

測地線定式化と Euler 方程式の多重解像度近似

岡山理科大工 荒木 圭典
東京農工大工 鈴木 勝博

1 非圧縮正規直交ウェーブレットの構成

本節では非圧縮正規直交ウェーブレット基底の構成法について述べる。

非圧縮ベクトルウェーブレットの構成の試みは、これまでも Battle and Federbush[1], Frick and Zimin[2] といったものがある。前者の構成法はベクトルの curl の 2 乗積分 $\int (\nabla \times \mathbf{A})^2 d\mathbf{x}$ を拘束条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ と特殊な境界条件下で極小化して求める。後者は Fourier 空間の球殻 $2^N\pi < k < 2^{N+1}\pi$ 上のステップ関数を Fourier 変換し curl を取ったもの、すなわち

$$\mathbf{v}_{N\nu n}(\mathbf{x}) = -\frac{9}{14} \sqrt{\frac{7\pi 2^{3N}}{9}} \mathbf{e}_\nu \times \nabla_s \left(\frac{\cos(s) - \cos(2s)}{s^2} \right), \quad s = 2^N \pi (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{N\nu}) \quad (1)$$

によって構成する (文献 [3] も参照)。

われわれの構成法は前二者とは異なり、Beltrami 分解 [4] された速度場の Fourier 係数を、ウェーブレット基底の Fourier 係数によってユニタリ変換することで、非圧縮のベクトル場のウェーブレット展開を得る。この方法の利点は、(1) curl を用いた定義と比較して、スカラー関数のウェーブレット展開のアルゴリズムを直接用いて、数値計算された速度場からウェーブレット係数を求めることができる、(2) ウェーブレットの形を自由に取ることが簡単にできる、という二点にある。

1.1 \mathbf{R}^3 上の 3 次元ベクトル場の直交分解

本節では 3 次元のベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in (\chi(\mathbf{R}^3) \cap L^2(\mathbf{R}^3))$ の複素ヘリカル波を用いた直交分解について述べる。複素ヘリカル波分解は、3 次元の非圧縮のベクトル場を取り扱う手法として、流体の運動の解析に応用されてきた¹。ここでは、Lesieur[6] や Waleffe[7] にならい、ベクトル値の Fourier モードを直交変換した「基底ベクトル (ヘリカルモード)」を構成し、ベクトル場の Fourier 係数をこれら「ヘリカルモード」に射影する方法を採用する²。

まず非圧縮ベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の Fourier 係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ が波数ベクトル \mathbf{k} に直交する (これを L^2 における非圧縮ベクトルの定義としよう) という性質を用いるために、波数空間に $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ とは別の局所直交な右手系 $\{\hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k}), \hat{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{k}), \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{k})\}$ を次式を用いて導入しよう³:

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k}) \times \hat{\mathbf{x}} & (\hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k}) // \hat{\mathbf{z}}) \\ \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k})}{|\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k})|} & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad \hat{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{k}) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{k}) \times \hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k}). \quad (2)$$

この $\{\hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k}), \hat{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{k}), \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{k})\}$ を用いて「偏光ベクトル」 $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma)$ ($\sigma = \pm 1$) を次式で定義する:

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma) = \frac{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{k}) + i\sigma \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

¹電磁波の量子力学的取り扱いにおいて、Coulomb ゲージにおけるベクトルポテンシャルを表現する関数として、複素ヘリカル波と同様な関数がいわれている [5]。

²ヘリカル分解は、Fourier 係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ が $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0$ をみたすならば、これを $\hat{\mathbf{u}}_\pm(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + i\hat{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{k}) \times \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ と変換することによって直接構成できる [4]。しかし本研究の目的は非圧縮のベクトル場の「正準基底」を構成することにあるので、この表現法は用いない。

³ $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{k}), \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{k})$ の選択には \mathbf{k} -軸まわりの回転の分だけ自由度が存在することに気をつけよう。

上式で定義された偏光ベクトルが次式を満たす事は容易に見て取れる:

$$\text{非圧縮性: } \mathbf{k} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_k) = 0, \quad (4)$$

$$\text{Beltrami性: } \mathbf{i}\mathbf{k} \times \mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_k) = \sigma_k |\mathbf{k}| \mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_k), \quad (5)$$

$$\text{実数性: } \overline{\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_k)} = \mathbf{h}(-\mathbf{k}, \sigma_k) = \mathbf{h}(\mathbf{k}, -\sigma_k), \quad (6)$$

$$\text{直交性: } \overline{\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_i)} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_j) = \delta(\sigma_i | \sigma_j), \quad (7)$$

ここで \bar{f} は f の複素共役であり $\delta(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ は “Kronecker のデルタ”、すなわち二つの引き数 \mathbf{A} と \mathbf{B} が一致すれば 1 を、それ以外では 0 を与えるものとする。

この偏光ベクトル $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma)$ を用いると、 \mathbf{R}^3 上の $\int \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の Fourier 係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ は \mathbf{k} 毎に

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \hat{u}_x(\mathbf{k}) \hat{x} + \hat{u}_y(\mathbf{k}) \hat{y} + \hat{u}_z(\mathbf{k}) \hat{z} \quad (8)$$

$$= \hat{u}_+(\mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k}, +) + \hat{u}_-(\mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k}, -) + \hat{u}_d(\mathbf{k}) \hat{\kappa}(\mathbf{k}) \quad (9)$$

