数理解析研究所講究録
1056 巻 1998 年 75-95

対称構造と偏微分方程式の解の特異性の伝播

京都大学大学院理学研究科 大鍛治 隆司 (Takashi ŌKAJI)

1 序

Schrödinger 方程式の解の特異性の伝播については、従来は、時間と空間あわせた時空間での特異性の伝播が知られている ([1],[18],[23])。しかし、これらの結果は同時刻における空間方向の速度無限大の伝播現象に関するものであり、応用上あまり有効でない。また、Schrödinger 方程式はつぎの特筆すべき性質 (解の平滑化効果) を持つことが知られている。すなわち、自由粒子に対する Schrödinger 方程式

$$
\begin{aligned}
&\{\frac{1}{i}\partial_t - \frac{1}{2}\triangle\}u(t,x) = 0, \quad \text{in } \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \\
&u(0,x) = u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

において、もし初期関数 u_0 が無限遠で急減少するならば、その解 $u(t)$ は $t\neq 0$ のとき滑らかになる ([14])。

この論文では Schrödinger 方程式の解の特異性の伝播および解の regularizing effects の研究に有効な新しい方法を述べたい。われわれの方法では、従来異なる現象であると思われていた、これら 2 つの性質、すなわち、"解の特異性の伝播" と "解の平滑化効果" とは、実は同じ原理から派生した異なる表現にすぎないことがわかる。

さらに、非有界なポテンシャル項を持つ Schrödinger 方程式の解の平滑化効果については基本解の構成の立場からの研究が藤原、谷島両氏を中心として研究されており、ポテンシャルの無限遠での挙動が決定的であることが分かっている ([8], [29], [27], [16], [17], [28], [3])。しかし、この現象の超局所的構造についてはあまり分かっていない。谷島氏は氏の論文の中で、この現象を説明するために有効なある "予想" を述べている。それは、Schrödinger 方程式の解の特異性は対応する Hamilton 流のエネルギーが無限大になったときの極限集合に沿って、伝播するというものである。

この論文では、われわれはこの予想に対する一つの部分的回答を与えたい。その方法は簡単に言えば、従来の波束 (あるいは FBI 変換といっても良いが) を Wigner 変換を用いて対称化し、その伝播を調べることである。こうする事により位置と運動量を同等に扱う事が可能となる。また、われわれの新しい方法はシュレーディンガー方程式のみならず、他の偏微分方程式の解の構造の解明にも有効であると信ずる。

次節§2では、この論文で重要な役割を果たす2つの基本的概念、すなわち、波束とWigner変換を定義する。§3と§4では、我々の主結果をのべる。前者ではC^∞クラスについて、後者では解析的クラスについて述べる。§5では、我々の新しい方法の基本的アイデアについて解説する。§6–§7では、主定理3.2から導かれる、解の平滑化効果(定理3.1)と解の特異性の伝播(定理3.7)を証明する。最後に§8では、ポテンシャルがsubquardaticのときに、解の解析的平滑化効果(定理4.2)の証明を与える。紙数の関係でその他の定理の証明は省略する。

2 波束とWigner変換

$\sigma \in \mathbf{R}$に対し, Sobolev空間を$H^\sigma = H^\sigma(\mathbf{R}^n)$と記す。また、このソボレフ空間に対応した波面集合を$WF_\sigma(u)$で表すことにする。

次に、波束の定義をしよう。まずFourier-Bros-Iagonitzer (FBI)変換は次で与えられる([25])。

$$Tu(z,\lambda) = \int e^{-\frac{\lambda}{2}(z-y)^2} u(y)dy, \quad (z,\lambda) \in \mathbf{C}^n \times [0,\infty),\ u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \tag{2.1}$$

ここで、$(z-y)^2 = \sum_{j=1}^n (z_j - y_j)^2$. [2]で導入された波束(wave packet)は次のように表される。

$$P_\lambda u(x,\xi) = Tu(x - i\xi, \lambda) e^{-\lambda|\xi|^2/2} = \lambda^{n/4} \int e^{i\lambda(x-y)\xi} e^{-\lambda(x-y)^2/2} u(y)dy. \tag{2.2}$$

この波束を用いると波面集合は次のように特徴づけられる([6])。

Lemma 2.1 $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$、$(q,p) \in T^*(\mathbf{R}^n) \backslash \{0\}$に対し、$\rho = (q,p) \notin WF(u)$となるのは、ある$\rho$の近傍$\Theta$が存在し、任意の自然数$N$に対して、定数$C_N$が存在して、次の不等式

$$\sup_{(x,\xi)\in\Theta} |P_\lambda u(x,\xi)| \le C_N \lambda^{-N},\ \forall \lambda > 1$$

が成り立つときその時に限る。

Schrödinger方程式に対してはx変数とξ変数は同列に扱うのが自然である。しかしながら、見てわかるように、従来のCordobaとFeffermanの達の波束(2.2)はxとξが対称でない。これを解消するために、我々は"対称化された波束"を考えたい。そのために、$Wigner$変換を導入する。まず、$u, v \in L^2(\mathbf{R}^n)$に対しそのWigner変換を

$$W(u,v)(x,\eta) = \int e^{-iy\eta} u(x + \frac{y}{2}) \overline{v(x - \frac{y}{2})} dy/(2\pi)^n \tag{2.3}$$

で定義する。特に、$W(u,u)$を$W(u)$と書くことにする。

この時、次の等式が我々の理論で基本的な役割を果たす。

Lemma 2.2

(2.4) $$\iint a(q,p)|P_\lambda(f)(q,p)|^2 dpdq$$
$$= (2\pi)^{-n/2}\lambda^{2n}\iint a(q,p)W(f)(x,\lambda\xi)\exp\{-\lambda(x-q)^2-\lambda(\xi-p)^2\}dxd\xi dpdq.$$

for $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *and* $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$.

証明はMoyalの等式(c.f. [6])より簡単な計算でわかる。または、Fourierの反転公式を用いて直接計算しても容易に確かめられる。証明終。

我々は、次の関数を対称化された波束と呼び、その伝播を調べることにする。

$$\int W(f)(x,\lambda\xi)\exp\{-\lambda(x-q)^2-\lambda(\xi-p)^2\}dxd\xi$$

Remark 2.1 等式*(2.4)*より対称化された波束は(q,p)の関数として非負である事に注意したい。この事実は以下の議論において重要である。

3 主結果（その１）-C^∞ category-

Schrödinger方程式に対する初期値問題

(3.1) $$\begin{cases} \{\frac{1}{i}\partial_t - \frac{1}{2}\triangle_x + V(x)\}u = 0, \ (t,x) \in \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

を考える。簡単のため、

(3.2) $$L = \frac{1}{i}\partial_t - \frac{1}{2}\triangle_x + V(x),$$

とおくことにする。ポテンシャルVは$\mathbf{R}^n$上滑らかな実数値関数で、次の条件(A_κ)を満たすと仮定する。

任意のαに対してある定数B_αが存在して

(A_κ) $$|\partial_x^\alpha V(x)| \le B_\alpha \langle x\rangle^{-|\alpha|+\kappa}, \text{ for } x \in \mathbf{R}^n.$$

が成り立つ。ここで、$\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$.

