数理解析研究所講究録
1052 巻 1998 年 134-141

Vector valued Siegel modular form に附随した standard L 函数の特殊値について

東工大・理　小島 教知 (Noritomo Kozima)

1. 記号の提示

n 次 Siegel 上半空間を $\mathfrak{H}_n$ で表し，n 次 Siegel modular 群 を $\Gamma^n := Sp(n, \mathbb{Z})$ で表す．次に，$V := \mathbb{C}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}x_n$（$x_j$ ：不定元）とし，$\mathrm{sym}^l(V)$ を V の l 次対称 tensor とする．ここで，$\mathrm{sym}^l(V)$ は n 変数の l 次斉次多項式全体と同一視される．このとき $\rho := \det^k \otimes \mathrm{sym}^l$ を $\mathrm{sym}^l(V)$ 上の $GL(n, \mathbb{C})$ の既約表現とし，$\mathrm{sym}^l(V)$ を値にもつ type ρ の Siegel modular form の空間を $M^n_{k,l}$，cuspform のなす部分空間を $S^n_{k,l}$ で表す．また $f, g \in M^n_{k,l}$（f, g のどちらかは $S^n_{k,l}$ に属す）に対して，Petersson 内積を (f, g) で表す．

次に，n 次の $\mathbb{C}$ 上（或は $\mathbb{Q}$ 上）の Hecke 環を $L^{(n)}_{\mathbb{C}}$（或は $L^{(n)}_{\mathbb{Q}}$）で表す．このとき，$\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(L^{(n)}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ に対して，$\mathbb{Q}$ の拡大体 $\mathbb{Q}(\lambda)$ を $\mathbb{Q}(\lambda) := \mathbb{Q}(\lambda(L^{(n)}_{\mathbb{Q}}))$ と定義する．また，固有空間 $S^n_{k,l}(\lambda)$ は $S^n_{k,l}(\lambda) := \{f \in S^n_{k,l} \mid Tf = \lambda(T)f\ (\forall T \in L^{(n)}_{\mathbb{C}})\}$ で定義される．

$f \in S^n_{k,l}$: eigenform（Hecke 環の同時固有函数）に対して，$\mathbb{Q}$ の拡大体 $\mathbb{Q}(f)$ を次で定義する．すなはち f に対して $f \in S^n_{k,l}(\lambda)$ になるやうに $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(L^{(n)}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ をとり，$\mathbb{Q}(f) := \mathbb{Q}(\lambda)$ と定義する．この

とき，Takei[8] によつて，$\mathbb{Q}(f)$ は $\mathbb{Q}$ 上の総実な有限次代数拡大であり，$[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}] \leq \dim_{\mathbb{C}} S_{k,l}^{n}$ をみたすことがわかつてゐる．

次に，$f \in S_{k,l}^{n}$: eigenform に対して，f に附随する standard L 函数を

$$L(s,\, f,\, \underline{\mathrm{St}}) := \prod_{p:\text{素数}} \left\{ (1-p^{-s}) \prod_{j=1}^{n} (1-\alpha_j(p)p^{-s})(1-\alpha_j(p)^{-1}p^{-s}) \right\}^{-1}$$

と定義する．ここで $\alpha_j(p)$ は f の Satake p-parameters である．さて，

$$\Lambda(s,\, f,\, \underline{\mathrm{St}}) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon)\,\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k+l-1) \prod_{j=2}^{n} \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-j)\, L(s,\, f,\, \underline{\mathrm{St}})$$

とおく．ただし，

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s),$$

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & (\ n\ \text{が偶数}) \\ 1 & (\ n\ \text{が奇数}) \end{cases}$$

とする．このとき，Takayanagi[7] により $k,\, l \in 2\mathbb{Z},\, k > 0,\, l \geq 0$ のとき $\Lambda(s,\, f,\, \underline{\mathrm{St}})$ は全 s 平面に有理型に解析接続され，函数等式

$$\Lambda(s,\, f,\, \underline{\mathrm{St}}) = \Lambda(1-s,\, f,\, \underline{\mathrm{St}})$$

をみたすことがわかつてゐる．この結果は scalar 値のときは Böcherer によつて示された．この結果により，$L(s,\, f,\, \underline{\mathrm{St}})$ の（Deligne の意味での）critical points の右半分は

$$\{m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq k-n, \quad m \equiv n \,(\mathrm{mod}\, 2)\}$$

で与へられる.