とユニタリ変換される、ここで

$$\hat{u}_+(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \overline{\mathbf{h}(\mathbf{k}, +)}, \quad \hat{u}_-(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \overline{\mathbf{h}(\mathbf{k}, -)}, \quad \hat{u}_d(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\kappa}(\mathbf{k}) \quad (10)$$

である。これを用いてベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の直交分解⁴

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_+(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_-(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_d(\mathbf{x}), \quad (12)$$

を得る、ここで $\mathbf{u}_+(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_-(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_d(\mathbf{x})$ は次に挙げる式で定義される $L^2(\mathbf{R}^3)$ ベクトルである:

$$\mathbf{u}_+(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{u}_+(\mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k}, +) \exp(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}, \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_-(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{u}_-(\mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k}, -) \exp(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}, \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{u}_d(\mathbf{k}) \hat{\kappa}(\mathbf{k}) \exp(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}. \quad (15)$$

このクラスのベクトル場の 1 階の導関数を形式的に次式で定義する⁵:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\pm}{\partial x_j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{i}k_j \hat{u}_\pm(\mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k}, \pm) \exp(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}, \quad (16)$$

ただし $j = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, $(k_1, k_2, k_3) = (k_x, k_y, k_z)$ である。

1.2 ヘリカル基底の構成

本節では前節の結果を用いて、 L^2 非圧縮ベクトル場の正規直交基底 (以下、「ヘリカル基底」と呼ぶ) の一般的な構成法を考えよう。

⁴ベクトル場の直交分解については、吉田 (文献 [8] 第 4 章) を参照のこと。一般の直交分解定理は \mathbf{R}^3 内のコンパクトな可微分多様体の上でなされており、 \mathbf{R}^3 上のベクトル場のものは見当たらないようである。一般にコンパクトな多様体の上のベクトル場は圧縮性成分と非圧縮性の成分以外に、調和函数ベクトル場成分を持つ。 $L^2(\mathbf{R}^3)$ ではこのような調和函数は定数 0 以外に有り得ないので、ここでは考えないことにする。

いくつかの簡単な領域 (円筒、球殻、トーラス) において、非圧縮、非調和ベクトル場成分は、さらに「右偏光」「左偏光」モードへと一意に分解できる。このときの Beltrami 分解の基底は Laplace 作用素 Δ の固有値 λ 、固有函数 $f_\lambda(\mathbf{x})$ を用いて

$$f_{\lambda, \pm}(\mathbf{x}) = \nabla \times \nabla \times (f_\lambda(\mathbf{x})e) \pm \sqrt{-\lambda} \nabla \times (f_\lambda(\mathbf{x})e) \quad (11)$$

によって構成される、 e は適切な単位ベクトル。この基底の具体例としては Chandrasekhar-Kendall 函数がある [9]。これらは curl 作用素の固有ベクトルになっている。したがって非圧縮成分をこれらの基底に射影して、固有値の正負で分ければよい。

⁵非圧縮の流れの理論において、速度場のマルチフラクタル性が問題となるようないくつかの重要な問題において、この導関数の積分が収束しない場合がある。たとえば Onsager の予想「Euler 方程式は C^α , ($\alpha > 1/3$) の Hölder クラスでエネルギーを保存する」はこのような問題の典型である [10]。この定理の証明は 1994 年までかかった [11]。

まず複素スカラー値の関数の集合 $\{f_N(\mathbf{x}); N \in K\}$ が $L^2(\mathbf{R}^3)$ の正規直交な完全系であるとしよう、ここで N は関数を区別するための添え字 (K は添え字の集合) であり、正規直交性は等式

$$\int_{\mathbf{R}^3} f_i(\mathbf{x}) \overline{f_j(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \delta(i|j) \quad (17)$$

によって表現される。フーリエ変換は (定数倍を除いて) ユニタリー変換であることを用いて、この正規直交性は等価な表現

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \widehat{f}_i(\mathbf{k}) \overline{\widehat{f}_j(\mathbf{k})} d\mathbf{k} = \delta(i|j) \quad (18)$$

によって表される。

ヘリカル基底 $\{f_{N,\sigma}(\mathbf{x}); N \in K, \sigma = \pm 1\}$ はこの完全系 $\{f_N(\mathbf{x}); N \in K\}$ のフーリエ像 $\{\widehat{f}_N(\mathbf{k}); N \in K\}$ を用いて

$$f_{N,\sigma}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \widehat{f}_N(\mathbf{k}) h(\mathbf{k}, \sigma) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \quad (19)$$

によって得られる。これらが正規直交であることは見やすい。実際

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} f_{i,\sigma_i}(\mathbf{x}) \cdot \overline{f_{j,\sigma_j}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \widehat{f}_i(\mathbf{k}) \overline{\widehat{f}_j(\mathbf{k})} [\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_i) \cdot \overline{\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_j)}] d\mathbf{k}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \widehat{f}_i(\mathbf{k}) \overline{\widehat{f}_j(\mathbf{k})} \delta(\sigma_i|\sigma_j) d\mathbf{k}, \\ &= \delta(i|j) \delta(\sigma_i|\sigma_j). \end{aligned} \quad (20)$$