$x = X(t,x,\xi)$, $\xi = \Xi(t,x,\xi)$ を次の常微分方程式の解とする。

(3.3) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \xi, \\ \dfrac{d\xi}{ds} = -\partial_x V(x): \quad x(0) = x, \ \xi(0) = \xi. \end{cases}$$

このとき、$\phi^t(x,\xi) = (X(t,x,\xi), \Xi(t,x,\xi))$ と記し、これを $h(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$ に対する Hamilton 流と呼ぶ。特に、$V \equiv 0$ のとき、$\phi_0^t(x,\xi)$ と書く。すぐに分かるように、$\phi_0^t(x,\xi) = (x + t\xi, \xi)$ である。

まず最初に、ポテンシャルが subquadratic な場合について結果を述べる。このときは Hamilton 流 $\phi_0^t(x,\xi)$ が本質的な役割を果たす。そのため、$\mathbf{R}^n$ 上の関数の無限遠での性質を記述する 2 つの概念を導入する。$\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$ の点 (x,ξ) に対しある関数 $u(x)$ が半直線

$$\gamma_{x,\xi} = \{x + \lambda\xi;\ \forall\lambda > 0\}$$

に沿って急減少であるとは、x の近傍 ω と ξ の錐近傍 Γ、およびある正の数 R が存在してすべての多重指数 α に対し、

$$|y^\alpha u(y)| \le C_\alpha, \forall y \in (\omega + \Gamma) \backslash B_R(0) \tag{3.4}$$

が成り立つことであると定義する。ここで、C_α はある正の定数である。さらに、関数 $u(x)$ が半直線 $\gamma_{x,\xi}$ に沿って滑らかであるとは、x の近傍 ω と ξ の錐近傍 Γ、およびある正の数 R が存在してすべての多重指数 α に対し、

$$u \in H^\infty\left((\omega + \Gamma) \backslash B_R(0)\right), \tag{3.5}$$

ここで、$B_R(0)$ は球 $\{x \in \mathbf{R}^n;\ |x| \le R\}$ を表す。この時、次の結果が成り立つ。

Theorem 3.1 ある $\kappa < 2$ に対し条件 *(A_κ)* が成り立つとする。$u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$ をシュレーディンガー方程式 *(3.1)* の解とする。もし、$u(0) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ が半直線 $\gamma_{x,-\xi}$ に沿って急減少であるか、あるいは半直線 $\gamma_{x,-\xi}$ に沿って滑らかであるならば、

$$(x,\xi) \notin WF(u(t)) \textit{ for any } t > 0$$

が成り立つ。

Remark 3.1 もしある関数 u が半直線 $\gamma_{x,-\xi}$ に沿って急減少 *(resp. 滑らか)* ならば、その関数は、任意の $y \in \mathbf{R}^n$ に対して半直線 $\gamma_{y,-\xi}$ に沿って急減少 *(resp. 滑らか)* となることに注意したい。

この定理は実は次の定理の系として得られる。

Theorem 3.2 ある $\kappa < 2$ に対し条件 *(A_κ)* が成り立つとする。$u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$ をシュレーディンガー方程式 *(3.1)* の解とする。もし、(x,ξ) のある近傍 Θ が存在して、任意の自然数 N に対し、ある定数 M_N が存在して

$$\sup_{(q,p)\in\Theta} \left| \int W(u_0)(\phi_0^{-t}(x,\lambda\hat{\xi})) \exp[-\lambda(|x-q|^2 + |\hat{\xi} - p|^2)] dx d\hat{\xi} \right| \le M_N \lambda^{-N} \textit{ for all } \lambda > 1 \tag{3.6}$$

が成り立つならば、

$$(x,\xi) \notin WF(u(t)) \ \textit{for any}\ t > 0$$

が成り立つ。

Remark 3.2 ここで、ϕ_0^{-t}をϕ^{-t}に置き換えても同じ結論が成り立つ。

次に、ポテンシャルがquadraticの場合について述べよう。

Theorem 3.3 $V(x)$ は次のような *2* つの関数の和にかけているとする。

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x),$$

ここで、V_1はある$\kappa < 2$ に対し *(A_κ)* を満たし、V_2は

$$V_2(x) = \frac{1}{2}(Ax, x).$$

の形であると仮定する。上で、A はある非退化実対称定数行列である。

$u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$ を *Schrödinger* 方程式 *(3.1)* の解とする。もし、(x,ξ) のある近傍Θが存在して、任意の自然数Nに対し、ある定数M_Nが存在して

$$\sup_{(q,p)\in\Theta} \left| \int W(u_0)(\phi_A^{-t}(x,\lambda\xi)) \exp[-\lambda(|x-q|^2 + |\xi - p|^2)] dx d\xi \right| \tag{3.7}$$
$$\leq M_N \lambda^{-N} \ \textit{for all}\ \lambda > 1$$

が成り立つならば、ある正の数t_1が存在して、

$$(x,\xi) \notin WF(u(t)) \ \textit{for any}\ 0 < t < t_1$$

が成り立つ。ここで、ϕ_A^tは *Hamiltonian*$\frac{1}{2}|\xi|^2 + V_2(x)$ に対する *Hamilton* 流である。

Remark 3.3 もしA が負の固有値を持たないならば、$t_1 = t_0/2$ と取れる。ここで、π/t_0はA の正の固有値の平方根の中で最大のものである。

Remark 3.4 調和振動子型 *($A_2 = I$)* のポテンシャルに対してはV_1が *(A_κ)*, $\kappa < 1$ のとき、先の定理は、すべての$t > 0$ で成り立つことがわかる。

これより、調和振動子型 ($A_2 = I$) のポテンシャルに対しては次の結果が得られる。

Corollary 3.4 *Theorem 3.3*の仮定に加えて、$A = I$かつ$\kappa < 1$を仮定する。*Schrödinger* 方程式 *(3.1)* の解 $u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$ に対して、もし、すべての $N > 0$ に対して、$\langle x\rangle^N u(0,x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ が成り立つならば $u(t)$ は任意の時刻 $0 < t < \pi$で滑らかである。

$t = t_0/2 = \pi/2$ のときについては次の結果が成り立つ。

Theorem 3.5 *Theorem 3.3*の仮定に加えて、$A = I$かつ$\kappa < 1$を仮定する。$u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$ を *Schrödinger* 方程式 *(3.1)* の解とするならば

$$WF(u(\pi/2,\cdot)) = \{(x,\xi);\ (-x,-\xi) \in WF(\hat{u}(0,\cdot))\}.$$

が成り立つ。ここで、$\hat{u}$はxに関する *Fourier* 変換を表す。

また、$t = t_0 = \pi$のときについては次の定理が得られる。

Theorem 3.6 *Theorem 3.5*と同じ仮定のもとに、, $u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$ を *Schrödinger* 方程式 *(3.1)* の解とするならば

$$WF(u(\pi,\cdot)) = \{(x,\xi);\ (-x,-\xi) \in WF(u(0,\cdot))\}.$$

が成り立つ。

Remark 3.5 ポテンシャルが有界あるいは *sublinear* のときにはすでに多くの関連する結果がある *([14],[26], [3],[5] and [28])*。さらに、谷島氏 *([27])* はもしもポテンシャルが *subquadratic* ならば基本解は任意の時刻$t \neq 0$で滑らかであることを示した *(c.f.[16])*。*Theorem 3.2*はその拡張といえる。さらに、同氏は空間次元が *1* 次元のときもしも、ポテンシャルがある *"superquadratic"* 条件を満たすならば、その基本解はどの点においてもC^1ですらないという、注目すべき結果を、与えている。これについては、残念ながら、我々の方法でも、まだ良く分かっていない。

Remark 3.6 *[29]* と *[17]* において、その著者達は調和振動子型ポテンシャルの場合にその基本解の滑らかさについて調べ、*smoothing effect* は短時間でのみ起こり、ある特定の時刻で起こらないことを示している。 *Theorem 3.3*はその拡張である。また、*A. Weinstein [26]* はV_1が *(*A_0*)* を満たすとき、*Theorem 3.6*とほぼ同じ結果を得ている。.

