数理解析研究所講究録
1057 巻 1998 年 41-53

二面体群の普遍R行列について
(On the Universal R-matrices of the Dihedral groups)

阪大・理　和久井道久 (Michihisa Wakui)

Abstract : The notion of universal R-matrix is defined by Drinfel'd at the same time of defining quantum groups. In this note we determine the universal R-matrices of the group $D_{m,n}$ generated by s and t with relations $s^m = 1$, $t^2 = s^n$ and $tst^{-1} = s^{-1}$. Here $m \geq 3$ and $n \geq 1$ are integers. The group $D_{m,n}$ is the dihedral group D_{2m} of order $2m$ if $m = n$, and is the quaternion group Q_{2m} of order $2m$ if $m = 2n$.

Theorem *If $m \neq 4$, or $m = 4$ and n is odd then the universal R-matrices of $\mathbf{C}[D_{m,n}]$ are the universal R-matrices of $\mathbf{C}[< s >]$, where $< s >$ is the cyclic subgroup generated by s. So the number of the universal R-matrices of $\mathbf{C}[D_{m,n}]$ is m.*

If $m = 4$ and n is even then an universal R-matrix of $\mathbf{C}[D_{m,n}]$ is one of the following.
(i) *the universal R-matrices of $\mathbf{C}[< s >]$,*
(ii) $\tilde{R}_{a,\mu} = \dfrac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta,i,j=0,1} a^{\alpha\beta}(-1)^{j+i\beta} t^{\alpha} s^{2i+\alpha\mu} \otimes t^{\beta} s^{2j+\beta\mu}$, *where* $a^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $\mu = 0, 1$
So the number of the universal R-matrices of $\mathbf{C}[D_{4,n}]$, where n is even, is 8.

For the proof of Theorem we use the representation theory of cyclic groups. As a corollary to Theorem we obtain the following familiar result.

Corollary *The groups D_8 and Q_8 are not isomorphic.*

We prove this by calculating the rank of the quasitriangular Hopf algebra ($\mathbf{C}[D_{4,n}]$, $\tilde{R}_{a,\mu}$). The concept of rank for a quasitriangular Hopf algebra is defined by Majid.

ホップ代数に対する普遍R行列の概念は、量子群の誕生と同時に、Drinfel'd [3][4] によって導入された。リボン元の概念は量子群を用いて結び目や三次元多様体の不変量を構成する際に、Reshetikhin と Turaev [9][10] によって導入された。普遍R行列とリボン元を与えるごとに結び目や三次元多様体の不変量が1つ決まるので、これらを具体的なホップ代数に対して見つけることは、低次元位相幾何学の立場からも重要な課題である。この論文では、巡回群を指数2の部分群としてもつ次のような表示を持つ有限群 $D_{m,n}$ (但し、m は 3 以上の整数、n は 1 以上の整数) の複素数体 $\mathbf{C}$ 上の群環 $\mathbf{C}[D_{m,n}]$ の普遍R行列とリボン元を決定する。

$$D_{m,n} = < s,\ t \mid s^m = 1,\ t^2 = s^n,\ tst^{-1} = s^{-1} >$$

$D_{m,n}$ は、$m = n$ のとき位数 $2m$ の二面体群であり、$m = 2n$ のとき位数 $2m$ の一般四元数群である。 我々はこの群の普遍R行列とリボン元を決定するために、巡回群の表現論を用いる。しかしながら、この群の表現論は使わないことを注意しておく。ホップ代数の一般的な事柄については[1]、表現論の一般的な事柄については[2] がよい手引きとなる。

まず、ホップ代数の普遍R行列とリボン元の定義を思い出しておこう。

定義(Drinfel'd) $A=(A,\Delta,\varepsilon,S)$ をホップ代数とし、$R\in A\otimes A$ を可逆元とする。組 (A,R) が準三角ホップ代数であるとは、次の3つの条件が満たされるときをいう：

(i) $\Delta'(a)=R\cdot\Delta(a)\cdot R^{-1}$ for all $a\in A$

(ii) $(\Delta\otimes id)(R)=R_{13}R_{23}$

(iii) $(id\otimes\Delta)(R)=R_{13}R_{12}$

ここで、$\Delta'=T\circ\Delta$, $T:A\otimes A\longrightarrow A\otimes A$, $T(a\otimes b)=b\otimes a$ であり、$R_{ij}\in A\otimes A\otimes A$ は $R_{12}=R\otimes 1$, $R_{23}=1\otimes R$, $R_{13}=(T\otimes id)(R_{23})$ で与えられる。R を普遍R行列と呼ぶ。

有限群 G に対して、その群環 $\mathbf{C}[G]$ は

$$\Delta(g)=g\otimes g,\quad \varepsilon(g)=1,\quad S(g)=g^{-1},\quad g\in G$$

によってホップ代数になる。群環 $\mathbf{C}[G]$ の普遍R行列を有限群 G の普遍R行列という。1 を有限群 G の単位元とするとき、明らかに、$R=1\otimes 1$ は G の普遍R行列である。

定義(Reshetikhin-Turaev) (A,R) を準三角ホップ代数とする。$R=\sum_i\alpha_i\otimes\beta_i$ と書き表わしたとき、$u:=\sum_i S(\beta_i)\alpha_i$ とおく。$v\in A$ とする。次の5つの条件が満たされるとき、組 (A,R,v) をリボンホップ代数という。v をそのリボン元という。