ヘリカル基底は偏光ベクトルの定義式 (3) より実ベクトル値関数である。また、ヘリカル基底は Beltrami 流ではない。したがって Euler 方程式の定常解ではない。このことより後にみるように、非線形の 2 モード相互作用が生じる。

この基底によるベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の展開係数を求めよう。

$$\begin{aligned} u(j, \sigma) &= \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{f_{j,\sigma}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \widehat{f}_j(\mathbf{k}) (\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \overline{\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma)}) d\mathbf{k}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \widehat{u}_\sigma(\mathbf{k}) \overline{\widehat{f}_j(\mathbf{k})} d\mathbf{k}, \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} u_\sigma(\mathbf{x}) \overline{f_j(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (21)$$

前式中に現れるスカラー値関数 $u_\sigma(\mathbf{x})$ は、ヘリカルモードベクトル $\mathbf{u}_\sigma(\mathbf{x})$ の定義より偏光ベクトルを抜いたもの、

$$u_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \widehat{u}_\sigma(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \quad (22)$$

によって定義される $L^2(\mathbf{R}^3)$ 関数である⁶。

ヘリカルウェーブレットは、この完全系 $\{f_N(\mathbf{x}); N \in K\}$ として \mathbf{R}^3 上のウェーブレット基底 $\{\psi_{j\epsilon l}(\mathbf{x})\}$ (ここで j は「解像度クラス」、 ϵ は「ウェーブレットの種類」、 l は「ウェーブレットの位置」を表す添え字) を用いることで構成される。次節ではこのウェーブレット基底の構成法の概略を述べる。

1.3 多重解像度近似のあらまし

本節では $L^2(\mathbf{R}^N)$ 上の多重解像度近似の概略について述べる (文献 [12, 13])。

多重解像度近似 (multiresolution approximation, MRA) とは次にあげる条件を満たす $L^2(\mathbf{R}^N)$ の部分空間列 $\{V_j; V_j \subset L^2(\mathbf{R}^N), j \in \mathbf{Z}\}$ のことをいう (文献 [12] §2.2):

1. $V_j \subset V_{j+1}$ for $\forall j \in \mathbf{Z}$;

⁶この関数は $h(\mathbf{k}, \sigma)$ の構成の仕方に依存するので一意には決まらない。

2. $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;
3. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^N)$;⁷
4. $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$ for $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^N), \forall j \in \mathbf{Z}$;
5. $f(x) \in V_0 \iff f(x-k) \in V_0$ for $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^N), \forall k \in \mathbf{Z}$;
6. $\exists g(x) \in V_0$ s.t. $\{g(x-k); k \in \mathbf{Z}, V_0$ の Riesz 基底 $\}$.

最後の条件については V_0 の Riesz 基底から V_0 の正規直交基底を構成できることが知られている (文献 [12] §2.3, Theorem 1)。

空間 1 次元の場合には、逆にある函数 $\phi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が条件

1. $\phi(x)$ は急減少函数;
2. $\phi(x)$ の Fourier 像 $\hat{\phi}(k)$ は $\sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(k+2\pi l)|^2 \equiv 1$ をみたす;
3. $|\hat{\phi}(0)| = 1$;
4. $\exists m_0(k) \in C^\infty(\mathbf{T})$ s.t. $\hat{\phi}(2k) = \hat{\phi}(k)m_0(k)$,

(以下 $C^\infty(\mathbf{T})$ は周期 2π の滑らかな周期函数の集合) を満たすならば、MRA の条件をみたす $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間列 $\{V_j, j \in \mathbf{Z}$ s.t. $V_0 = \overline{\text{span}\{\phi(x-l); l \in \mathbf{Z}\}}\}$ を作る事が知られている⁸(文献 [13] 定理 6.2.1,)。この MRA を生成する函数 $\phi(x)$ をスケーリング函数という。

多重解像度近似は、その名が示すように、 $L^2(\mathbf{R})$ クラスの函数 $f(x)$ を解像度クラス V_j の基底 $\{\phi_{j,l}(x) \equiv \sqrt{2^j} \phi(2^j x - l); l \in \mathbf{Z}\}$ によって

$$f_j(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} f_{j,l} \phi_{j,l}(x), \quad \text{ここで } f_{j,l} = \int_{\mathbf{R}} f(y) \overline{\phi_{j,l}(y)} dy \quad (23)$$

と近似していく。Mayer によれば近似列 $\{f_j(x)\}$ の $f(x)$ への収束は $L^2(\mathbf{R}^N)$ を越えて、Sobolev 空間 H^s ($-r \leq s \leq r$, r は $\phi(x)$ の "regularity"⁹) で保証される ([12] §2.7, Theorem 6)。またこの同じ "regularity" r に対して「 $f(x)$ が r -次以下の多項式ならば、任意の解像度 j に対して $f_j(x) = f(x)$ 」という「驚くべき恒等式」が存在する ([12] §2.6, Theorem 4)。

さて $\phi(x)$ によって生成される MRA $\{V_j\}$ に対して

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (24)$$

によって定義される V_{j+1} における V_j の直交補空間の列 $\{W_j\}$ を考える。あきらかに

$$\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = L^2(\mathbf{R}^N) \quad (25)$$