最後の結果として、解の特異性の伝播について述べる。これは解の平滑化現象が大域的性質であるのに比して準局所的性質であるといえる。$\varepsilon > 0$に対し$I_+(\varepsilon) = [0,\varepsilon]$, $I_-(\varepsilon) = [-\varepsilon, 0]$ とおく。

Theorem 3.7 $V(x)$ を滑らかな関数とする *(*複素数値関数でも良い*)*。σを実数、εを任意の小さな正の数とする。$u \in C(I_\pm(\varepsilon);\ \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))$ が

$$Lu \in H^\sigma \ \mathit{for}\ t \in I_-(\varepsilon)(\ \mathit{resp.}\ I_+(\varepsilon)).$$

を充たすとき、もし$t \in I_-(\varepsilon)$ *(resp.* $I_+(\varepsilon)$*)* に対し一様に$(x_0, \xi_0) \notin WF_\sigma u(t)$すなわち、ある$(x_0, \xi_0)$の近傍$\Theta$が存在して任意の自然数$N$と、ある定数$C_N$が存在して、

$$\int_1^\infty \lambda^{3n/2+2\sigma-1} \int_\Theta |P_\lambda u(x,\xi)|^2 dx d\xi d\lambda \leq C_N \lambda^{-N}$$

が$\forall\lambda > 1$, $\forall t \in I_-(\varepsilon)$, *(resp.* $I_+(\varepsilon)$*)* について成り立つならば、$\phi_0^s(x,\xi) \notin WF_\sigma u(0)$がすべての$s < 0$ *(resp.* $s > 0$*)* について成り立つ。

最後に、われわれの条件(3.7)と谷島氏の予想との関係について触れておきたい。正の数rに対し、Hamilton flow $\{\phi^{-t}(\hat{q}, \lambda\hat{p});\ \lambda > 1\}$ の近傍$\Theta_r(\phi^{-t}(\hat{q}, \lambda\hat{p}))$ を次のように定義する。

$$\Theta_r(\phi^{-t}(\hat{q}, \lambda\hat{p})) = \bigcup_{p' \in B_{2r}(\hat{p})} B_r(X(-t, \hat{q}, \lambda p'), \lambda^{-1}\Xi(-t, \hat{q}, \lambda\hat{p}))\}.$$

この時、(q,p)空間の平行移動と等式(2.4)を用いれば、簡単な考察により、次の事が分かる(cf. §6)。もし、ある$r > 0$と正の数λ_0が存在して、任意の$k > 0$とある定数M_kに対し

$$\sup_{(q,p) \in \Theta_r(\phi^{-t}(\hat{x}, \lambda\hat{\xi}))} |P_\lambda(v)(q,p)| \leq M_k \lambda^{-k},\ \forall\lambda > \lambda_0$$

が成り立つならば、条件(3.7)は充たされる。したがって、時間の向きを入れ替え、対偶を考えることにより、Theorem 3.2、Theorem 3.3の結論はおおざっぱに言えば次のように言い換えることができる。Schrödinger方程式(3.1)の解$u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$に対して、$(x,\xi) \in WF(u(0,\cdot))$ならば、この特異性は時刻$t > 0$のときHamilton流$\phi^t(\hat{x}, \lambda\xi)$の高エネルギー近傍に沿って伝播する。これはまさしく谷島氏が彼の予想において主張したかったことではないだろうか。

4 主結果(その2)-Analytic category-

シュレーディンガー方程式の解の平滑化効果はC^∞クラスのみならず解析関数の範囲でも成り立つことが知られている。実際、自由粒子のSchrödinger方程式(1.1)の解$u(t)$に対し、もし初期関数u_0の台がコンパクトならば、解$u(t)$は任意の時刻$t \neq 0$において解析的である([12])。この結果は梶谷氏[15]により2階の項Laplacianを変数係数に一般化した方程式に対し拡張されている。

この節では、簡単のためポテンシャルがsubquadratic条件を充たす場合について、われわれの方法が解析関数の範疇にも有効であることを述べたい。

まず、ポテンシャルVは$\mathbf{R}^n$上滑らかな実数値関数で、次の条件(B_κ)を満たすと仮定する。

任意のαに対してある定数M_0、M_1、B_αが存在して

$$(\mathrm{B}_\kappa) \qquad |\partial_x^\alpha V(x)| \le M_0 M_1^{|\alpha|} \alpha! \langle x \rangle^{\kappa-|\alpha|}, \quad \forall x \in bRn.$$

ここで, $\langle x \rangle = \sqrt{1+|x|^2}$.

超関数$u \in \mathcal{S}'$に対しその analytic wave front set $WF_A(u)$ は次のように特徴づけられる ([25])。余接空間の点$\rho = (y, \eta) \in T^*(\mathbf{R}^n)\backslash\{0\}$ が $WF_A(u)$ に属さないとはあるρの近傍V、正の定数Cならびに正数εが存在して

$$\sup_{(x,\xi)\in V} |P_\lambda u(x,\xi)| \le Ce^{-\varepsilon\lambda}$$

が任意の$\lambda > 1$ について成り立つ。

ここで、$\mathbf{R}^n$上の関数の無限遠での性質を記述する2つの概念を導入する。$\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n\backslash 0)$ の点 (x, ξ) に対しある関数$u(x)$ が半直線

$$\gamma_{x,\xi} = \{x + \lambda\xi;\ \forall\lambda > 0\}$$

に沿って指数関数的に急減少であるとは、x の近傍ωとξの錐近傍Γ、およびある正の数Rとδが存在して

$$(4.1) \qquad |u(y)| \le Ce^{-\delta|y|},\ \forall y \in (\omega + \Gamma)\backslash B_R(0)$$

が成り立つことであると定義する。ここで、Cはある正の定数である。さらに、 関数$u(x)$ が半直線$\gamma_{x,\xi}$に沿って解析的であるとは、x の近傍ωとξの錐近傍Γ、およびある正の数R、C_0, C_1が存在してすべての多重指数αに対し、

$$(4.2) \qquad \left\|\partial_y^\alpha u(y)\right\|_{L^2((\omega+\Gamma)\backslash B_R(0))} \le C^{|\alpha|+1}\alpha!$$