(i) $v^2=uS(u)$

(ii) v は A の中心に属する

(iii) $S(v)=v$

(iv) $\varepsilon(v)=1$

(v) $\Delta(v)=(R_{21}R)^{-1}v\otimes v$

ここで、$R_{21}=\sum_i\beta_i\otimes\alpha_i$ とおいた。

この論文で用いる補題を2つ用意しておく。最初の補題は準三角ホップ代数の定義からただちに得られる。2番目の補題は Radford [7] によって指摘された。

補題1 組 (A,R) が準三角ホップ代数ならば、$(\varepsilon\otimes id)(R)=1$, $(id\otimes\varepsilon)(R)=1$ が成り立つ。□

補題2 ([7, p.4 Lemma1]) A をホップ代数とする。このとき、$R\in A\otimes A$ が

(i) $(\Delta\otimes id)(R)=R_{13}R_{23}$

(ii) $(\varepsilon\otimes id)(R)=1$

を満たしているならば、R は可逆である。□

§.1 主定理

主結果を説明するために、まず、巡回群の普遍R行列とリボン元について調べる。次の定理は部分的には H.Murakami, Ohtsuki, Okada[6]、Radford[7][8] によって与えられた。

定理3 $\mathbf{Z}_m$ を位数 m の巡回群とする。このとき、$\mathbf{Z}_m$ の普遍R行列は全部で m 個ある。s をその生成元とし、ζ を 1 の原始 m 乗根とするとき、それらは

$$R = \frac{1}{m}\sum_{k,i=0}^{m-1} \zeta^{-ik} s^k \otimes s^{di}$$

で与えられる。ここで、$d \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ である。さらに、この普遍R行列を R_d と書くとき、準三角ホップ代数 $(\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m], R_d)$ のリボン元 v は m が奇数のときは1つ、m が偶数のときは2つあり、それらは次で与えられる。

$$v = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} \nu^j \zeta^{-dj^2-kj} s^k$$

但し、ν は m が奇数のときは 1、m が偶数のときは ± 1 の値をとる。

次に、主結果を述べる。m を 3 以上の整数、n を 1 以上の整数とし、位数 $2m$ の先に定義した群 $D_{m,n}$ について考える。$D_{m,n}$ の s で生成される部分群は位数 m の巡回群 $\mathbf{Z}_m$ に同型である。定理3の中の $\mathbf{Z}_m$ の普遍R行列 R_d $(d = 0, 1, \cdots, m-1)$ は $\Delta'(t) \cdot R_d = R_d \cdot \Delta(t)$ を満たすので、$D_{m,n}$ の普遍R行列にもなる。さらに、準三角ホップ代数 $(\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m], R_d)$ のリボン元 $v = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} \nu^j \zeta^{-dj^2-kj} s^k$ (但し、ν は m が奇数のとき 1 で、m が偶数のとき ± 1) は $vt = tv$ を満たすから、$\mathbf{C}[D_{m,n}]$ の中心に属している。したがって、また、これは準三角ホップ代数 $(\mathbf{C}[D_{m,n}], R_d)$ のリボン元でもある。実は次が成立する。

定理4 群 $D_{m,n}$ $(m \geq 3,\ n \geq 1)$ の普遍R行列は、$m \neq 4$ または $m = 4$ かつ n が 2 の倍数でないとき全部で m 個あり、それらは s で生成される位数 m の巡回部分群 $< s >$ の普遍R行列 R_d $(d = 0, 1, \cdots, m-1)$ に一致する。さらに、準三角ホップ代数 $(\mathbf{C}[D_{m,n}], R_d)$ のリボン元は巡回部分群 $< s >$ の普遍R行列 R_d に関するリボン元である。$m = 4$ かつ n が 2 の倍数のときは、上記の普遍R行列 R_d $(d = 0, 1, 2, 3)$ 以外に

$$\tilde{R}_{a,\mu} = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta,i,j=0,1} a^{\alpha\beta}(-1)^{j\alpha+i\beta} t^\alpha s^{2i+\alpha\mu} \otimes t^\beta s^{2j+\beta\mu}$$

(但し、$a^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $\mu = 0, 1$) があり、これですべてである。また、準三角ホップ代数 $(\mathbf{C}[D_{4,n}], \tilde{R}_{a,\mu})$ のリボン元は $a^2 = 1$ のとき 1, s^2 の2つ、$a^2 = -1$ のとき $\frac{e^{\pm\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}}1 + \frac{e^{\mp\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}}s^2$ の2つである。

注意：$m = 4$ かつ n が4の倍数のときの普遍R行列 $\tilde{R}_{a,0}$ $(a = \pm 1)$ は s^2 と t で生成される部分群 $< s^2, t >$ (これは s^2 で生成される位数 2 の巡回群 と t で生成される位数 2 の巡回群 との

直和になる) の 16 個ある普遍R行列 ([8] p.219参照) のうちの2つであるが、 $\tilde{R}_{a,1}$ $(a=\pm 1)$ は $D_{m,n}$ の可換ないかなる部分群の普遍R行列にもなっていない。

Majid[5]によって考え出された準三角ホップ代数の階数(定義は第3節で述べる)を $(\mathbf{C}[D_{4,n}], \tilde{R}_{a,\mu})$ について計算することにより、次のよく知られた結果を得る。

系5 位数8の二面体群 D_8 と位数8の一般四元数群 Q_8 は群として同型でない。

定理3と定理4は次の節で証明される。系5は第3節で証明される。

§.2 定理3と定理4の証明

一般に、有限群 G の $\mathbf{C}$ 上の既約指標の全体を $\chi_1, \cdots, \chi_n$ とするとき、各 $i=1,\cdots,n$ に対して

$$E_i := \frac{\deg\chi_i}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})g \quad \in \mathbf{C}[G]$$

