 $n = 3$ のモードも強い。この理由を示すために、 $n = 3$ の三角形2つの組合せではないのかと考えた。この仮定でいくと、モーダルエネルギー、モーダルエンストロフィーの図で $n = 6$ 以外に $n = 3$ のモードも強いということとつじつまが合う。

次に、軸流の有無について見ていく。モーダルエネルギーについて見ると、軸流が無い時に見られた低波数と高波数間のエネルギーギャップが軸流を入れることによってなくなっているようにも見える。しかし、 $H > 0$ の時もエネルギーギャップがあるように見えないこともなく、軸流を入れるとギャップがなくなるということはいえない。一方、モーダルエンストロフィーについて見ると、軸流がない時に見られた低波数と高波数間のエンストロフィーギャップが、軸流を入れることによってなくなることがはっきり分かる。



(a) Run1 ($H = 0$)



(b) Run2 ($H > 0$)

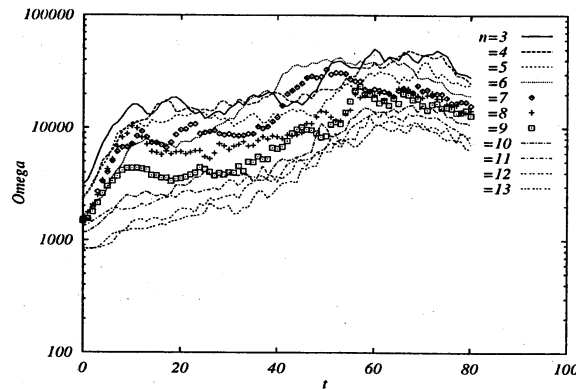
(c) Run3 ($H < 0$)

図6 Modal Enstrophy

4.6 散逸場と渦度場、圧力場の空間的位置関係

ここでは、渦度場と散逸場、圧力場と散逸場の可視化を行ない、散逸場が渦度場や圧力場とどのような相対的位置に存在しているのかを視覚的にとらえていく。

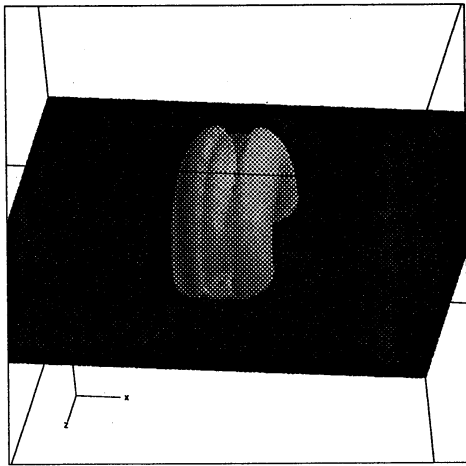
4.6.1 散逸場と渦度場の空間的位置関係

まず、 $H = 0$ の軸流なしの場合を見ていく。図7は初期状態である。中央の灰色の領域が等渦度面、そのまわりにある青色の領域が等散逸面であるが、渦度の強い領域のまわりに散逸の強い領域が存在していることが分かる。下の図は散逸場をスカラー表現したものであるが、この図を見ても確かに渦度の強い領域の外側に散逸の強い領域が存在していることが分かる。

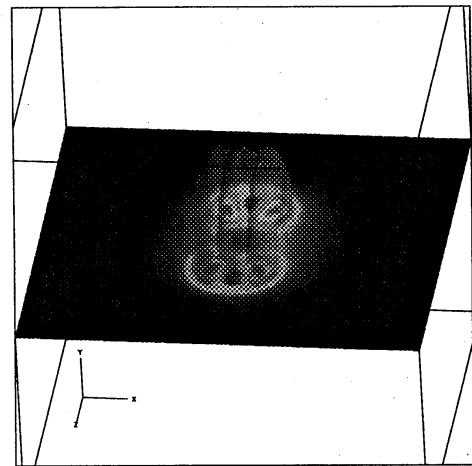
次に、先ほど図4で見た当渦度面のねじれが顕著な $H > 0$ 、 $t = 50$ の渦度場と散逸場の位置関係についてみていく。図8を見ると、 $H = 0$ の場合と同様、渦度が強い所のまわりに散逸の強い所が存在している。もう少しよく見てみると、ねじれている等渦度面の間の位置に散逸の強い所が存在しているように見える。これは、この位置でshearが強くなるため散逸も強くなるのではと考えられる。