が成り立つ。

ポテンシャルが subquadratic のとき、次の結果が成り立つ。

Theorem 4.1 ある$\kappa < 2$に対し条件*(B_κ)*が成り立つとする。$u(t) \in C([0,\infty);\ L^2(\mathbf{R}^n))$をシュレーディンガー方程式*(3.1)*の解とする。もし、$u(0) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ が半直線$\gamma_{x,-\xi}$に沿って指数関数的に急減少であるか、あるいは半直線$\gamma_{x,-\xi}$に沿って解析的であるならば、

$$(x,\xi) \notin WF_A(u(t)) \textit{ for any } t > 0$$

が成り立つ。

Remark 4.1 特に、初期関数u_0がすべての方向に指数関数的に減少しているかあるいは無限遠点の近傍で解析的ならば、解$u(t)$は任意の時刻$t \neq 0$で解析的となる。

この定理は実は次の定理の系として得られる。

Theorem 4.2 (B_κ)があるκ < 2に対して成り立つと仮定し、$u(t) \in C^0(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^n))$を*Schrödinger*方程式*(3.1)*の解とする。この時、$\rho = (x, \xi)$に対し、あるρの近傍Θと、ある定数M、δが存在して

$$\sup_{(q,p)\in\Theta}\left|\int W(u_0)(\phi^{-t}(x,\lambda\hat{\xi}))\exp[-\lambda(|x-q|^2+|\hat{\xi}-p|^2)]dxd\hat{\xi}\right| \leq M\exp(-\delta\lambda) \ \ as\ \lambda\to\infty. \tag{4.3}$$

が成り立つならば、任意の時刻$t \neq 0$について、$(x, \xi) \notin WF_A(u(t))$が成り立つ。

5 定理3.2、3.3の証明の基本的アイデア

この節では、われわれの新しい証明方法の基本的な考え方を説明する。

主結果の証明の基本的考え方はみな同じであるので、この節では説明を簡単にするため、$V(x) = |x|^2/2$を仮定し、Theorem 3.3の証明を解説する。(調和振動子に限れば、Mehlerの公式により解が具体的に書けてしまっているが、もちろんそれはここでは用いない。)

証明すべきは次の等式である。

Proposition 5.1 $u(t) \in C([0,T];\ L^2(\mathbf{R}^n))$を方程式*(3.1)*の解とする。

$$\begin{aligned}\int W(u)(t,x,\lambda\hat{\xi})\exp\left\{-\lambda|(x-q,\hat{\xi}-p)|^2\right\}dxd\hat{\xi} &= \int W(u)(0,x,\lambda\hat{\xi})\exp\left\{-\lambda|\tilde{\phi}^t(x,\lambda\hat{\xi})-(q,p)|^2\right\}dxd\hat{\xi} \\ &= \int W(u)(0,\phi^{-t}(x,\lambda\hat{\xi}))\exp\left\{-\lambda|(x-q,\hat{\xi}-p)|^2\right\}dxd\hat{\xi}\end{aligned} \tag{5.1}$$

が任意の$\lambda > 1$について成り立つ。

これを証明するための第一歩はつぎの補題である。

Lemma 5.2 $v \in C^1(\mathbf{R};\ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$は

$$(\partial_t - i\frac{1}{2}\triangle + iV(x))v = 0.$$

を充たすと仮定し、

$$f(t,x,\xi)=W(v(t))(x,\xi) \tag{5.2}$$

とおく。この時、

$$\{\partial_t+\xi\cdot\partial_x-\partial_x V(x)\cdot\partial_\xi\}f(t,x,\xi)=0 \tag{5.3}$$

が成り立つ。

Proof: 簡単な計算により

$$\begin{aligned}
\partial_t f(t,x,\xi) &= \int e^{-iy\xi}\left\{v_t(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)+v(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}_t(x-\frac{1}{2}y)\right\}dy\\
&= \int e^{-iy\xi}\left\{i(\frac{1}{2}\triangle-V(x+\frac{1}{2}))v(x+\frac{1}{2}y)\right\}\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)dy\\
&+\int e^{-iy\xi}v(x+\frac{1}{2}y)\left\{\overline{i(\frac{1}{2}\triangle-V(x-\frac{1}{2}y))v(x-\frac{1}{2}y)}\right\}dy\\
&= \int e^{-iy\xi}\left\{2i\triangle_y v(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)+v(x+\frac{1}{2}y)\overline{2i\triangle_y v}(x-\frac{1}{2}y)\right\}dy
\end{aligned}$$

yについて部分積分を行えば、

(5.4)

$$\begin{aligned}
&\partial_t f(t,x,\xi)\\
&= \int e^{-iy\xi}\left\{-2\xi\cdot\nabla_y v(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)+v(x+\frac{1}{2}y)\overline{2\xi\nabla_y v}(x-\frac{1}{2}y)\right.\\
&\qquad \left.-i(V(x+\frac{1}{2}y)-V(x-\frac{1}{2}y))v(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)\right\}dy\\
&= \int e^{-iy\xi}\left\{-\xi\cdot\nabla_x v(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)-v(x+\frac{1}{2}y)\overline{\xi\nabla_x v}(x-\frac{1}{2}y)\right.\\
&\qquad \left.-i(V(x+\frac{1}{2}y)-V(x-\frac{1}{2}y))v(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)\right\}dy
\end{aligned}$$

$$V(x+\frac{1}{2}y)-V(x-\frac{1}{2}y)=\nabla V(x)\cdot y$$

と

$$ye^{-iy\xi}=i\nabla_\xi e^{-iy\xi}$$

に注意すれば、結論の等式を得る。証明終。

Proposition 5.1の証明： まず、$-\frac{1}{2}\triangle+V(x)$ は $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上、本質的自己共役作用素であることより、命題の u は $v\in C^1(\mathbf{R};\ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$ の列で近似できるから、後者について証明すれば十分である。すると、先の補題より、

$$\partial_t f(t,\phi^t(x,\xi))=0$$

であるから、積分した後Gauss型関数を乗ずれば、

(5.5)
$$\int W(u)(t,\phi^t(x,\lambda\hat{\xi}))\exp\left\{-\lambda|(x-q,\hat{\xi}-p)|^2\right\}dxd\hat{\xi} = \int W(u)(0,x,\lambda\hat{\xi})\exp\left\{-\lambda|(x-q,\hat{\xi}-p)|^2\right\}dxd\hat{\xi}$$

を得る。$\phi^t(x,\lambda\hat{\xi})$ の逆関数が$\phi^{-t}(x,\lambda\hat{\xi})$ であることと写像 $(x,\xi)\mapsto\phi^t(x,\lambda\hat{\xi})$ が体積を保存することから、結論が従う。証明終。

一般の $V(x)$ に対しては証明は少し複雑となるが、先の命題の等式は不等式として、それぞれの場合に一般化される。たとえば、定理3.2の場合には次の命題が成り立つ。

Proposition 5.3 *Theorem 3.2*の仮定が成り立っているとする。$\delta_0 = 2-\kappa > 0$ とおく。このとき、$Lu = g \in C([0,T];\ L^2(\mathbf{R}^n))$ を充たす $u(t)\in C([0,T];\ L^2(\mathbf{R}^n))$ は次の不等式を充たす。$(\hat{q},\hat{p})\in\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ とする。この時、任意の自然数Nと任意の小さな正数ε, rに対し、正の定数C、Mが存在して