とおくと、E_i $(i=1,\cdots,n)$ は $\mathbf{C}[G]$ の原始べき等元である。すなわち、

$$E_iE_j=\delta_{ij}E_i \quad (i,j=1,\cdots,n), \quad E_1+\cdots+E_n=1$$

が成立する。

$\mathbf{Z}_m$ を位数 m の巡回群とし、その生成元を s とする。ζ を 1 の原始 m 乗根とする。$\mathbf{Z}_m$ の既約指標は次で与えられる：

$$\chi_k : \mathbf{Z}_m \longrightarrow \mathbf{C} \quad (k=0,1,\cdots,m-1)$$
$$\chi_k(s^i)=\zeta^{ki} \quad (i=0,1,\cdots,m-1)$$

したがって、χ_k $(k=0,1,\cdots,m-1)$ に対応する原始べき等元 E_k は

$$E_k=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\zeta^{-ki}s^i \quad \cdots\cdots①$$

である。$E_ks=\zeta^kE_k$ となるから、$i=0,1,\cdots,m-1$ に対して

$$s^i=1\cdot s^i=\sum_{k=0}^{m-1}E_ks^i=\sum_{k=0}^{m-1}\zeta^{ik}E_k$$

が成立する。便宜上、任意の整数 k に対して E_k を①の右辺によって定義すれば、$E_{m+k}=E_k$ $(k\in\mathbf{Z})$ が成り立つ。ζ は 1 の原始 m 乗根であるので、任意の整数 p に対して

$$\sum_{i=0}^{m-1}\zeta^{ip}=\begin{cases} m & \text{if } p\equiv 0 \bmod m \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

となる。このことに注意すると、$\Delta(E_k)=\sum_{j=0}^{m-1}E_j\otimes E_{k-j}$ を得る。

(定理3の証明) まず、$\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m]\otimes\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m]$ の元 R が $\mathbf{Z}_m$ の普遍R行列であるための必要十分条件を求める。 $R\in\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m]\otimes\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m]$ を

$$R=\sum_{i,j=0}^{m-1}a_{ij}E_i\otimes E_j\quad(a_{ij}\in\mathbf{C})$$

と書く。ここで、係数 a_{ij} の添字 i,j は m を法として考えることにすると、

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes id)(R)=R_{13}R_{23}&\\ &\iff a_{i+k\ j}=a_{kj}a_{ij}\quad\text{for}\ \ i,j,k=0,1,\cdots,m-1\\ &\Longrightarrow j=0,1,\cdots,m-1\ \text{について、}\\ &\quad\ a_{ij}=(a_{1j})^i\ \text{for}\ \ i=1,\cdots,m-1,\ a_{0j}=(a_{1j})^m\end{aligned}$$

が成立する。 同様にして、

$$\begin{aligned}(id\otimes\Delta)(R)=R_{13}R_{12}&\\ &\Longrightarrow i=0,1,\cdots,m-1\ \text{について、}\\ &\quad\ a_{ij}=(a_{i1})^j\ \text{for}\ \ j=1,\cdots,m-1,\ a_{i0}=(a_{i1})^m\end{aligned}$$

を得る。したがって、R が普遍R行列ならば、 $j=1,\cdots,m-1$ に対して $a_{1j}=(a_{11})^j$ でなければならない。また、$\varepsilon(E_k)=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\zeta^{-ki}=\delta_{k0}$ なので、

$$\begin{cases}(\varepsilon\otimes id)(R)=1 & \iff\ a_{0j}=1\quad(j=0,1,\cdots,m-1),\\ (id\otimes\varepsilon)(R)=1 & \iff\ a_{i0}=1\quad(i=0,1,\cdots,m-1)\end{cases}$$

である。この式から、補題1より、R が普遍R行列ならば $a_{0j}=a_{j0}=1$ でなければならない。こうして、$\mathbf{Z}_m$ の普遍R行列は

$$a_{11}^m=1\ \text{かつ}\ a_{ij}=(a_{11})^{ij}\quad(i,j=0,1,\cdots,m-1)$$

を満たしていなければならないことがわかった。$a_{11}^m=1$ より $a_{11}=\zeta^d\quad(d\in\{0,1,\cdots,m-1\})$ とおくことができる。よって、

$$\begin{aligned}R=&\sum_{i,j=0}^{m-1}\zeta^{dij}E_i\otimes E_j\\ =&\frac{1}{m^2}\sum_{l,k,i=0}^{m-1}\zeta^{-ik}\sum_{j=0}^{m-1}\zeta^{dij-jl}s^k\otimes s^l\\ =&\frac{1}{m}\sum_{k,i=0}^{m-1}\zeta^{-ik}s^k\otimes s^{di}\end{aligned}$$

と表わされる。逆に、この形の R は $\mathbf{Z}_m$ の普遍R行列である。

次に、後半部分を示す。まず、この R に対して定まる u を計算すると

$$u=\frac{1}{m}\sum_{k,i=0}^{m-1}\zeta^{-ik}s^{-k+di}=\frac{1}{m}\sum_{i,j=0}^{m-1}\zeta^{dij}\sum_{k=0}^{m-1}\zeta^{-k(i+j)}E_j=\sum_{j=0}^{m-1}\zeta^{-dj^2}E_j$$