4.6.2 散逸場と圧力場の空間的位置関係

今度は、圧力場と散逸場の位置関係について見ていく。 $H > 0$ 、 $t = 50$ での関係について注目してみる(図9)。先ほどの渦度場と散逸場の位置関係と同様、圧力が低い所のまわりに散逸の強い所が見られた。また、渦度場の場合と圧力場の場合を比べてみると、圧力場の場合、渦度場よりもやや広い領域に等値面が存在しているように見える。実際、散逸場が渦度場や圧力場にどれぐらいの割合で含まれているのかを調べてみた(図10)。圧力場は渦度場と比べて滑らかな現象が見られる。これは、圧力場は大きい値でも、渦度場と比べて散逸場と同じ空間的配置を持っていることを示している。おそらく、圧力場は渦度場に散逸場をやや含んだ広い領域に存在しているのだと思われる。



(a) $\frac{|\omega^2|}{|\omega_{\max}^2|} = 0.2$: 灰色, $\frac{|\sigma^2|}{|\sigma_{\max}^2|} = 0.4$: 青, スカラー: 渦度



(b) スカラー: 散逸

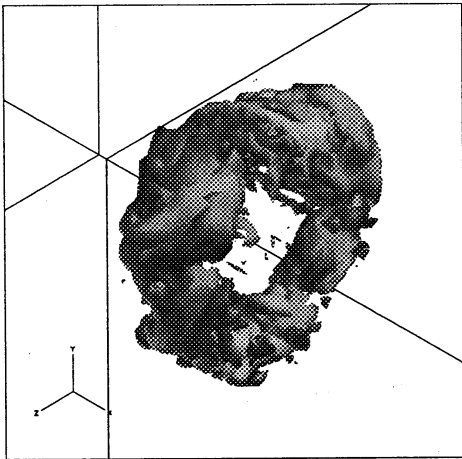


図8 $\frac{|\omega^2|}{|\omega_{\max}^2|} = 0.08$: 灰色 $\frac{|\sigma^2|}{|\sigma_{\max}^2|} = 0.15$: 青

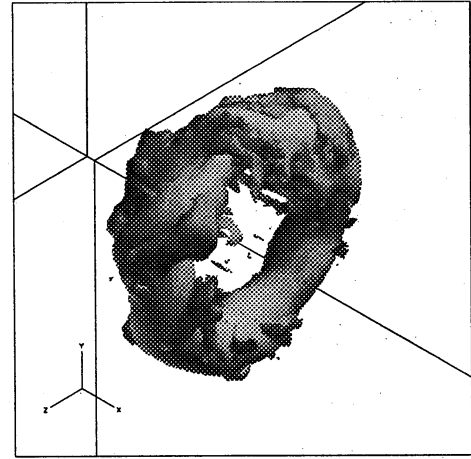
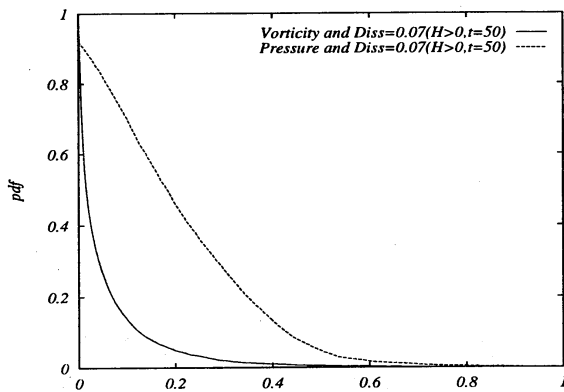
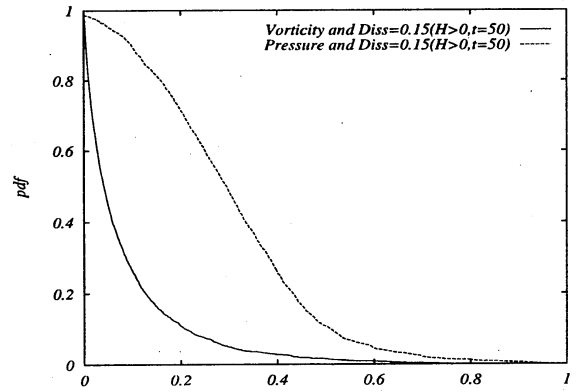