(5.6)
$$\begin{aligned}&\sup_{(q,p)\in B_r(\hat{q},\hat{p})}\int W(u)(t,x,\lambda\hat{\xi})\exp\left\{-\lambda|(x,\hat{\xi})-(q,p)|^2\right\}dxd\hat{\xi}dpdq\\ &\le C\sup_{(q,p)\in B_{r+\varepsilon}(\hat{q},\hat{p})}\int W(u)(0,x,\lambda\hat{\xi})\exp\left\{-\lambda|\tilde{\phi}_0^t(x,\lambda\hat{\xi})-(q,p)|^2\right\}dxd\hat{\xi}\\ &\quad + C\sup_{(q,p)\in B_{r+\varepsilon}(\hat{q},\hat{p})}\int_0^t\int W(g)(s,x,\lambda\hat{\xi})\exp\left\{-\lambda|\tilde{\phi}^{t-s}(x,\lambda\hat{\xi}),(q,p)|^2\right\}dsdxd\hat{\xi}\\ &\quad + M\lambda^{-N\delta_0}\|u(0,\cdot)\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

for any $\lambda > 1$ *and* $0 < t < T$.

この命題の証明はかなり長いので、紙数の関係で省略するが、次の関数

$$\int W(u)(t,x,\lambda\hat{\xi})\exp\left\{-\lambda|(x,\hat{\xi})-(q,p)|^2\right\}dxd\hat{\xi}$$

が非負値関数であることが重要な役割を果たすことを注意するに留める。以後の節でのべるポテンシャルが解析的な場合の証明も参考にされたい。

調和振動子型ポテンシャルの場合には時刻 $t\in(0,\pi)\backslash\{\pi/2\}$ と $t=\pi/2$ の付近とに応じて、多様体の座標関数の取り替えに相当するある操作を必要とする。詳しくは [20] を参照されたい。

6 Theorem 3.1の証明

$\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を非負関数で $x \in B_{1/2}(0)$ 上で値 1 をとり、$B_1(0)$ の外で値 0 をとるものとする。$(\hat{q},\hat{p}) \in \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ と正数 r にたいし、

$$\chi_{r,\hat{q},\hat{p}}(q,p) = \chi(\frac{q-\hat{q}}{r}, \frac{p-\hat{p}}{r})$$

と定義する。この時、命題5.6によれば、定理の仮定のもとに、不等式 (3.6) が成り立つことを確かめれば良い。記号を変えて、定理の (x,ξ) を (q,p) と記す事にする。すなわち、ある正の数 r が存在して、任意の自然数 N に対し、さらに、ある定数 M_N が存在して

(6.1)

$$\int \chi_{r,\hat{q},\hat{p}}(q,p) W(u_0)(\phi_0^{-t}(x,\lambda\hat{\xi})) \exp[-\lambda(|x-q|^2 + |\hat{\xi}-p|^2)] dx d\hat{\xi} dp dq \\ \leq M_N \lambda^{-N} \text{ for all } \lambda > 1$$

が成り立つ事を示す。

$$\phi^t(x,\xi) = (X(t,x,\xi), \Xi(t,x,\xi)),\ \phi^t_\infty(x,\xi) = (x+t\xi,\xi), \tag{6.2}$$

$$\phi^t_{-1}(x,\xi) = \phi^t(x,\xi) - \phi^t_\infty(x,\xi) = (\mu(t,x,\xi), \nu(t,x,\xi)) \tag{6.3}$$

とおくと、(q,p) 空間の平行移動により、

$$\int \chi_{2r,\hat{q},\hat{p}}(q,p) W(u)(0,x,\lambda\hat{\xi}) \exp\left\{-\lambda|\tilde{\phi}^t(x,\lambda\hat{\xi}) - (q,p)|^2\right\} dx d\hat{\xi} dp dq \\ = \int \chi_{2r,\hat{q},\hat{p}} \left(q + t\lambda\hat{\eta} + \mu(t,y,\lambda\hat{\eta}), p + \lambda^{-1}\nu(t,y,\lambda\hat{\eta})\right) \exp\left\{-\lambda\left((y-q)^2 + (\hat{\eta}-p)^2\right)\right\} \\ \times W(u)(0,y,\lambda\hat{\eta}) dy d\hat{\eta} dp dq$$

となるから、次の積分

$$\sup_{\Sigma} \int e^{-i\lambda py} \exp\left[-\lambda y^2/2\right] u_0(y+q) dy \tag{6.4}$$

がλに関して急減少であることを示せば良い。. ここで、Σは次で与えられる

$$\Sigma = \{(q,p); |q + t\lambda\hat{\eta} + \mu(t,y,\lambda\hat{\eta}) - \hat{q}| \leq r, \\ |p + \lambda^{-1}\nu(t,y,\lambda\hat{\eta}) - \hat{p}| \leq r,\ (y,\hat{\eta}) \in B_{r+\varepsilon}(\hat{q},\hat{p})\}. \tag{6.5}$$

である。u_0が半直線$\gamma_{x,-t\hat{\xi}}$に沿って急減少であるときは不等式 (6.4) は直ちに従う。

一方u_0が半直線$\gamma_{x,-t\xi}$に沿って滑らかであるときは等式

$$\left((1+\lambda|p|^2)^{-1}(1-\triangle_y)\right)^j e^{-i\sqrt{\lambda}py} = e^{-i\sqrt{\lambda}py}$$

を用いて、部分積分を行えば、$|y|^2 \le 1$ でかつ $(q,p) \in \Sigma$のとき、

$$\left|\left\{(1+\lambda|p|^2)^{-1}(1-\triangle_y)\right\}^j \left\{\exp\left[-y^2/2\right] u_0\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}+q\right)\right\}\right|$$
$$\le C\lambda^{-j}\exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$$

が成り立つ。証明終。

7 Theorem 3.7の証明

Theorem 3.7の証明: $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を非負関数で$x \in B_1(0)$上で値1をとり、$B_2(0)$の外で値0をとるものとする。この時、正数Rと関数$u \in C(I;\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))$ に対し、$u_R(t,x)$を$\chi(x/R)u(t,x)$ で定義すると、ある自然数kが存在して$u_R(t,x)$ は$C(I;\ H^{-k}(\mathbf{R}^n))$に属する。さらに、

$$\frac{1}{i}\partial_t u_R(t,x) - \frac{1}{2}\triangle u_R(x,t) + V_R(x)u_R(x,t) = g_R(t,x),$$

が成り立つ。ここで、$V_R(x) = \chi(x/2R)V(x)$、$g_R(t,x) \in H^{-k-2}(\mathbf{R}^n)$ である。V_Rは条件 (A_0) を充たすことに注意する。この時、容易に分かるように、$v_j(t,x) = \chi(D_x/j)u_R(t,x)$ は$C^1([-\varepsilon,0];\ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$ に属し

$$v_j(t) \to u_R(t) \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \text{ as } j \to \infty$$