2. 結果

$k, l \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \geq 2n+2$ とする. $f \in S^n_{k,l}$ を eigenform で，さらに f の Fourier 係数は $\mathbb{Q}(f)$ に属すとする.

今， $m \in \mathbb{Z}$ を $L(s, f, \underline{\mathrm{St}})$ の critical points の右半分の元とする. ただし， $m = 1$ のときは $n \equiv 3 \pmod 4$ を仮定する. このとき,

$$A(f) := \frac{L(m, f, \underline{\mathrm{St}})}{\pi^{nk+l+m(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}}(f, f)}$$

とおくと,

$$A(f)^\sigma = A(f^\sigma) \quad (\ \forall \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})\ )$$

が成り立つ. ここで f^σ は f の Fourier 係数に σ を作用させたものである. このことより，とくに $A(f) \in \mathbb{Q}(f)$ である.

注意

i) この結果は， scalar 値の場合， Sturm[6], Harris[3], Böcherer[1], Mizumoto[5] によつて研究されてゐる.

ii) Takei[8] によつて， $k, l \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}, k \geq 2n+2$ のとき， $S^n_{k,l}$ の直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} S^n_{k,l}}$ で，各 f_j は eigenform かつ f_j の Fourier 係数は $\mathbb{Q}(f_j)$ に属すものが存在する.

3. 証明の概略

<u>第 1 段</u>

まづ,

(*)

$$(f,\, F^{(n)}_{k,\nu,l}(-\overline{Z},\, *,\, s)) = (\Gamma\ \text{因子})\,\zeta(2s+k-\nu)^{-1}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \zeta(4s+2k-2\nu-2j)^{-1} L(2s+k-\nu-n,\, f,\, \underline{\mathrm{St}})\,(\iota^{-1}(f))(Z)$$

の形の式を証明する必要がある.

$F^{(n)}_{k,\nu,l}$ の定義

$\nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k-\nu>0$ に対して,

$$F^{(n)}_{k,\nu,l}(Z,\, W,\, s) := (\mathcal{D}_{k,\nu,l,s} G^{(2n)}_{k-\nu})\left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix},\, s\right)$$

と定義する. ここで, $G^{(n)}_k$ は Eisenstein 級数

$$G^{(n)}_k(Z,\, s) := \sum_{\{C,\, D\}} \det(CZ+D)^{-k}\, |\det(CZ+D)|^{-2s}$$

である. 和 $\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix}$ は $\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Gamma^n\right\} \Big\backslash \Gamma^n$ の完全代表系を亙るものとする. また, $\mathcal{D}_{k,\nu,l,s}$ は $C^\infty(\mathfrak{H}_{2n},\, \mathbb{C})$ の元を $C^\infty(\mathfrak{H}_n \times \mathfrak{H}_n,\, \mathrm{sym}^{2l}(V_1 \oplus V_2))$ に写す作用素で,

$$\mathcal{D}_{k,\nu,l,s} := L^{k,l} \det(\mathrm{Im}(\mathfrak{Z}))^s\, \tilde{\mathcal{D}}^{\nu}_{k-\nu+s}$$

と定義される. ここで, $V_1 := \mathbb{C}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}x_n$, $\quad V_2 := \mathbb{C}x_{n+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}x_{2n}$ である. また (*) 式の ι は V_1 から V_2 への同型写像で $\iota(x_j) := x_{n+j}$ を線型に拡張したものである.

$\mathcal{D}_{k,\nu,l,s}$ の定義における $L^{k,l}$ は Böcherer-Satoh-Yamazaki[2] で定義された微分作用素で, 次の形をもつ.

$$L^{k,l} := \frac{1}{(k)_l} d^* \sum_{0 \leq 2\mu \leq l} \frac{1}{\mu!\,(l-2\mu)!\,(2-k-l)_\mu} (D_\uparrow D_\downarrow)^\mu (D - D_\uparrow - D_\downarrow)^{l-2\mu}$$

$: C^\infty(\mathfrak{H}_{2n},\, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{H}_n \times \mathfrak{H}_n,\, \mathrm{sym}^{2l}(V_1 \oplus V_2))$.