である。ウェーブレットは、この W_j の正規直交基底をなす函数である。

まず空間 1 次元の場合には、MRA を生成する $\phi(x)$ に対してツースケール関係と呼ばれる V_1 の基底 $\{\phi_{1,l}(x) \equiv \sqrt{2} \phi(2x-l)\}$ からスケーリング函数 $\phi(x)$ および W_0 の正規直交基底を生成する函数 $\psi(x)$ ("mother wavelet" と呼ばれる) へのユニタリー変換が存在する:

$$\exists \{a_l\}, \{b_l\} \in l^2(\mathbf{Z}) \text{ s.t. } \phi(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \phi_{1,l}(x) \in V_0, \quad \psi(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} b_l \phi_{1,l}(x) \in W_0. \quad (26)$$

⁷この節では閉包 (closure, $\bar{}$) は L^2 のノルムに対してとるものとする。

⁸これを「 $\phi(x)$ が MRA $\{V_j\}$ を生成する」という。

⁹「 $\phi(x)$ が r -regular である」と呼ぶ。これは大雑把に言って「 r 階の導函数まで急減少函数」という意味。

これは次に挙げる Fourier 空間での等価な表現を持つ ([13] §5.6, 補題 5.6.5):

$$\exists m_1(k) \in C^\infty(\mathbf{T}) \text{ s.t. } \begin{pmatrix} m_0(k) & m_1(k) \\ m_0(k+\pi) & m_1(k+\pi) \end{pmatrix} \text{ は a.e. } k \in \mathbf{R} \text{ でユニタリ.} \quad (27)$$

このときツースケール関係は Fourier 空間において

$$\widehat{\phi}(2k) = \widehat{\phi}(k)m_0(k), \quad \widehat{\psi}(2k) = \widehat{\phi}(k)m_1(k) \quad (28)$$

と書き下される。このウェーブレット函数 $\psi(x)$ を用いて、空間 W_j は

$$W_j = \overline{\text{span}\{\sqrt{2^j}\psi(2^jx-l); l \in \mathbf{Z}\}} \quad (29)$$

と表すことができる。

3次元の場合には1次元の MRA $\{V_j(\mathbf{R})\}$ のテンソル積

$$V_j(\mathbf{R}^3) \equiv V_j(\mathbf{R}) \otimes V_j(\mathbf{R}) \otimes V_j(\mathbf{R}) \quad (30)$$

によって $L^2(\mathbf{R}^3)$ の MRA $\{V_j(\mathbf{R}^3)\}$ を構成し、 V_j の V_{j+1} 内における直交補空間として W_j を定義する方法が一般的である。したがって3次元のスケーリング函数およびウェーブレットは1次元のスケーリング函数 $\psi_0(x) = \phi(x) \in V_0(\mathbf{R})$, ウェーブレット函数 $\psi_1(x) = \psi(x) \in W_0(\mathbf{R})$ を用いて

$$\psi_\epsilon(x) = \psi_{\epsilon_x}(x)\psi_{\epsilon_y}(y)\psi_{\epsilon_z}(z), \quad \epsilon = \epsilon_x + 2\epsilon_y + 4\epsilon_z \quad (31)$$

$\epsilon = 0$: スケーリング函数 ($\in V_0(\mathbf{R}^3)$), $\epsilon = 1, 2, \dots, 7$: ウェーブレット函数 ($\in W_0(\mathbf{R}^3)$) によって構成される。空間 $V_j(\mathbf{R}^3)$ ($\epsilon = 0$ のとき), $W_j(\mathbf{R}^3)$ ($\epsilon = 1, 2, \dots, 7$ のとき) の基底は具体的に

$$\psi_{j\mathbf{l}}(x) = \sqrt{2^{3j}} \psi_{\epsilon_x}(2^jx - l_x) \psi_{\epsilon_y}(2^jy - l_y) \psi_{\epsilon_z}(2^jz - l_z), \quad \mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z) \in \mathbf{Z}^3 \quad (32)$$

と書き下される。

本節の最後にスケーリング函数の具体例として Littlewood-Paley 型 MRA のスケーリング函数とそれに付随するウェーブレット (Mayer のウェーブレット) を紹介する。スケーリング函数の Fourier 係数 $\widehat{\phi}(k)$ は C^∞ -クラスの実数値函数で、次式を満たす:

$$\widehat{\phi}(k) = \begin{cases} 1 & \text{on the interval } [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \\ 0 & \text{outside the interval } [-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]. \end{cases} \quad (33)$$

この隙間 $[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}]$, $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ は $0 \leq |\widehat{\phi}(k)| \leq 1$ および $|\widehat{\phi}(k)|^2 + |\widehat{\phi}(k+\pi)|^2 = 1$ をみたす C^∞ 函数ならばなんでもつないでもよい。Yamada and Ohkitani のレシピ [14] に従えば

$$\widehat{\phi}(k) = \sqrt{g(k)g(-k)}, \quad (34)$$

ここで $g(k)$, $h(k)$ は次式で与えられる:

$$g(k) = \frac{h(\frac{4\pi}{3} - k)}{h(k - \frac{2\pi}{3}) - h(\frac{4\pi}{3} - k)}, \quad h(k) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{k^2}\right) & k > 0 \\ 0 & k \leq 0. \end{cases} \quad (35)$$