が成り立つ。われわれはHamilton流の準局所的部分 $\{\phi_0^t(x,\xi);\ |t| \le N\lambda^{-1}\}$ の近傍に注目する。ここで、$N>0$ は$|N\hat{\xi}| \le R-1$を充たす正数である。$t_{\lambda,N} = N\lambda^{-1}$とおくと、$g_R(t,x) = g(t,x)$ if $x \in B_R(0)$ なので、任意の $(\hat{q},\hat{p}) \in B_{R-1}(0)$ と $0 \le t \le t_{\lambda,N}$ならびに十分小さな$0<r<1/2$ に対し、

$$\int \chi_{r,\hat{q},\hat{p}}(q,p)\exp\{-\lambda(x-q)^2 - \lambda(\frac{\xi}{\lambda}-p)^2\}W(g)(t,x,\xi)\lambda^{2\kappa+\frac{3}{2}-1}dxd\xi dpdqd\lambda < \infty.$$

が成り立つ事が分かる。そこで、不等式(5.6) において、$v=v_j$, 区間 $[0,t]$ の代わりに区間$[-t_{\lambda,N},0]$ を適用する。こうして得られた不等式で極限操作$j\to\infty$を行えば、もし、$(\hat{q},\lambda\hat{p}) \notin WF_s u(-t_{\lambda,N},\cdot)$ ならば、$\phi_0^{t_{\lambda,N}}(\hat{q},\lambda\hat{p}) = (\hat{q}+N\hat{p},\hat{p}) \notin WF_s u(0,\cdot)$ であることがわかる。はじめにRをいくらでも、大きく取れるから、Nもいくらでも大きく取れることになり定理の結論を得る。証明終。

8 Theorem 4.2の証明

前節までと同じ記号を用いる。ただし、χの代わりに関数列$\chi_L \in C_0^\infty(B(0,1))$, $L = 1, 2, \ldots,$ で $B(0,1/2)$ のとき恒等的に1となり、かつある正の定数Cが存在して、任意の多重指数α、$|\alpha| \le L$ に対して

$$|D^\alpha \chi_L(x)| \le C(CL)^{|\alpha|}$$

が成り立つものを考える。先と同様に、

$$\chi_{L,r,\hat{q},\hat{p}}(q,p) = \chi_L(\frac{q-\hat{q}}{r}, \frac{p-\hat{p}}{r})$$

とおく。$\rho = (\hat{q},\hat{p})$ が $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$ の analytically frequency set $\mathcal{F}_{A,\phi^{-t}}(v)$ に属さないとは、あるρの近傍Θと正数M, δが存在して

$$\sup_{(q,p)\in\Theta} \left| \int W(v)(\phi^{-t}(x,\lambda\hat{\xi})) \exp[-\lambda(|x-q|^2 + |\hat{\xi}-p|^2)] dx d\hat{\xi} \right| \le M \exp(-\delta\lambda) \text{ as } \lambda \to \infty. \tag{8.1}$$

が成り立つときを言う。

Theorem 4.2は次の結果より従う。

Proposition 8.1 $(\hat{q},\hat{p}) \notin \mathcal{F}_{\phi_0^{-t}}(u_0)$ と仮定する。十分小さな正数rと正の定数C_j, $j = 0, 1,$ が存在して任意の自然数kに対して、

$$\sup_{(q,p)\in B(\hat{q},\hat{p},r)} |P_\lambda(u(t))| \le C_0 C_1^k k!/\lambda^k$$

が成り立つ。

以下この命題の証明を与える。$v(t,x) \in C^1(\mathbf{R};\ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$ を方程式(3.1)の解とする。簡単な計算により(c.f. §5)、

$$\begin{aligned}\{\partial_t + \xi\cdot\partial_x\}&W(v)(t,x,\xi) \\ &= \int e^{-iy\xi}\left\{-i(V(x+\frac{1}{2}y) - V(x-\frac{1}{2}y))v(x+\frac{1}{2}y)\overline{v}(x-\frac{1}{2}y)\right\} dy.\end{aligned} \tag{8.2}$$

がわかる。仮定(B_κ)によれば、xを中心とするTaylor展開により、十分大きなMに対して$|y| \le \langle x\rangle/M$のとき、

$$V(x+\frac{y}{2}) - V(x-\frac{y}{2}) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=2k+1} V^{(\alpha)}(x)(y/2)^\alpha/\alpha!.$$

が成り立つ。

$$W(v)=\int_{|y|\le\langle x\rangle/2}\{\cdots\}dy+\int_{|y|\ge\langle x\rangle/2}\{\cdots\}dy=W_1(v)+W_2(v)$$

と分ける。$W_2(v)$ に関しては次の関係式

$$|y|^{-2k}\triangle_\xi^k e^{-iy\xi}=(-1)^k e^{-iy\xi}$$

により、直接、$2k\le L$ のとき、

(8.3)

$$\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)\exp[-\lambda\{(x-q)^2+(\xi-p)^2]\triangle_\xi^k W_2(v)(x,\xi)dxd\xi dpdq$$

(8.4)
$$=\int \triangle_p^k\chi_{L,r,\rho}(q,p)\exp[-\lambda\{(x-q)^2+(\xi-p)^2]W_2(v)(x,\xi)dxd\xi dpdq$$

を用いて、

(8.5)

$$|\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)\exp[-\lambda\{(x-q)^2+(\xi-p)^2]\triangle_\xi^k W_2(v)(x,\xi)dxd\xi dpdq|$$

(8.6)
$$\le C_0C_1^k k!/\lambda^k,\ 2k\le L$$

を確かめることができる。

次に、$W_1(v)$ について考察しよう。(8.2) に代入して、

(8.7)
$$\{\partial_t+\xi\cdot\partial_x-\partial_xV(x)\cdot\partial_\xi\}W_1(v)(t,x,\xi)=-iP(x,-D_\xi)W_1(v)(t,x,\xi)$$

を得る。ここで、

$$P(x,\eta)=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=2k+1}V^{(\alpha)}(x)(\eta/2)^\alpha/\alpha!.$$

$$F(s,x,\xi)=W_1(v)(s,\phi^{s-t}(x,\xi))$$

とおけば、

$$\frac{d}{ds}F=\{\partial_s+\xi\cdot\partial_x-\partial_xV(x)\cdot\partial_\xi\}F$$

が成り立つ。s について積分して変数変換 $(y,\eta)=\phi^{s-t}(x,\xi)$ をすれば、

(8.8)

$$\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)W_1(v)(t,y,\lambda\hat\eta)\exp\left\{-\lambda|(y-q,\hat\eta-p)|^2\right\}dxd\hat\xi dpdq$$

$$=\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)W_1(v)(0,y,\lambda\hat\eta)\exp\left\{-\lambda|(X(t,y,\lambda\hat\eta)-q,\Xi(t,y,\lambda\hat\eta)/\lambda-p)|^2\right\}dxd\hat\xi dpdq$$

$$-i\int\int_0^t \chi_{L,r,\rho}(q,p)[P(y,-D_{\hat\eta}/\lambda)W_1(v)](t-s,y,\lambda\hat\eta))$$

$$\times\exp\left\{-\lambda|(X(t-s,y,\lambda\hat\eta)-q,\Xi(t-s,y,\lambda\hat\eta)/\lambda-p)|^2\right\}dsdxd\hat\xi dpdq.$$