ここで,

$$(d^* f)\begin{pmatrix} Z & U \\ {}^tU & W \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad D := \frac{1}{2\pi i}\sum_{1\le\mu\le\nu\le 2n}\frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}}x_\mu x_\nu,$$

$$D_\uparrow := \frac{1}{2\pi i}\sum_{1\le\mu\le\nu\le n}\frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}}x_\mu x_\nu, \quad D_\downarrow := \frac{1}{2\pi i}\sum_{n+1\le\mu\le\nu\le 2n}\frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}}x_\mu x_\nu.$$

次に, $\tilde{\mathcal{D}}^\nu_{k-\nu+s}$ は Böcherer[1] で定義された微分作用素で, $f\begin{pmatrix} Z & U \\ {}^tU & W \end{pmatrix} \in M^{2n}_{k,0}$ に対して $(\tilde{\mathcal{D}}^\nu_k f)\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \in M^n_{k+\nu,0} \otimes M^n_{k+\nu,0}$ となるものである. これは, $\nu = 1$ のとき次の形になる.

$$(\tilde{\mathcal{D}}^1_k f)\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \left\{\det\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n} f\begin{pmatrix} Z & U \\ {}^tU & W \end{pmatrix}\right\}\Bigg|_{U=0}.$$

さて, (*) の式の証明であるが, $\nu = 0$ の場合, (*) は Takayanagi[7] で示されてゐる. ゆゑに $\nu \neq 0$ を仮定する. このとき, $F^{(n)}_{k,\nu,l}$ は

$$\begin{aligned} &F^{(n)}_{k,\nu,l}(Z,\, W,\, s) \\ &= \frac{\varrho^{(n)}_{k,\nu}(s)}{(2\pi i)^l}\sum_{\mu=0}^{\frac{l}{2}}\left(-\frac{1}{4}\right)^\mu a(l,\, \mu,\, k,\, s)\sum_{\substack{T=\mathrm{diag}\{t_1,\cdots,t_n\} \\ t_j\in\mathbb{Z}_{>0},\ t_1|\cdots|t_n}}\mathcal{P}_\mu(Z,\, W,\, T,\, s)\det(T)^\nu \end{aligned}$$

と表される. $\varrho^{(n)}_{k,\nu}(s)$ は $k,\, \nu,\, s$ の有理式, $a(l,\, \mu,\, k,\, s)$ は $l,\, \mu,\, k,\, s$ の有理式, $\mathcal{P}_\mu$ は Poincaré series である.

上の式で f との内積をとれば, (*) を得る.

<u>第 2 段</u>

m を critical point とする．今， $s=0, \nu=k-n-m$ とおくと (*) 式は

$$(f, g(-\overline{Z}, *)) = c(f)\,(\iota^{-1}(f))(Z)$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} g(Z, W) &:= \pi^{-n(k-n-m)} F^{(n)}_{k,k-n-m,l}(Z, W, 0) \\ &= (\pi^{-n(k-n-m)} L^{k,l} \tilde{\mathcal{D}}^{k-n-m}_{m+n} E^{(2n)}_{m+n}) \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$c(f) = \frac{L(m, f, \underline{\mathrm{St}})}{\pi^{nk+l+m(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}}} \times (\text{有理数}),$$

また Eisenstein 級数 $E^{(n)}_k$ は

$$E^{(n)}_k(Z, s) := \det(\mathrm{Im}(Z))^s G^{(n)}_k(Z, s)$$

が全 s 平面に有理型に解析接続され， $s=0$ で正則であることにより，$E^{(n)}_k(Z) := E^{(n)}_k(Z, 0)$ と定義される．

以上のことから，次を示せば十分である．

$$(**) \qquad \left(\frac{c(f)}{(f, f)}\right)^{\sigma} = \frac{c(f^{\sigma})}{(f^{\sigma}, f^{\sigma})} \quad (\ \forall \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})\ ).$$