である。そこで、$S(E_j)=E_{-j}$ $(j=0,1,\cdots,m-1)$ を使って計算すると $uS(u)=\sum_{j=0}^{m-1}\zeta^{-2dj^2}E_j$ となる。これより、準三角ホップ代数 $(\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m],R)$ のリボン元 v は次のように書けていることがわかる。

$$v=\sum_{j=0}^{m-1}\nu_j\zeta^{-dj^2}E_j$$

ここで、$\nu_j=\pm1$ $(j=0,1,\cdots,m-1)$ である。以下 ν_j の添字 j は m を法として考える。このとき

$$S(v)=\sum_{j=0}^{m-1}\nu_{m-j}\zeta^{-dj^2}E_j,\quad \varepsilon(v)=\sum_{j=0}^{m-1}\nu_j\zeta^{-dj^2}\delta_{j0}=\nu_0$$

から

$$\begin{cases} S(v)=v \iff \nu_j=\nu_{m-j}\quad (j=1,\cdots,m-1) & \cdots\cdots② \\ \varepsilon(v)=1 \iff \nu_0=1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

を得る。

$$\begin{aligned} R_{21}R=&\frac{1}{m^2}\sum_{i,j,k,l=0}^{m-1}\zeta^{-jk-il}s^{k+di}\otimes s^{l+dj} \\ =&\frac{1}{m^2}\sum_{a,b=0}^{m-1}\sum_{i,j=0}^{m-1}\zeta^{dia+djb}\sum_{k=0}^{m-1}\zeta^{(-j+a)k}\sum_{l=0}^{m-1}\zeta^{(-i+b)l}E_a\otimes E_b \\ =&\sum_{a,b=0}^{m-1}\zeta^{2dab}E_a\otimes E_b \end{aligned}$$

および

$$\Delta(v)=\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{b=0}^{m-1}\nu_{a+b}\zeta^{-d(a+b)^2}E_a\otimes E_b$$

から次を得る：

$$\begin{aligned} (R_{21}R)\cdot\Delta(v)=v\otimes v &\iff \nu_a\nu_b=\nu_{a+b}\ (a,b=0,1,\cdots,m-1) \\ &\iff \nu_a=\nu_1^a\quad (a=1,\cdots,m-1,m)\quad \text{または} \\ &\qquad \nu_a=0\quad (a=0,1,\cdots,m-1). \qquad \cdots\cdots④ \end{aligned}$$

②③④から $\nu_1^m=1$ が導かれる。したがって、m が奇数のときには $\nu_1=1$ でなければならない。こうして、v が準三角ホップ代数 $(\mathbf{C}[\mathbf{Z}_m],R_d)$ のリボン元ならば

$$v=\sum_{j=0}^{m-1}\nu_1^j\zeta^{-dj^2}E_j$$

但し、ν_1 は m が奇数のとき 1 で、m が偶数のときは ± 1、と書けていることがわかった。逆に、v がこの形をしていれば②③④が成り立つことが容易に確かめられ、v はリボン元であることがわかる。これで定理の後半部分が証明された。□

次に、定理4を証明する。s で生成される $D_{m,n}$ の部分群 $< s >$ は位数 m の巡回群であるので、これを $\mathbf{Z}_m$ と同一視して $\mathbf{Z}_m$ を $D_{m,n}$ の部分群とみなす。このとき、先程求めた $\mathbf{Z}_m$ の原始べき等元 $E_0, E_1, \cdots, E_{m-1}$ に $tE_0, tE_1, \cdots, tE_{m-1}$ を加えて得られる $2m$ 個の $\mathbf{C}[D_{m,n}]$ の元は $\mathbf{C}[D_{m,n}]$ の基底をなす。我々はこの基底を使って $D_{m,n}$ の普遍R行列とリボン元を決定する。

(定理4の証明) $\mathbf{C}[D_{m,n}] \otimes \mathbf{C}[D_{m,n}]$ の元 R が $D_{m,n}$ の普遍R行列であるための必要十分条件を求める。$R \in \mathbf{C}[D_{m,n}] \otimes \mathbf{C}[D_{m,n}]$ を

$$R = \sum_{\substack{\alpha,\beta=0,1 \\ i,j=0,1,\cdots,m-1}} a_{\beta j}^{\alpha i}\, t^\alpha E_i \otimes t^\beta E_j \quad (a_{\beta j}^{\alpha i} \in \mathbf{C})$$

と書く。

$$\begin{aligned} R \cdot s \otimes s &= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ i,j}} a_{\beta j}^{\alpha i} \zeta^{i+j} t^\alpha E_i \otimes t^\beta E_j, \\ s \otimes s \cdot R &= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ i,j}} a_{\beta j}^{\alpha i} t^\alpha s^{(-1)^\alpha} E_i \otimes t^\beta s^{(-1)^\beta} E_j \\ &= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ i,j}} a_{\beta j}^{\alpha i} \zeta^{(-1)^\alpha i + (-1)^\beta j} t^\alpha E_i \otimes t^\beta E_j \end{aligned}$$

より

$$s \otimes s \cdot R = R \cdot s \otimes s \iff a_{\beta j}^{\alpha i} \zeta^{i+j} = a_{\beta j}^{\alpha i} \zeta^{(-1)^\alpha i + (-1)^\beta j} \quad \text{for all } \alpha, \beta, i, j$$

となる。ここで、$\alpha, \beta = 0, 1$ に対して

$$\begin{aligned} \zeta^{i+j} = \zeta^{(-1)^\alpha i + (-1)^\beta j} &\iff i + j \equiv (-1)^\alpha i + (-1)^\beta j \bmod m \\ &\iff \begin{cases} 2i \equiv 0 \bmod m & \text{if } \alpha = 1,\ \beta = 0 \\ 2j \equiv 0 \bmod m & \text{if } \alpha = 0,\ \beta = 1 \\ 2(i+j) \equiv 0 \bmod m & \text{if } \alpha = 1,\ \beta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となるので $m \geq 3$ に注意して、

$$\begin{cases} a_{0j}^{11} = a_{11}^{0i} = 0 \quad \text{for } i, j = 0, 1, \cdots, m-1 & \cdots\cdots(❶) \\ m \text{ が奇数のとき } a_{1j}^{11} = a_{11}^{1j} = 0 \quad \text{for } j \neq m-1 & \cdots\cdots(❷) \\ m \text{ が偶数のとき } a_{1j}^{11} = a_{11}^{1j} = 0 \quad \text{for } j \neq m'-1, m-1 & \end{cases}$$