を得る。

これ以後、記号を簡単にするために、$(y, \lambda\hat{\eta})$ を Y と記す。この時、平行移動

$$q' = q - X(t-s, Y) + y,\ p' = p - \nu(t-s, \lambda\hat{\eta}),$$

を行った後、$\hat{\eta}$に関する部分積分を行えば、次が従う。

(8.9)

$$\begin{aligned}
&\int\int_0^t \chi_{L,r,\rho}(q,p)[P(y, -D_{\hat{\eta}}/\lambda)W_1(v)](t-s, y, \lambda\hat{\eta}))\\
&\quad\times \exp\left\{-\lambda|(X(t-s,y,\lambda\hat{\eta}) - q, \Xi(t-s,y,\lambda\hat{\eta})/\lambda - p)|^2\right\} dsdxd\hat{\xi}dpdq\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=2k+1}\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\int\int_0^t \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}V^{(\alpha)}(y)W_1(v)(s,y,\lambda\hat{\eta})\exp\left[-\lambda|(y-q,\hat{\eta}-p)|^2\right]\\
&\quad\times(\lambda^{-1}D_{\hat{\eta}})^{\beta}(-\lambda^{-1}\partial_{p'})^{\gamma}\chi_{L,r,\rho}(q' + (t-s)\lambda\hat{\eta} + \mu(t-s,Y), p' + \nu(t-s,Y))\\
&\quad\times dsdxd\hat{\xi}dp'dq'
\end{aligned}$$

ここで、 次の事実を用いた。

(8.10) $\lambda^{-1}\partial_{\hat{\eta}}\exp[-\lambda|(y-q,\hat{\eta}-p)|^2] = (-\lambda^{-1}\partial_p)\exp[-\lambda|(y-q,\hat{\eta}-p)|^2].$

再びTaylor展開を行う事により、$|\alpha| \geq 3$、$|y-q| \leq 1/(2M_1)$ のとき、

$$V^{(\alpha)}(y) = \sum_{\beta\geq 0} V^{(\alpha+\beta)}(q)(y-q)^{\beta}/\beta!$$

が成り立つ。このとき、階数 $|\beta|$ のある多項式 $Q(\zeta)$ が存在して

$$(y-q)^{\beta}\exp\left[-\lambda|(y-q,\hat{\eta}-p)|^2\right] = \lambda^{-|\beta|/2}Q(-\partial_q/\lambda^{1/2})\exp\left[-\lambda|(y-q,\hat{\eta}-p)|^2\right]$$

が成り立つ事に注意する。さらに、次のHamilton流に対する基本的性質が成り立つ事に注意する (C^{∞}の場合は [7] を参照)。

Lemma 8.2 ある正の定数C_0, C_1が存在して、$0 \leq s \leq t$のとき、

(8.11) $\left|(\lambda^{-1}\partial_{\hat{\eta}})^{\alpha}\mu(t-s,y,\lambda\hat{\eta})\right| \leq C_0 C_1^{|\alpha|}(t-s)^{2+|\alpha|}\lambda^{(\kappa-1)_+}$

(8.12) $\left|(\lambda^{-1}\partial_{\hat{\eta}})^{\alpha}\nu(t-s,y,\lambda\hat{\eta})\right| \leq C_0 C_1^{|\alpha|}(t-s)^{1+|\alpha|}\lambda^{(\kappa-1)_+}.$

が任意のαについて成り立つ。ここで、$a_+ = \max(a, 0)$。

この補題を用いれば、$|\alpha+\beta+\gamma| \le L$ のとき、

(8.13)
$$\left|(\lambda^{-1}D_{q'})^{\alpha}(\lambda^{-1}D_{\hat\eta})^{\beta}(-\lambda^{-1}\partial_{p'})^{\gamma}\chi_{L,r,\rho}(q'+(t-s)\lambda\hat\eta+\mu(t-s,Y),p'+\nu(t-s,Y))\right| \\ \le C_0C_1^{|\beta+\gamma|}\beta!\gamma!(t-s)^{|\beta|}\lambda^{-|\alpha+\gamma|}$$

が成り立つことが確かめられる。さらに、

$$(q,p)\in \mathrm{supp}\chi_{L,r,\rho}(q+(t-s)\lambda\hat\eta+\mu(t-s,Y),p+\nu(t-s,Y))$$

ならば、

$$|q-\{\hat q-(t-s)\lambda\hat\eta+\mu(t-s,Y)\}|\le r$$

であり、$\mu(t-s,Y)\le C(t-s)^2\lambda^{\kappa-1}$ であることに注意すれば、

$$|q|\ge|\hat q-(t-s)\lambda\hat\eta+\mu(t-s,Y)|-r \\ \ge (t-s)\lambda\hat\eta/2.$$

が $t-s\ge M/\lambda$ のときなりたつことがわかる。ここで、M は $|\hat q|<M/2$ が充たされるように十分大きくとる。. よって、このとき、正の定数 $C_j,\ j=0,1$ が存在して

$$|V^{(\alpha)}(q)|\le C_0C_1^{|\alpha|+1}\alpha!\langle(t-s)\lambda\hat\eta\rangle^{\kappa-|\alpha|}$$

が成立する。これにより、次が成り立つことがわかる。

$$\int_0^{(t-M/\lambda)_+}(t-s)^{|\alpha|}|V^{(\alpha)}(q)|\le C_0C_1^{|\alpha|+1}\alpha!\lambda^{-|\alpha|}\langle(t-s)\lambda\hat\eta\rangle^{\kappa-|\alpha|}.$$

一方 $t-s\le M/\lambda$ のときは (8.13) の左辺が

$$C_0C_1^{|\beta+\gamma|}\beta!\gamma!(M/\lambda)^{|\beta|}.$$

で評価されることを見るのはたやすい。

結局もとの変数に戻れば、次が証明できたことになる。

(8.14)
$$\int\int_0^t \chi_{L,r,\rho}(q,p)[P(y,-D_{\hat\eta}/\lambda)W_1(v)](s,y,\lambda\hat\eta)) \\ \times\exp\left\{-\lambda|(X(t-s,y,\lambda\hat\eta)-q,\Xi(t-s,y,\lambda\hat\eta)/\lambda-p)|^2\right\}dsdxd\hat\xi dpdq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=2k+1} C_0 C_1^{|\alpha|} \alpha! \lambda^{\kappa-|\alpha|} \int_0^t \int \chi_{L,r+\delta,\rho}(q,p) W_1(v)(s,y,\lambda\hat{\eta}))$$
$$\times \exp\left\{-\lambda|(X(t-s,y,\lambda\hat{\eta})-q, \Xi(t-s,y,\lambda\hat{\eta})/\lambda - p)|^2\right\} dsdxd\hat{\xi}dpdq$$
$$+ Ce^{-\varepsilon\lambda} \int_0^t \|v(s)\|_{L^2}^2 ds,$$

上で、εは、ある正の数、$\delta > 0$ は、$\chi_{L,r,\rho} \subset\subset \chi_{L,r+\delta,\rho}$となるような十分小さな正数である。

作用素 $E(t)u$ を

$$\int u(y,\lambda\hat{\eta}) \exp\left\{-\lambda|(X(t,y,\lambda\hat{\eta})-q, \Xi(t,y,\lambda\hat{\eta})/\lambda - p)|^2\right\} dyd\hat{\eta}.$$