Mayer のレシピにおけるツースケール関係 $m_0(k)$, $m_1(k)$ ($\in C^\infty(\mathbf{T})$) は

$$m_0(k) = \widehat{\phi}(2k), \quad m_1(k) = \exp(-ik)\overline{m_0(k)}, \quad \text{on } -\pi \leq k \leq \pi \quad (36)$$

(およびその周期 2π の周期函数への拡張) によって与えられる。

2 「移流」の Riemann 幾何学的観点からの定義

本節では非圧縮流体の Euler 方程式の Riemann 幾何学的な取り扱いについての簡単なレビュー、いくつかの数学用語の流体力学用語へのパラフレーズ、および「移流」(非線型相互作用)の定義について考察をおこなう。

非圧縮な完全流体の運動を、(右)不変な Riemann 計量を持つ Lie 群上の測地線として、幾何学的な観点から捉え直す試みは Arnol'd によってはじめられた [15]。Arnol'd の方法の利点は、Lie 代数を用いた位相幾何学的な記述が、多様体上の局所座標系(すなわち展開関数系)に依存しない形で表現されていることにある。したがってウェーブレット展開における主要な作業は、微分位相幾何学的な結果をウェーブレット函数を用いて書き下すことにある。本節で明らかにされるが、Riemann 幾何学による「移流」の定義は、2, 3 次元の非圧縮流の場合、および 1 次元系の場合は定数倍を除いて Iima and Toh による移流の定義に一致する [16]。

まず領域 D 上の体積保存微分同相写像を定義しよう。ある実数のパラメーター $t \in \mathbf{R}$ を持ち、 t を変化したときにベクトル場の集合 $\chi^S(D) \cap L^2(D)$ の位相の意味で連続な一般の非圧縮ベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ によって移流される Lagrange 的マーカーを考える。常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t), \quad (37)$$

の解 $\mathbf{X}(t)$ ($\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0$) および Dirac 測度 $\delta(\mathbf{x})$ を用いて

$$\psi(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x}_0, t_0) \equiv \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{X}(t_1)) \quad (38)$$

によって定義される超函数を Kaneda (文献 [17]) にならって「位置函数」と呼ぼう。位置函数は領域 D 上の任意の函数に対して、「ベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ による移流」を表す積分核として作用する:

$$f(\mathbf{x}_1, t_1) = \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x}_0, t_0) f(\mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}_0. \quad (39)$$

この積分核は領域 D から D への (D の位相および t に関して) 連続な全単射を構成し、 \mathbf{u} の非圧縮性より D の任意の体積要素を保存する。この函数の時間発展の規則は、任意の示強性変数 $f(\mathbf{x}, t)$ の時間発展が $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ による移流の式

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (40)$$

によって与えられねばならないから、任意の「時刻」 t_1 において形式的に

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} \right) \psi(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad (41)$$

とあらわすことができる。この写像の積を

$$\psi(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x}_1 \psi(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x}_1, t_1) \psi(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x}_0, t_0) \quad (42)$$

(ただし \mathbf{v} と \mathbf{w} が t_1 で連続なものしか認めない) で定義する¹⁰ことで「積分核としての位置函数の集合」は群をなす。この積分作用素からなる群を SDiff D と表記する。

この SDiff D の単位元 e (恒等写像 id)

$$\psi(\mathbf{x}_1, 0 | \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x}_0, 0) = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (44)$$

における「接平面」を考えよう。このような接平面は、有限次元の多様体の上の場合と同様に、パラメーター t に関する導函数の同値類で定義される。式 (41) より

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \right] = -\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla \quad (45)$$

¹⁰ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は次式で表されるベクトル場となる:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) & t \leq t_1 \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) & t \geq t_1 \end{cases} \quad (43)$$

(同値類 [*] は $t=0$ のときに $u_0(x)$ となるようなベクトル場の集合 $\{u(x, t)\}$ の全体にわたってとるものとする)となるので $T_e \text{SDiff} D$ は「 D 上の非圧縮ベクトル場全体のなす空間 $\chi^S(D)$ 」となる。この空間に対し交換子 $[a, b]$ をベクトル場の Poisson 括弧¹¹で定義する:

$$[a, b] = \left(b_k(x) \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} - a_k(x) \frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (46)$$

同じ添え字は和を取るものとする。これによって $\chi^S(D)$ は Lie 代数の構造を持つ。この Lie 群 $\text{SDiff} D$ の Lie 代数を $\text{sdiff} D$ と表記する。

力学の鍵となるいくつかの概念のパラフレーズを試みよう。まず「($\text{SDiff} D$ の原点 e における) Riemann 計量」¹²は、力学的には「任意のベクトル場 $a, b \in \chi^S(D) \cap L^2(D)$ の内積」

$$\langle a, b \rangle \equiv \int_D a(x) \cdot b(x) dx \quad (48)$$

で定義される量のことである。

そして、Lie 群上の保存系の力学を理解する上で重要な「 $\text{SDiff} D$ 上の Riemann 計量が (右) 不変である」ということは、力学的には「エネルギーの詳細釣り合いが任意の展開関数において保証されるように、任意の二つのベクトル場 a, b の内積が、任意のベクトル場 c による「移流 ∇_c 」によって保存されるような、「移流」が定義されている」ということに他ならない。したがって「移流」の満たすべき条件は次式¹³で与えられる:

$$\langle \nabla_c a, b \rangle + \langle a, \nabla_c b \rangle = 0, \text{ for } \forall a, \forall b \text{ and } \forall c \in \chi^S(D). \quad (49)$$