が成り立つことがわかる。

次に、$k=0,1,\cdots,m-1$ に対して $E_k t = tE_{-k}$ となることから

$$t\otimes t\cdot R = R\cdot t\otimes t \Longleftrightarrow a_{\beta j}^{\alpha i} = a_{\beta\ -j}^{\alpha\ -i} \quad \text{for all } \alpha,\beta,i,j \qquad \cdots\cdots(❸)$$

が得られる。ここで、$a_{\beta j}^{\alpha i}$ の添字 i,j は m を法として考えている。

$$(\Delta\otimes id)(R) = \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ i,j}}\sum_{k} a_{\beta j}^{\alpha i}\ t^{\alpha}E_k\otimes t^{\alpha}E_{i-k}\otimes t^{\beta}E_j,$$

$$\begin{aligned} R_{13}R_{23} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\\ i,j,k,l}} a_{\beta l}^{\alpha k} a_{\beta' j}^{\alpha' i}\ t^{\alpha}E_k\otimes t^{\alpha'}E_i\otimes t^{\beta+\beta'}E_{(-1)^{\beta'}l}E_j \\ &= \sum_{\substack{\alpha,\alpha',\beta\\ i,j,k}}\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} a_{\beta_1\ (-1)^{\beta_2}j}^{\alpha\quad k} a_{\beta_2 j}^{\alpha' i}\zeta^{nj\beta_1\beta_2}\ t^{\alpha}E_k\otimes t^{\alpha'}E_i\otimes t^{\beta}E_j \end{aligned}$$

となる。したがって、$(\Delta\otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$ となるための必要十分条件は任意の $\alpha,\alpha',\beta = 0,1,\ i,j,k=0,1,\cdots,m-1$ に対して

$$\delta_{\alpha,\alpha'}a_{\beta\ j}^{\alpha\ i+k} = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} a_{\beta_1\ (-1)^{\beta_2}j}^{\alpha\quad k} a_{\beta_2 j}^{\alpha' i}\zeta^{nj\beta_1\beta_2} \qquad \cdots\cdots(❹)$$

となることである。ここで、$\delta_{\alpha,\alpha'}$ はクロネッカーのデルタである。同様にして、$(id\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$ となるための必要十分条件は任意の $\alpha,\beta,\beta' = 0,1,\ i,j,k=0,1,\cdots,m-1$ に対して

$$\delta_{\beta,\beta'}a_{\beta\ j+k}^{\alpha\ i} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} a_{\beta\quad j}^{\alpha_1 (-1)^{\alpha_2}i} a_{\beta' k}^{\alpha_2 i}\zeta^{ni\alpha_1\alpha_2} \qquad \cdots\cdots(❹')$$

となることである。(❹)(❹')を繰り返し用いて

$(\Delta\otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$

$\Longrightarrow$ 任意の $\alpha,\beta=0,1,\ i,j=0,1,\cdots,m-1$ に対して

$$a_{\beta\ j}^{\alpha\ i+1} = \sum_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{i+1}=\beta}\left(\prod_{g=1}^{i} a_{\beta_g\ (-1)^{\beta_{g+1}+\cdots+\beta_{i+1}}j}^{\alpha\qquad 1}\right) a_{\beta_{i+1} j}^{\alpha\ 1}\zeta^{nj\sum_{u<v}\beta_u\beta_v}, \tag{2.1}$$

$(id\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$

$\Longrightarrow$ 任意の $\alpha,\beta=0,1,\ i,j=0,1,\cdots,m-1$ に対して

$$a_{\beta\ 1+k}^{\alpha\ i} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}=\alpha}\left(\prod_{g=1}^{k} a_{\beta\qquad 1}^{\alpha_g\ (-1)^{\alpha_{g+1}+\cdots+\alpha_{k+1}}i}\right) a_{\beta\ 1}^{\alpha_{k+1} i}\zeta^{ni\sum_{u<v}\alpha_u\alpha_v} \tag{2.2}$$

を得る。ここで、(❶)を使うと

$$\begin{cases} a_{\beta\ j}^{1\ i+1} = & \delta_{\beta,i+1}(a_{1\ j}^{1\ 1})^{[\frac{i}{2}]+1}(a_{1\ -j}^{1\ 1})^{[\frac{i+1}{2}]}\zeta^{nji(i+1)/2}, \\ a_{1\ 1+k}^{\alpha\ i} = & \delta_{\alpha,k+1}(a_{1\ 1}^{1\ i})^{[\frac{k}{2}]+1}(a_{1\ 1}^{1\ -i})^{[\frac{k+1}{2}]}\zeta^{nik(k+1)/2} \end{cases} \tag{2.3}$$