で定義すれば、結局、

$$\left|\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)E(0)W_1(v)(t,y,\lambda\hat{\eta})dpdq - \int \chi_{L,r,\rho}(q,p)E(t)W_1(v)(0)dpdq\right|$$
$$\leq C_0\lambda^{\kappa-3}\exp[C_1/\lambda] \int_0^t \int \chi_{L,r+\delta,\rho}(q,p)E(t-s)W_1(v)(s)dpdqds,$$
$$+ Ce^{-\varepsilon\lambda} \int_0^t \|v(s)\|_{L^2}^2 ds,$$

となる。同様に、$0 < s \leq t$ にたいし、

$$\left|\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)E(t-s)W_1(v)(s)dpdq - \int \chi_{L,r,\rho}(q,p)E(t)W_1(v)(0)dpdq\right|$$
$$\leq C_0\lambda^{\kappa-3}\exp[C_1/\lambda] \int_0^s \int \chi_{L,r+\delta,\rho}(q,p)E(t-s')W_1(v)(s')dpdqds',$$
$$+ Ce^{-\varepsilon\lambda} \int_0^t \|v(s')\|_{L^2}^2 ds'.$$

が成り立つことがわかる。

$A = C_0 \exp[C_1]$ と定義すれば、数学的帰納法により、次が従う。

(8.15)

$$\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)E(0)W_1(v)(t)dpdq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} (A\lambda^{\kappa-3}t)^k (k!)^{-1} \int \chi_{L,r+(N-1)\delta,\rho}(q,p)E(t)W_1(v)(0)dpdq$$
$$+ (A\lambda^{\kappa-3})^N \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{N-1}} \int \chi_{L,r+N\delta,\rho}(q,p)E(s_{N-1}-s_N)W_1(v)(s_N)ds_N \cdots ds_1 dpdq$$
$$+ Ce^{-\varepsilon\lambda} \sum_{j=0}^{N} A^j \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{j-1}} \|v(s_j)\|_{L^2}^2 ds_j \cdots ds_1$$

$\|v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 = \|v(0,\cdot)\|_{L^2}^2$を用いれば、先の不等式は次のように表わされる。

(8.16)
$$\begin{aligned}&\int \chi_{L,r,\rho}(q,p)E(0)W_1(v)(t)dpdq \\ &\leq e^{A\lambda^{\kappa-3}t}\int \chi_{L,2r,\rho}(q,p)E(t)W_1(v)(0)dpdq \\ &+\omega_{2n}(2r)^{2n}(A\lambda^{\kappa-3}t)^N(N!)^{-1}\|v(0)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + Ce^{-\varepsilon\lambda}\sum_{j=0}^{N}(At)^j\|v(0)\|_{L^2}^2/j!,\end{aligned}$$

上で、ω_{2n}は$2n$次元の単位球の体積を表わし$\delta = r/N$である。

極限操作により、今得られた不等式が$v(t,\cdot) \in C^0(\mathbf{R};\ L^2(\mathbf{R}^n))$ に対しても成り立つことがわかる。

定理の仮定より、ある定数Cと正数ε_0が存在して

$$\left|\int \chi_{L,2r,\rho}(q,p)E(t)W(v)(0)dpdq\right| \leq Ce^{-\varepsilon_0\lambda}$$

がすべての$\lambda > 1$ について成り立つ。$\varepsilon = \max(At, \varepsilon_0)$ となるように選べば、(8.16)より、

$$\sup_{(q,p)\in B_{r/2}(\hat{q},\hat{p})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon\lambda)^k}{k!}|P_\lambda(u(t))(q,p)|^2 < +\infty$$

が結論できる。よって、Proposition 8.1の証明は完成する。

References

[1] L. Boutet de Monvel, Propagation des singularites des solutions déquations analogues a léquation de Schrödinger, Fourier integral operators and partial differential equations (Colloq. Internat., Univ. Nice, Nice, 1974), pp. 1–14. Lecture Notes in Math., Vol. 459, Springer, Berlin, 1975.

[2] A. Cordoba and C. Fefferman, Wave packets and Fourier integral operators, Comm. P.D.Eqs., 3 (1978), 979–1005.

[3] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation, Comm. Pure Appl. Math. vol. XLVIII (1995), 769-860.

[4] J-M. Delort, F.B.I. transformation, Lecture Notes in Math. No.1522, 1992, Springer-Verlag.

[5] S. Doi, Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds, Duke Math. J., 82 (1996), 679–706.

[6] G.B. Folland, Harmonic analysis in phase space, Ann. of Math. Studies No.122. 1989, Princeton Univ. Press.

[7] D. Fujiwara, A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation, J. d'Analyse Math. 35 (1979), 41-96.

[8] D. Fujiwara, Remarks on the convergence of the Feynman path integrals, Duke Math. J., 47 (1980), 41-96.

[9] P. Gérard, Moyennisation et regularite deux-microlocale, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 23 (1990), no. 1, 89–121.

[10] C. Gérard, Sharp propagation estimates for N-particle systems, Duke Math. J., 67 (1992), 334-396.

[11] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, Math. Z., 192 (1986), 637–650.

[12] N. Hayashi and S. Saitoh, Analyticity and smoothing effect for Schrödinger equation, Ann. Inst. Henri Poincaré Math., 52 (1990), 163–173.

[13] L. Hörmander, On the existence and regularity of solutions of linear pseudodifferential equations, L'enseignement Math., 18 (1971), 99–163.

[14] A, Jensen, Commutator method and a smoothing property of the Schrödinger evolution group, Math. Z.. 191 (1986), 53–59.

[15] K. Kajitani, The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients, J. Math. Soc. Japan, 50 (1998), 179-202.

[16] L. Kapitanski and I. Rodnianski, Regulated smoothing for Schrödinger evolutions, Internat. Math. Res. Notices 2 (1996), 41-54.

[17] L. Kapitanski, I. Rodnianski and K. Yajima, On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator, Topol. Methods Nonlinear Anal., 9 (1997), 77-106.

[18] R. Lascar, Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27 (1977), 79-123.

[19] P.L. Lions and B. Perthame, Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion, Compte Rendu, 314 (1992), 801-806.

[20] T. Ōkaji, Propagation of wave packets and smoothing properties of solutions to Schrödinger equations with unbounded potential, preprint.

[21] T.Ōkaji, Analytic smoothing properties of solutions to Schrödinger equations with subquadratic potential, preprint.

[22] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-adjointness, Academic Press,1975.

[23] T. Sakurai, Propagation of singularities of solutions to semilinear Schrödinger equations, Proc.Japan Acad., 61,Ser.A 1985, 31–34.

[24] N.A. Shananin, On singularities of solutions of the Schrödinger equation for a free particle, Math. Notes, 55 (1994), 626–631.

[25] J. Sjöstrand, Singularités analytiques micolocales, Astérique No. 95, 1982, Soc. Math. France.

[26] A. Weinstein, A symbol class for some Schrödinger equations on $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math., 107 (1985), 1-21.

[27] K. Yajima, Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. 181 (1996), 605-629.

[28] M. Yamazaki, On the microlocal smoothing effect of dispersive partial differential equations I: Second order linear equation, Algebraic Analysis, 11 (1988), 911-926.

[29] S. Zelditch, Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger equations, Comm. Math. Phys., 90 (1983), 1-26.