詳細な計算にはふれないが、Arnol'd によれば「移流」(Lie 群上の Levi-Civita 接続) ∇ の具体的な表式は次式で表される [15]:

$$\nabla_c a = \frac{1}{2} \left([c, a] - B(c, a) - B(a, c) \right). \quad (50)$$

ここで $B(c, a)$ は双線形かつ非圧縮なベクトル値関数であり、部分積分を用いて関係式

$$\langle b, B(c, a) \rangle \equiv \langle c, [a, b] \rangle \quad (51)$$

によって定義される。したがって Riemann 幾何学的に求められた「 a の c による b への移流」の具体的な表式は

$$\begin{aligned} \langle b, \nabla_c a \rangle &= \frac{1}{2} \int_D \left[b \cdot (a \cdot \nabla) c - b \cdot (c \cdot \nabla) a - c \cdot (b \cdot \nabla) a \right. \\ &\quad \left. + c \cdot (a \cdot \nabla) b + a \cdot (c \cdot \nabla) b - a \cdot (b \cdot \nabla) c \right] dx \end{aligned} \quad (52)$$

となる。この式は 2, 3 次元の非圧縮ベクトル場の場合には、

$$\langle b, \nabla_c a \rangle = \frac{1}{2} \int_D \left[-b \cdot (c \cdot \nabla) a + a \cdot (c \cdot \nabla) b + \nabla \cdot \left((b \cdot c) a - (c \cdot a) b \right) \right] dx \quad (53)$$

$$= \int_D \left[-b \cdot (c \cdot \nabla) a + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left((b \cdot c) a - (c \cdot a) b + (a \cdot b) c \right) \right] dx \quad (54)$$

¹¹ここでは Arnol'd の定義に従い符号を通常の定義とは逆にとる。この定義は a, b が非圧縮ならば、 $[a, b] = \nabla \times (a \times b)$ と書ける。これは Poisson 括弧の中身のベクトルの順番と curl の中身のベクトル積の順番が一致するので、具体的な部分積分などの計算には便利である。

¹² $\text{SDiff} D$ 全体には (左) 移動でばらまく。これは具体的には式 (48) の中に現れる x を Lagrange 的マーカーと見なし $u(x, t)$ で (t の正方向に) 移流をかける。移流を施したあとの内積の値

$$\langle a, b \rangle_u \equiv \int_D a(X(t)) \cdot b(X(t)) dX(t), \quad \dot{X}(t) = u(X(t), t) \quad (47)$$

が、 $\psi(*|u(x, t)|*) \in \text{SDiff} D$ における Riemann 計量の値となる。

¹³この積分が収束し「移流」の条件をみたす関数クラスはどの程度のものであろうか。Constantin et al.[11] の証明の骨子が、エネルギーの保存が時間的に局所的に保証される条件を求めているので、同様な議論により Besov 空間 $B_{3, \infty}^\alpha$ ($\alpha > 1/3$) ならば保証されそうである。

と書き下される。境界積分が 0 ならば、1 行目の表式より Riemann 幾何学的「移流」の定義は Iima and Toh の "unit" に一致することが判る。また 2 行目より「 c による a の移流」は、「 $-(c \cdot \nabla)a$ の非圧縮成分」である。具体的には、ある定数を除いて一意に決まるスカラー関数 P があって

$$\nabla_c a = -(c \cdot \nabla)a - \nabla P \quad (55)$$

と書き下される。これより導かれる測地線方程式 (Euler 方程式) の具体的な表式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(u \cdot \nabla)u - \nabla P \quad (56)$$

となる。

空間 1 次元の場合には、式 (38) で与えられる位置関数の集合はもはや「体積保存」では有り得ない。しかし Lie 群およびその Lie 代数の微分位相幾何学的な計算は形式的に全く同じであり、同様の議論により測地線の局所的な表式を求めることができる。このとき式 (52) はそのまま、

$$\langle b, \nabla_c a \rangle = \int_{\mathbf{R}} \left(-bc \frac{\partial a}{\partial x} + ac \frac{\partial b}{\partial x} \right) dx \quad (57)$$

となる。この式は定数倍を除いて Iima and Toh の "unit" の定義に一致する。この式を境界積分 0 を仮定して部分積分すると、「 c による a の移流」は

$$\nabla_c a = -2c \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial c}{\partial x} \quad (58)$$

と書き下される。これより導かれる測地線方程式 ("Euler" 方程式) の具体的な表式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -3u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (59)$$

となる。

さて以上の「移流 (したがって Iima and Toh の "unit")」の定義に従えば、エネルギーの詳細釣り合いが基底の取り方によらず保証されることを確認しておこう。この確認の過程において、非線型相互作用は一般には (3 モード相互作用だけではなく) 2 モード相互作用が存在し、なおかつ先の「移流」は自動的に 2 モード間相互作用におけるエネルギーの詳細釣り合いをみたすことが示される。