となることがわかる。但し、$\delta_{\beta,i+1}$, $\delta_{\alpha,k+1}$ は 2 を法としたクロネッカーのデルタであり、実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数である。(2.3)と(❷)から
m が奇数のとき：

$$\begin{cases} a^{1\ i+1}_{\beta\ j} = 0 & \text{for } \beta = 0,1 \text{ and } (i,j) \neq (0, m-1), \\ a^{\alpha\ i}_{1\ 1+k} = 0 & \text{for } \alpha = 0,1 \text{ and } (k,i) \neq (0, m-1) \end{cases}$$

m が偶数で $m \neq 4$ のとき：$1 \neq m'-1, m-1$, $m'+1 \neq m'-1, m-1$ なので、

$$\begin{cases} a^{1\ i+1}_{\beta\ j} = 0 & \text{for } \beta = 0,1 \text{ and } (i,j) \neq (0, m-1), (0, m'-1), \\ a^{\alpha\ i}_{1\ 1+k} = 0 & \text{for } \alpha = 0,1 \text{ and } (k,i) \neq (0, m-1), (0, m'-1) \end{cases}$$

がわかる。さらに、(❸)により $a^{1\ 1}_{\beta\ m-1} = a^{1\ m-1}_{\beta\ 1}$, $a^{1\ 1}_{\beta\ m'-1} = a^{1\ m-1}_{\beta\ m'+1}$ および $a^{\alpha\ m-1}_{1\ 1} = a^{\alpha\ 1}_{1\ m-1}$, $a^{\alpha\ m'-1}_{1\ 1} = a^{\alpha\ m'+1}_{1\ m-1}$ となるので、$m \neq 4$ ならば

$$\begin{cases} a^{1\ i}_{\beta\ j} = 0 & \text{for } \beta = 0,1 \text{ and } i,j = 0,1,\cdots,m-1, \\ a^{\alpha\ i}_{1\ j} = 0 & \text{for } \alpha = 0,1 \text{ and } i,j = 0,1,\cdots,m-1 \end{cases}$$

が示された。これより、$m \neq 4$ のとき、$\mathbf{C}[D_{m,n}] \otimes \mathbf{C}[D_{m,n}]$ の元 R が $D_{m,n}$ の普遍R行列ならば、$\mathbf{Z}_m$ の普遍R行列であることがわかった。

$m = 4$ の場合を考察しよう。まず、(❶)より $a^{11}_{0i} = a^{0i}_{11} = 0$ $(i = 0,1,2,3)$ を得る。これと(❸)と合わせて $a^{13}_{0i} = a^{0i}_{13} = 0$ $(i = 0,1,2,3)$ を得る。一方、(❷)より $a^{11}_{10} = a^{11}_{12} = a^{10}_{11} = a^{12}_{11} = 0$ であり、これと(2.1)を合わせて $a^{1i}_{10} = a^{1i}_{12} = a^{10}_{1i} = a^{12}_{1i} = 0$ $(i = 0,1,2,3)$ を得る。さらに、(2.3)より

$$\begin{cases} a^{13}_{11} = a^{11}_{13}(a^{11}_{11})^2\zeta^{3n}, & a^{13}_{13} = a^{11}_{11}(a^{11}_{13})^2\zeta^{9n}, \\ a^{10}_{0j} = (a^{1\ 1}_{1\ j})^2(a^{1\ 1}_{1\ -j})^2\zeta^{6nj}, & a^{12}_{0j} = a^{1\ 1}_{1\ j}a^{1\ 1}_{1\ -j}\zeta^{nj}, \\ a^{0i}_{10} = (a^{1\ i}_{1\ 1})^2(a^{1\ -i}_{1\ 1})^2\zeta^{6ni}, & a^{0i}_{12} = a^{1\ i}_{1\ 1}a^{1\ -i}_{1\ 1}\zeta^{ni} \end{cases} \tag{2.4}$$

が成り立つ。$a := a^{11}_{13} = a^{13}_{11}$ とおく。

・$a = 0$ のとき：関係式 (2.4) と(❸)から任意の $i,j = 0,1,2,3$ に対して、

$$a^{1i}_{1j} = a^{1i}_{0j} = a^{0i}_{1j} = 0$$

であることがわかる。したがって、この場合には R は $< s >$ の普遍R行列である。

・$a \neq 0$ のとき：関係式 (2.4) から

$$\begin{cases} (a^{11}_{11})^2 = \zeta^{-3n} = \zeta^n, & & 1 = a^2\zeta^{9n} = a^2\zeta^n, \\ a^{10}_{01} = a^2\zeta^{-n}, & a^{12}_{01} = a^{11}_{11}a\zeta^n, & a^{12}_{03} = a^{11}_{11}a\zeta^{-n}, \\ a^{01}_{10} = a^2\zeta^{-n}, & a^{01}_{12} = a^{11}_{11}a\zeta^n, & a^{03}_{12} = a^{11}_{11}a\zeta^{-n} \end{cases}$$

を得る。(❸)と合わせると、$\zeta^{2n} = 1$, $a^2 = \zeta^n$ でなければならないことがわかる。特に、n は偶数でなければならない。こうして、$\nu = \pm 1$ として

$$a^{1i}_{1j} = \begin{cases} a & \text{if } (i,j) = (1,3),\ (3,1) \\ \nu a & \text{if } (i,j) = (1,1),\ (3,3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a_{0j}^{1i} = a_{1i}^{0j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,1),\ (0,3) \\ \nu & \text{if } (i,j) = (2,1),\ (2,3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることがわかった。

a_{0j}^{0i} の値を決定するために(❹)において $\alpha' = 0, \alpha = \beta = 1, i = j = k = 1$ にとれば

$$0 = \sum_{\beta_1+\beta_2=1} a_{\beta_1\,(-1)^{\beta_2}}^{1\quad 1} a_{\beta_2 1}^{0\ 1} \zeta^{n\beta_1\beta_2}$$