(**) の証明

Weissauer[9], Haruki[4] によつて次の結果が得られてゐる．

i) $E^{(n)}_k(Z)$ は次の 2 つの場合，すなはち $k = \frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2} \equiv 2 \pmod 4$ の場合を除いて正則．

ii) 正則な場合， $E^{(n)}_k(Z)$ の Fourier 係数は有理数．

ゆゑに， m が $1 \le m \le k-n$， $m \equiv n \pmod 2$ であるとき，ただし $m=1$ のときは $n \equiv 3 \pmod 4$ を仮定すると， $E^{(2n)}_{m+n}$ の Fourier 係数は

有理数であることがわかる．よつて $g(Z, W)$ の Fourier 係数も有理数になる．

今，$g(Z, W)$ の Fourier 展開を

$$g(Z, W) = \sum_{R \geq 0} \sum_{\xi \in X_n} g_{R,\xi}(W)\, \xi\, e^{2\pi i\, \mathrm{trace}(RZ)}$$

と表す．ここで "$R \geq 0$" は semi-integral, semi-positive な行列を意味し，また，$X_n := \{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \mid \alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = l\}$ である．しからば

$$(f,\, g_{R,\xi}) = c(f)\, a_{R,\xi}(\iota^{-1}(f)) \quad (\ \forall \xi \in X_n\ ),$$

となる．ただし，$a_{R,\xi}(\iota^{-1}(f))$ は $\iota^{-1}(f)$ の Fourier 係数 $a_R(\iota^{-1}(f))$ の ξ 成分を表す．今，$a_{R,\xi}(\iota^{-1}(f)) \neq 0$ となるやうな R と ξ を 1 つ固定する．

次に，$h(\lambda)$ を $g_{R,\xi}$ の $S_{k,l}^n(\lambda)$ への射影とする．一方，Takei [8] によつて，$k \geq 2n+2$ のとき，$S_{k,l}^n(\lambda)$ の直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} S_{k,l}^n(\lambda)}$ で，$f_1 = f$ かつ，各 f_j の Fourier 係数は $\mathbb{Q}(\lambda)$ に属すものが存在する．

ここで，$h(\lambda) = \sum_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} S_{k,l}^n(\lambda)} \beta_j f_j$ とおくと，

$$c(f)\, a_{R,\xi}(\iota^{-1}(f)) = \beta_1(f,\, f)$$

かつ

$$c(f^\sigma)\, a_{R,\xi}(\iota^{-1}(f^\sigma)) = \beta_1^\sigma(f^\sigma,\, f^\sigma)$$

である．ゆゑに，

$$\left(\frac{c(f)}{(f,\, f)}\right)^\sigma = \frac{\beta_1^\sigma}{a_{R,\xi}(\iota^{-1}(f^\sigma))} = \frac{c(f^\sigma)}{(f^\sigma,\, f^\sigma)}$$

が示された．(証明終)

参考文献

[1] S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II, Math. Z., **189** (1985), 81–110.

[2] S. Böcherer, T. Satoh, and T. Yamazaki, On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **42** (1992), 1–22.

[3] M. Harris, Special values of zeta functions attached to Siegel modular forms, Ann. Sci. École Norm. Sup., **14** (1981), 77–120.

[4] A. Haruki, Explicit formulae of Siegel Eisenstein series, Manuscripta Math., **92** (1997), 107–134.

[5] S. Mizumoto, Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms, Math. Ann., **289** (1991), 589–612.

[6] J. Sturm, The critical values of zeta functions associated to the symplectic group, Duke Math. J., **48** (1981), 327–350.

[7] H. Takayanagi, Vector valued Siegel modular forms and their L-functions; Application of a differential operator, Japan J. Math., **19** (1994), 251–297.

[8] Y. Takei, On algebraicity of vector valued Siegel modular forms, Kodai Math. J., **15** (1992), 445–457.

[9] R. Weissauer, Stabile Modulformen und Eisensteinreihen, Lecture Notes in Math., **1219**, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1986.