図9 $\frac{p}{p_{\min}} = -0.3$: 灰色 $\frac{|\sigma^2|}{|\sigma_{\max}^2|} = 0.15$: 青

* 図8、図9ともに $Run2, t = 50$



(a) $\sigma^2 = 0.07$



(b) $\sigma^2 = 0.15$

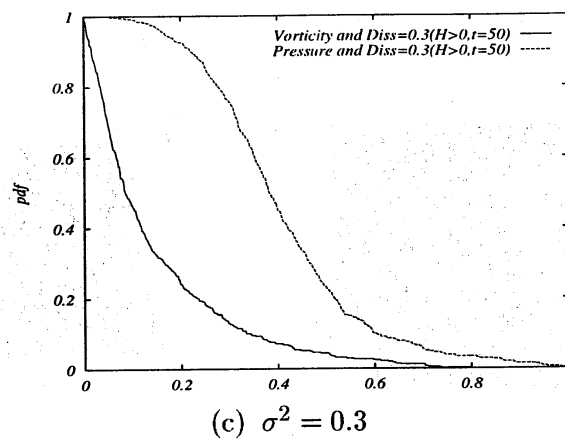


図10 散逸場が渦度場、圧力場に含まれる割合 (Run2, t=50)

5 結論

結果を以下にまとめる。

・各物理量について

- トータルエンストロフィー、トータルディSSIPATIONが増加している phase で不安定波の減少、等渦度面のねじれがよく見られた。

・渦度場と圧力場の可視化について

軸流有無の比較

- 軸流を入れることにより、等渦度面のねじれが顕著に現れた。

・モーダルエネルギー、モーダルエンストロフィーについて

- 軸流を入れることにより低波数と高波数間のエネルギーギャップが現れなくなるようにも見られるが、はっきりとは言えない。
- モーダルエンストロフィーの方ではギャップが現れなくなることがはっきりと観察できた。

・渦度場、圧力場と散逸場の可視化

渦度場と散逸場の可視化

- 渦度場と散逸場の空間的配置が違うことが観察された。

圧力場と散逸場の可視化

- 圧力場は渦度場に散逸場を含んだやや広い領域で存在していることが観察された。

全体を通してみて、渦輪の一生は、波状変形や等渦度面のねじれなどの不安定な現象によって、後の減衰の様子等が変わってくると考えられる。すなわち、不安定な現象でエンストロフィーを取られてしまうと渦輪が早く減衰することが分かった。また、軸流の有無、軸流の正負についての違いは、かく乱を配置するための乱数の種を変えてやるだけで各物理量の様子が変わってしまうので、特徴を掴むことは出来なかった。

参考文献

- [1] Karim Shariff. 1992 *Annual Review of Fluid Mechanics*. **24** 235-279
- [2] Shariff, K., Verzicco, R. & Orlandi, P. 1994 *J. Fluid Mech.* **279**, 351-375.
- [3] Widnall, S.E., Bliss, D.B. & Zalay, A. 1971 *In Aircraft Wake Turbulence and Its Detection*, p.305. Plenum.
- [4] S.James & C.K.Madnia 1996 *Phys. Fluids* **8** 2400-2414
- [5] N.J.Zabusky,O.N.Boratav,R.B.Pelz,M.Gao,D.Silver,& S.P.Cooper
Phys. Rev. Lett. **67** 2469-2472
- [6] 矢島 雅 1996 修士論文, 名古屋工業大学 生産システム工学専攻
- [7] 今井 伸治 1994 卒業論文, 名古屋工業大学 生産システム工学科
- [8] 今井 伸治 1996 修士論文, 名古屋工業大学 生産システム工学専攻
- [9] 内藤隆 et al 1996 *ながれ* **15** 401-408
- [10] Zabusky, Silber, Pelz, and Vizgroup '93 *パリティー* **08** 12-20
- [11] 巽 友正 *培風館* 278-284