を得る。$a_{11}^{01} = 0$ であるから、上式は $a_{11}^{11}a_{01}^{01} = 0$ に同値である。$a_{11}^{11} \neq 0$ なので、$a_{01}^{01} = 0$ を得る。(2.1)と(2.2)を $\alpha = \beta = 0$ の場合に考えて、 $a_{01}^{0i} = a_{0i}^{01} = 0 \quad (i = 0,1,2,3)$ を得る。したがって、(❸)から、$a_{03}^{0i} = a_{0i}^{03} = 0 \quad (i = 0,1,2,3)$ が導かれる。また、$\alpha = \beta = 0$ の場合の(2.1)、(2.2)式と $a_{00}^{01} = a_{02}^{01} = 0$ とから $a_{00}^{00} = a_{00}^{02} = a_{02}^{00} = a_{02}^{02} = 1$ を得る。まとめると、

$$a_{0j}^{0i} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,0), (0,2), (2,0), (2,2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

以上より、$a \neq 0$ (したがって、n は偶数) のときには、R は

(2.5)
$$R = \sum_{\substack{\alpha,\beta=0,1 \\ i,j=0,1}} a^{\alpha\beta} \nu^{i\alpha+j\beta+\alpha\beta} t^\alpha E_{2i+\beta} \otimes t^\beta E_{2j+\alpha}$$

(但し、$a^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $\nu = \pm 1$) と書けていなければならないことがわかった。この R は $(\varepsilon \otimes id)(R) = 1$ を満たしていることに注意する。

$$E_0 + E_2 = \frac{1}{2}(s^0 + s^2), \quad E_1 + E_3 = \frac{1}{2}(s^0 - s^2)$$
$$E_0 - E_2 = \frac{1}{2}(s + s^3), \quad E_1 - E_3 = \frac{\sqrt{-1}}{2}(-s + s^3)$$

であるので、(2.5)の R は $\nu = 1$ の場合、$\nu = -1$ の場合に応じて、$\mu = 0$、$\mu = 1$ にとって

$$R = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha,\beta=0,1 \\ i,j=0,1}} a^{\alpha\beta} (-1)^{j\alpha+i\beta} t^\alpha s^{2i+\alpha\mu} \otimes t^\beta s^{2j+\beta\mu}$$

但し、$a^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}$ と表すことができる。 逆に、この形の R は普遍R行列であることが確かめられる。これで、定理の前半部分の証明が終わった。

定理の後半を示す。$\mathbf{C}[D_{m,n}]$ の元

$$v := \sum_{i=0}^{m-1} (a_i E_i + b_i t E_i)$$

(但し、$a_i,\ b_i \in \mathbf{C},\ i=0,1,\cdots,m-1$) が $D_{m,n}$ の普遍R行列 R に対するリボン元であるための必要十分条件を求めよう。まず、

$$sv = \sum_{i=0}^{m-1}(a_i\zeta^i E_i + b_i\zeta^{-i}tE_i), \quad vs = \sum_{i=0}^{m-1}(a_i\zeta^i E_i + b_i\zeta^i tE_i)$$

となることから、

$$vs = sv \iff b_i\zeta^{-i} = b_i\zeta^i \quad \text{for } i=0,1,\cdots,m-1$$

を得る。ここで、各 $i=0,1,\ldots,m-1$ について $\zeta^i=\zeta^{-i}$ となるための必要十分条件は $2i \equiv 0 \bmod m$ となることなので、$vs=sv$ ならば $b_1=0$ でなければならない。次に、$(R_{21}R)\Delta(v)=v\otimes v$ であるための条件を求めよう。$a_i,\ b_j$ の添字 i,j をいつものように m を法として考えると、

$$\Delta(v) = \sum_{i,j=0}^{m-1}(a_iE_j\otimes E_{i-j} + b_itE_j\otimes tE_{i-j})$$

となる。

・$R := R_d$ の場合：

$$(R_{21}R)\Delta(v) = \sum_{i,j=0}^{m-1}(\zeta^{2dij}a_{i+j}E_i\otimes E_j + \zeta^{2dij}b_{i+j}tE_i\otimes tE_j)$$

となる。したがって、任意の $i,j=0,1,\cdots,m-1$ について

$$(R_{21}R)\Delta(v) = v\otimes v \iff \begin{cases} a_ia_j = \zeta^{2dij}a_{i+j}, \\ a_ib_j = 0, \\ b_ib_j = \zeta^{2dij}b_{i+j} \end{cases}$$

となる。特に、$i=0,1,\cdots,m-1$ に対して $b_{i+1}=\zeta^{-2di}b_ib_1$ でなければならないので、v がリボン元ならば 任意の $i=0,1,\cdots,m-1$ に対して $b_i=0$ となる。

・$m=4$ かつ n が2の倍数かつ $R=\tilde{R}_{a,\mu}$ $(a^2=(-1)^{\frac{n}{2}}, \mu=0,1)$ の場合：(2.5)より

$$\begin{aligned}
&R_{21}R \\
&= \sum_{\substack{\alpha,\beta\gamma,\delta \\ i,j,k,l}} a^{\alpha\beta+\gamma\delta}\nu^{i\alpha+j\beta+\alpha\beta+k\gamma+l\delta+\gamma\delta}t^\beta E_{2j+\alpha}t^\gamma E_{2k+\delta}\otimes t^\alpha E_{2i+\beta}t^\delta E_{2l+\gamma} \\
&= \sum_{\substack{\alpha,\beta\gamma,\delta \\ i,j,k,l}} a^{\alpha\beta+\gamma\delta}\nu^{i\alpha+j\beta+\alpha\beta+k\gamma+l\delta+\gamma\delta}t^{\beta+\gamma}E_{(-1)^\gamma(2j+\alpha)}E_{2k+\delta}\otimes t^{\alpha+\delta}E_{(-1)^\delta(2i+\beta)}E_{2l+\gamma} \\
&= \sum_{x,y=0}^{3} a^{2xy}E_x\otimes E_y
\end{aligned}$$