このことを簡単に例示するために「3 モード Galerkin 近似系」を考えよう。速度場を

$$u(x, t) = A(t)a(x) + B(t)b(x) + C(t)c(x) \quad (60)$$

と表示して Euler 方程式を書き下そう、ただし表示の簡単化のためにベクトル場 a, b, c は実数値ベクトルであり、また互いに直交していると仮定しよう¹⁴:

$$\begin{aligned} \langle a, a \rangle \dot{A} &= \langle a, \nabla_a b \rangle AB + \langle a, \nabla_a c \rangle AC + \langle a, \nabla_b b \rangle BB \\ &\quad + \langle a, \nabla_b c \rangle BC + \langle a, \nabla_c b \rangle BC + \langle a, \nabla_c c \rangle CC, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \langle b, b \rangle \dot{B} &= \langle b, \nabla_a a \rangle AA + \langle b, \nabla_a c \rangle AC + \langle b, \nabla_b a \rangle AB \\ &\quad + \langle b, \nabla_b c \rangle BC + \langle b, \nabla_c a \rangle AC + \langle b, \nabla_c c \rangle CC, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \langle c, c \rangle \dot{C} &= \langle c, \nabla_a a \rangle AA + \langle c, \nabla_a b \rangle AB + \langle c, \nabla_b a \rangle AB \\ &\quad + \langle c, \nabla_b b \rangle BB + \langle c, \nabla_c a \rangle AC + \langle c, \nabla_c b \rangle BC. \end{aligned} \quad (63)$$

¹⁴幾何学的には「Riemann 計量テンソルが対角的」であると表現される。これは函数空間上に「直交曲座標系」を設定したことに他ならない。複素ベクトルで直交していない場合(「一般の曲座標系」の場合)も、書き下すのは煩雑であるが、同様に一本道である。

この系がいわゆる triad interaction 以外の項を持っていることは、それほど不自然ではない¹⁵。

この系のエネルギーの時間発展を調べよう：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle A \dot{A} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle B \dot{B} + \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle C \dot{C}, \\
 &= \left(\langle \mathbf{a}, \nabla \mathbf{a} \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \nabla \mathbf{a} \mathbf{a} \rangle \right) A A B + \left(\langle \mathbf{a}, \nabla \mathbf{a} \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{c}, \nabla \mathbf{a} \mathbf{a} \rangle \right) A A C \\
 &\quad + \left(\langle \mathbf{a}, \nabla \mathbf{b} \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \nabla \mathbf{b} \mathbf{a} \rangle \right) A B B + \left(\langle \mathbf{a}, \nabla \mathbf{c} \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{c}, \nabla \mathbf{c} \mathbf{a} \rangle \right) A C C \\
 &\quad + \left(\langle \mathbf{b}, \nabla \mathbf{b} \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{c}, \nabla \mathbf{b} \mathbf{b} \rangle \right) B B C + \left(\langle \mathbf{b}, \nabla \mathbf{c} \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{c}, \nabla \mathbf{c} \mathbf{b} \rangle \right) B C C \\
 &\quad + \left(\langle \mathbf{a}, \nabla \mathbf{b} \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{a}, \nabla \mathbf{c} \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \nabla \mathbf{a} \mathbf{c} \rangle \right. \\
 &\quad \quad \left. + \langle \mathbf{b}, \nabla \mathbf{c} \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{c}, \nabla \mathbf{a} \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \nabla \mathbf{b} \mathbf{a} \rangle \right) A B C, \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{64}$$

となる¹⁶。「移流」 $\langle \mathbf{a}, \nabla \mathbf{c} \mathbf{b} \rangle$ の定義が \mathbf{a}, \mathbf{b} の入れ替えに対して反対称な線形汎関数であることより、これらがまとめた項毎に0であることが直接的に示される。以上より「移流」の定義が、2モード間か3モード間であるかに依らず、「モード相互作用における詳細釣り合い」を任意の基底に対して満たすことが示された。

References

- [1] Battle, G. and Federbush, P., "Divergence-free vector wavelet", Michigan Math. J., **40** (1993) pp.181-195.
- [2] Frick, P. and Zimin, V., "Hierarchical models of turbulence" in *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms* Ed. by Farge, M., Hunt, J. C. R., and Vassilicos, J. C., (Clarendon, Oxford, 1993) pp.265-283.
- [3] Zimin, V. and Hussain, F., "Wavelet based model for small-scale turbulence", Phys. Fluids, **7** (1995) pp.2925-2927.
- [4] Constantin, P., Majda, A., "the Beltrami spectrum for incompressible fluid flows", Comm. Math. Phys., **115** (1988) pp.435-456.
- [5] 例えば 高橋康、『電磁気学再入門 QED への準備』(講談社、東京、1994)を参照。
- [6] Lesieur, M., *Turbulence in Fluids* Third Ed., (Kluwer, Dordrecht, 1997) p.143ff.
- [7] Waleffe, F., "The nature of triad interactions in homogenous turbulence", Phys. Fluids A, **4** (1992) pp.350-363.
- [8] 吉田 善章、『集団現象の数理』(岩波書店、東京、1995)。
- [9] Chandrasekhar, S., Kendall, P. C., "on force-free magnetic field", Astron. J., **126** (1957) pp.457-460.