となるので、

$$(R_{21}R)\Delta(v) = v \otimes v \iff \begin{cases} a_i a_j = a^{2ij} a_{i+j}, \\ a_i b_j = 0, \\ b_i b_j = a^{2ij} b_{i+j} \end{cases}$$

となる。よって、v がリボン元ならば、$i = 0, 1, 2, 3$ に対して、$b_{i+1} = a^{2i} b_i b_1 = 0$ である。$\varepsilon(v) = 1$ から $a_0 = 1$、$S(v) = v$ から $a_1 = a_3$ が得られるので、v がリボン元ならば、$v = E_0 + E_2 + a_1(E_1 + E_3)$ (但し、$a_1^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}$) と書かれる。これを $\{s^i\}$ の一次結合で書けば、定理の式を得る。逆に、この形の v は $(\mathbf{C}[D_{4,n}], \tilde{R}_{a,\mu})$, $(a^2 = (-1)^{\frac{n}{2}})$ のリボン元である($u = \frac{1}{2}(1 + s^2) + \frac{a}{2}(1 - s^2)$ に注意)。これで定理の後半の証明も終った。□

§.3 系5の証明

ここでは、定理4の応用として、位数8の二面体群 D_8 と位数8の四元数群 Q_8 が同型でないことを証明する。そのために、Majid[5]によって定義された準三角ホップ代数の階数という概念を用いる。

定義(Majid) (A, R) を準三角ホップ代数とする。$R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ 書く。A の元 $u = \sum_i S(\beta_i)\alpha_i$ を A に左から作用させて、A 上の線形変換とみなしたときのトレースを (A, R) の**階数**といい、記号 $\mathrm{rank}(A, R)$ で表す。

定義 2つの準三角ホップ代数 (A, R), (B, R') が同型であるとは、ホップ代数の同型 $\varphi : A \longrightarrow B$ が存在して、$(\varphi \otimes \varphi)(R) = R'$ が成り立つときをいう。

次の補題は定義からただちに導かれる。

補題6 同型な準三角ホップ代数の階数は等しい。□

一般に、2つの群 G, G' の間に同型写像 $\varphi : G \longrightarrow G'$ があれば、それはホップ代数の同型写像 $\varphi : \mathbf{C}[G] \longrightarrow \mathbf{C}[G']$ を導く。そして、$\mathbf{C}[G]$ の普遍R行列 R に対して $(\varphi \otimes \varphi)(R)$ は $\mathbf{C}[G']$ の普遍R行列になる。このことに注意すれば、系5の結果は次の階数を計算した表からただちに従う。

d	0	1	2	3
$\mathrm{rank}(\mathbf{C}[D_{4,n}], R_d)$	8	$4(1-\sqrt{-1})$	0	$4(1+\sqrt{-1})$

上の表では、n は任意の偶数である。

n	4		2	
(a, μ)	$(1, \mu)$	$(-1, \mu)$	$(\sqrt{-1}, \mu)$	$(-\sqrt{-1}, \mu)$
$\mathrm{rank}(\mathbf{C}[D_{4,n}], \tilde{R}_{a,\mu})$	8	0	$4(1+\sqrt{-1})$	$4(1-\sqrt{-1})$

上の表では、$\mu = 0, 1$ である。

(系5の証明) もし、群 D_8 と Q_8 が同型ならば、同じ階数を与える普遍R行列の個数が等しくなければならない。しかしながら、例えば、$4(1+\sqrt{-1})$ を階数とする普遍R行列の個数は D_8 の場合1個であるのに対して Q_8 の場合は3個あり、等しくなっていない。よって、群 D_8 と Q_8 は同型でない。□

謝辞：有益な助言を与えてくださいました川中宣明教授に感謝します。

お詫びと訂正：講演で述べた定理の内容に一部分誤りがありました。ここにお詫びして訂正致します。

参考文献

[1] E. Abe "Hopf algebras", Cambridge University Press, Cambridge, 1980 (original Japanese version published by Iwanami Shoten, Tokyo, 1977)

[2] C. W. Curtis and I. Reiner "Methods of representation theory volume 1", John Wiley & Sons, 1981

[3] V. G. Drinfel'd "Quantum groups", in "Proceedings of the International Congress of Mathematics, Berkeley, CA., 1987" p.798—820

[4] V. G. Drinfel'd "On almost cocommutative Hopf algebras" Leningrad Math. J. **1** (1990) p.321—342

[5] S. Majid "Representation-theoretic rank and double Hopf algebras" Comm. Alg. **18** (1990) p.3705—3712

[6] H. Murakami, T. Ohtsuki and M. Okada "Invariants of three manifolds derived from linking matrices of framed links" Osaka J. Math. **29** (1992) p.545—572

[7] D. E. Radford "On the antipode of a quasitriangular Hopf algebra" J. of Alg. **151** (1992) p.1—11

[8] D. E. Radford "On Kauffman's knot invariants arising from finite-dimensional Hopf algebras" in "Advances in Hopf algebras" (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **158**), edited by J. Bergen and S. Montgomery, Marcel Dekker, 1994, p.205—266

[9] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev "Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups" Comm. Math. Phys. **127** (1990) p.1—26

[10] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev "Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups" Invent. Math. **103** (1991) p.547—597