¹⁵ triad interaction であっても二等辺三角形がべしんこならばこの形になる。例えば 1:2 共鳴を起こす熱対流ロール(これは $O(2)$ 対称性を破る分岐に伴う $O(2)$ -equivariant な力学系)の方程式の2次の結合項はこの形の相互作用が「クローズアップ」されたものに他ならないのである。

さて、この形の2次の非線形項の出現とエネルギーの詳細釣り合いは、熱対流系では $O(2)$ 対称性のひとつの帰結であった。では、この「一般3モード系」の場合は系のどのような対称性の帰結と考えられるのであろうか。

Riemann 幾何学の言葉では「Riemann 計量の右不変性」に具体的な座標系 (i.e. 展開関数) による表現を与えたことの帰結であるが、このことを物理学的に解釈すると「流体粒子のラベルの(微分同相写像による)付け替えに対するダイナミクスの不変性」のひとつの帰結と読み換えることができる。これは「移流」を「ラベルの付け換え」のひとつであるとみなし、より一般的な分脈の中に「移流」を埋め込むことに他ならない。

力学的には、連続な変換に対して不変な力学系には Noether の定理により不変性に対応する保存量が存在する。Salmon によれば、ラベルの付け替えに対応する保存量は「循環の保存」である [18]。

¹⁶ この3モード系にはもう一つ積分が存在する。その理由は運動は等エネルギー面に拘束されているので、2次元のコンパクト多様体上の保存系の運動を考えると、湧き出し、吸い込み、極限周期軌道は存在し得ない。軌道が互いに交差し得ないことを考えると、解の軌道は剛体の自由回転の場合のようなセンター、サドル、周期軌道とヘテロ(もしくはホモ)クリニック軌道しかありえない。これらの軌道に沿った運動には何らかの保存量のレベルセットが対応している。

- [10] Onsager, L., "Statistical hydrodynamics", *Nuovo Cimento (Supplemento)*, **6** (1949) pp.279-287.
- [11] Constantin, P., E. W., Titi, E. S., "Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation", *Comm. Math. Phys.*, **165** (1994) pp.207-209.
- [12] Mayer, Y., *Wavelets and operators*, (Cambridge Univ. Press, 1992).
- [13] 芦野隆一、山本鎮男、【ウェーブレット解析 誕生・発展・応用】(共立出版、東京、1997)。
- [14] Yamada, M. and Ohkitani, K., "An identification of energy cascade in turbulence by orthonormal wavelet analysis", *Prog. Theo. Phys.*, **86** (1991) pp.799-815.
- [15] Arnold, V., "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits", *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1966) pp.319-361.
- [16] Iima, M. and Toh, S., "Wavelet analysis of the energy transfer caused by convective terms: Application to the Burgers shock", *Phys. Rev. E*, **52** (1995) pp.6189-6201.
- [17] Kaneda, "Renormalized expansions in the theory of turbulence with the use of the Lagrangian position function", *J. Fluid Mech.*, **107** (1981) .
- [18] Salmon, R., "Hamiltonian fluid mechanics", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20** (1988) pp.225-256.

補遺: ヘリカルモードでの「移流」の表示

さてヘリカルモード $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ に対して「移流」の表式がどのように書き下されるかみるのは興味深い。式 (52) を用いた簡単な計算の結果、「モード (\mathbf{q}, σ_q) の、モード (\mathbf{p}, σ_p) による、モード (\mathbf{k}, σ_k) への移流」は

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_k) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \nabla \mathbf{h}(\mathbf{p}, \sigma_p) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{q}, \sigma_q) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_k |\mathbf{k}| - \sigma_p |\mathbf{p}| + \sigma_q |\mathbf{q}| \right) \left[\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_k), \mathbf{h}(\mathbf{p}, \sigma_p), \mathbf{h}(\mathbf{q}, \sigma_q) \right] \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} | \mathbf{o}). \end{aligned} \quad (66)$$

ここで $[\cdot, \cdot, \cdot]$ はベクトル三重積 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \equiv \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ である。

この表式よりヘリカルモードの Levi-Civita 接続係数は \mathbf{p}, \mathbf{q} の入れ替えに対して対称な部分と反対称な部分とに分離する。Euler 方程式に適用すると、接続係数の反対称な部分は互いに打ち消し合い、対称成分のみが生き残る。したがって「モード $(\mathbf{q}, \sigma_q), (\mathbf{p}, \sigma_p)$ からモード (\mathbf{k}, σ_k) への移流 (いわゆる "triad interaction" の係数) $T(\mathbf{k} | \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 」は

$$\begin{aligned} & T\left((\mathbf{k}, \sigma_k) | (\mathbf{p}, \sigma_p), (\mathbf{q}, \sigma_q)\right) \\ &= \left(\sigma_q |\mathbf{q}| - \sigma_p |\mathbf{p}| \right) \left[\mathbf{h}(\mathbf{k}, \sigma_k), \mathbf{h}(\mathbf{p}, \sigma_p), \mathbf{h}(\mathbf{q}, \sigma_q) \right] \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} | \mathbf{o}). \end{aligned} \quad (67)$$

によって与えられる。この式が Lesieur[6] や Waleffe[7] の与えた表式と等価であることを見るのはたやすい。